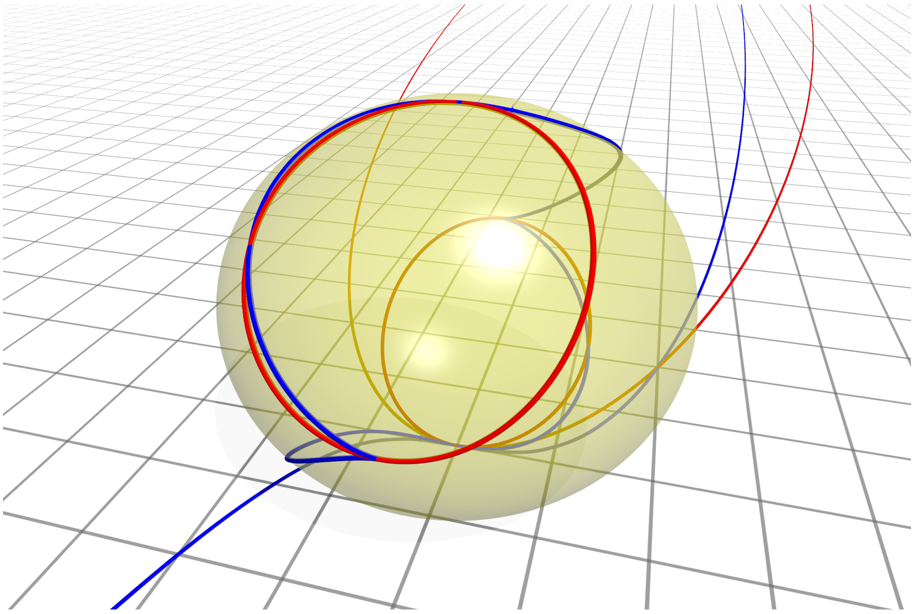
2 3 4 5 6

Sur les epaces projectifs Complexes :
Homologie, Cup Length,TC et LS Cat



Encadré par:

Dr. My. Ismail Mamouni

Réalisé par:

Elkhazraoui Zakia
Khalil Chaimaa

Université Hassan II Casablanca
Faculté des sciences Ain Chok

26 Decembre 2015

Dans cet exposé notre but principal est de définir l'homologie, le cup length, TC et LS Cat des espaces projectifs complexes.

Contents

0.1 Les espaces projectifs complexes

0.1.1 Rappel : Les espaces projectifs

Soit $\mathbf{K}$ est un corps commutatif.

Definition 1 *Soit E un espace vectoriel sur* $\mathbf{K}$.
L'espace projectif $\mathbf{P}(E)$ *associé à E est l'ensemble des droites vectorielles de E.*
Noter qu'un point de $\mathbf{P}(E)$ *est une droite vectorielle de E.*

Exemple 1 *Soit A un espace affine sur* $\mathbf{K}$ *de direction l'espace vectoriel* $\vec{A}$*, et soit* $a \in A$*. L'ensemble des droites affines de A passant par a s'identifie de manière canonique à* $\mathbf{P}(\vec{A})$*, et est ainsi un espace projectif.*

Deux éléments x et y de $E - \{0\}$ engendrent la même droite vectorielle si et seulement s'il existe $\lambda \in K - \{0\}$ tel que $x = \lambda y$, ce qu'on notera $x \Re y$.
Donc $\mathbf{P}(E)$ s'identifie au quotient de $E - \{0\}$ par la relation d'équivalence $\Re$.
Notons $\pi_E : E - \{0\} \longrightarrow \mathbf{P}(E)$ (ou simplement π) la surjection canonique.

0.1.2 Les espaces projectifs complexes

Definition 2 *L'espace projectif complexe* $\mathbf{CP}^n$ *est l'ensemble de tous les sous-espaces complexes de dimension* 1 *passant par* 0 *dans* $\mathbf{C}^{n+1}$.
Il est une variété lisse, compacte, et de dimension $2n$.

Remarque 1 *On peut penser de* $\mathbf{CP}^n$ *comme l'ensemble de toutes les droites complexes dans* $\mathbf{C}^{n+1}$*. Une droite complexe est isomorphe à* $\mathbf{R}^2$*, mais pas tous les sous-espaces réels de dimension* 2 *dans* $\mathbf{C}^{n+1}$ *sont des droites complexes.*

On définit une relation d'équivalence $\Re$ sur $\mathbf{C}^{n+1} - \{0\}$ par :

$$x \Re y \Leftrightarrow x = \lambda y \quad \text{pour} \quad \lambda \neq 0 \quad \text{dans} \quad \mathbf{C}$$

L'espace quotient (l'ensemble des classes d'équivalence) est $\mathbf{C}^{n+1}$.

Puisque chaque droite complexe passant par 0 dans $C^{n+1} \cong R^{2n+2}$ fait intersection avec la sphère S^{2n+1}, on peut restreindre cette relation à S^{2n+1}.
Alors, si $x, y \in S^{2n+1}$, on a :

$$x \Re y \Leftrightarrow x = \lambda y \quad \text{pour} \quad \lambda \neq 0 \quad \text{dans} \quad \mathbf{C} \quad \text{avec}\, |\lambda| = 1$$

Chaque point de $\mathbf{CP}^n$ est representé par un cercle dans $\mathbf{S}^{2n+1}$.
Soit $\pi : \mathbf{S}^{2n+1} \longrightarrow \mathbf{CP}^n$ l'application de passage au quotient. C'est à dire, si $x \in \mathbf{S}^{2n+1}$, on a $\pi(x) = [x]$, avec $[x]$ la droite complexe dans $\mathbf{C}^{n+1}$ passant par x.

L'image réciproque $\pi^{-1}([x])$ d'un point quelconque $[x] \in \mathbf{CP}^n$,
et l'ensemble $\left\{e^{i\theta}x; \theta \in [0, 2\pi]\right\}$ isomorphe à la 1-sphère S^1.

Alors, l'application $\pi : S^{2n+1} \longrightarrow \mathbf{CP}^n$ démontre qu'on peut visualiser $\mathbf{S}^{2n+1}$ comme une famille d'espaces $\mathbf{S}^1$ paramétrée par les éléments de $\mathbf{CP}^n$.

L'espace projectif complexe **infini** est définit comme union de tout les espaces projectifs finis :

$$\mathbf{CP}^\infty = \bigcup_{n\geq 1} \mathbf{CP}^n.$$

0.2 L'homologie des espaces projectifs complexes

0.2.1 Structure de CW complexe sur un espace projectif complexe

Chaque espace projectif n-complexe (i.e. : $\mathbf{CP}^n$), a une structure cellulaire constituée comme union des cellules telle que chaque cellule est de dimension pair inférieure ou égale à $2n$.
i.e. :

$$\mathbf{CP}^n = e^0 \cup e^2 \cup ... \cup e^{2n}$$

o$\grave{u}$ la $k^{ème}$ cellule est attachée au $(k-1)$-squelette via l'application quotient :

$$\mathbf{S}^{2k-1} \longrightarrow \mathbf{CP}^{k-1}.$$

Notons qu'il aussi possible d'obtenir $\mathbf{CP}^n$ par attachement de la cellule e^{2n} à $\mathbf{CP}^{n-1}$ via l'application quotient $\mathbf{S}^{2n-1} \longrightarrow \mathbf{CP}^{n-1}$.
Pour $\mathbf{CP}^\infty$, il a aussi une structure cellulaire définie de la même façon que $\mathbf{CP}^n$ sauf que ici la dimension est infinie.

0.2.2 L'homologie des espaces projectifs complexes

Le complexe de chaines cellulaire associé à $\mathbf{CP}^n$ est :

$$... \xrightarrow{d_{k+2}} \mathbf{C}_{k+1} \xrightarrow{d_{k+1}} \mathbf{C}_k \xrightarrow{d_k} \mathbf{C}_{k-1} \xrightarrow{d_{k-1}} ...$$

où $\mathbf{C}_k$est le groupe abélien libre de base les k-cellules de $\mathbf{CP}^n$, On a alors:

$$\mathbf{Z}\left\{e^{2n}\right\} \xrightarrow{d_{2n}} 0 \xrightarrow{d_{2n-1}} \mathbf{Z}\left\{e^{2n-2}\right\} \xrightarrow{d_{2n-2}} 0 \xrightarrow{d_{n-1}} ...0 \xrightarrow{d_1} \mathbf{Z}\left\{e^0\right\}$$

Ce qui montre que les applications bords d_k dans ce complexe de chaines sont nulles. Et par suite :

$$H_k(\mathbf{CP}^n) = \begin{cases} \text{Z}, & \text{si} \quad 0 \leq k \leq 2n \text{ et k pair;} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

0.3 Complexité topologique (TC)

0.3.1 Rappel : TC

Definition 3 *Soit X un espace connexe par arcs, on définit la complexité topologique TC(X) de X comme étant le plus petit entier positif k tel que, il existe une couverture de $X \times X$ par des sous ensembles ouverts et contractiles $U_1, U_2, ..., U_k \subset X \times X$, tel que sur chaque U_i il existe une section $s_i : U_i \longrightarrow PX$ avec $ev \circ s_i = Id_{U_i}$ $\forall 1 \leq i \leq k$ où $ev : PX \longrightarrow U_i$.*
Si un tel entier n'existe pas on définit $TC(X) = \infty$.

0.3.2 TC des espaces projectifs complexes

Théorème 1 *Soit X un espace simplement connexe de dimension finie $2n$.*
S'il existe une classe de cohomologie $u \in H^2(X; k)$, où k est un corps, tel que $u^n \neq 0 \in H^{2n}(X; k)$. Alors $TC(X) = 2n + 1$.

Preuve 1 *On a X est simplement connexe, l'inégalité : $TC(X) \leq 2n + 1$ vient du théorème suivant :*

Théorème 2 *si X et r-connexe, alors :*

$$TC(X) \prec \frac{2dim(x) + 1}{r + 1} + 1$$

Preuve 2 *Voir* [2]

et le fait que :

$$u \otimes 1 - 1 \otimes u \in H^*(X, K) \otimes H^*(X, K)$$

est un diviseur de zéro, et donc :

$$(u \otimes 1 - 1 \otimes u)^{2n} = (-1)^n \binom{2n}{n} u^n \otimes u^n$$

ne s'annulle pas.

Réciproquement, l'autre inégalité : $TC(X) \geq 2n + 1$ existe dans le théorème 7 *dans l'article de M. Farber :* ***Topological complexity of motion planning, Discrete Comput. Geom.***, 29 (2003), *qui est payant, et malheureusement il n'existe que sur ce journal !*

Corollaire 1 *Si X est une variété simplement connexe alors :*

$$TC(X) = dim(X) + 1.$$

En particulier :

$$TC(\mathbf{CP}^n) = 2n + 1$$

0.4 Le cup length des espaces projectifs complexes

0.4.1 Rappel : Le cup length

Definition 4 *Soient A un anneau commutatif et X un espace. Le cup-length de X à coefficients dans A est le plus petit entier k (ou ∞) tel que tout $(k+1)$-cup produit s'annulle dans la cohomologie réduite $H^*(X;A)$; On le note $cup_A(X)$.*

Definition équivalente : le cup length d'un espace X est la longueur maximale d'un mot dans $(H^*(X), \cup)$, où $\cup$ est le cup-produit.

$$\cup : H^i(X) \otimes H^j(X) \longrightarrow H^{i+j}(X)$$

Proposition 1 *Le A-cup length d'un espace X est inférieur ou égale à la catégorie de l'espace de tous les coefficients de A. i.e. :*

$$cup_A(X) \leq cat(X)$$

Preuve: Voir [1].

0.4.2 Le cup length des espaces pojectifs complexes

On a vu dans (0.2.2) que : $H^*(\mathbf{CP}^n;\mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}[\omega]/(\omega_{n+1})$, l'anneau des polynômes dont le générateur ω est de degré 2. Comme $\mathbf{CP}^n$est simplement connexe et $\omega^n \neq 0$, On a donc :

$$cup(\mathbf{CP}^n) = n.$$

0.5 La catégorie de Lusternik Schnirelmann des espaces projectifs complexes

0.5.1 Rappel : LS CAT

La définition de la complexité topologique est inspirée par la notion de la catégorie de Lusternik Schnirelmann qu'on va définir maintenant.

Definition 5 *Soit X un espace topologique. un ensemble $A \subset X$ est appelé catégorique si l'inclusion $i : A \longrightarrow X$ est homotopiquement nulle.*

Definition 6 *La catégorie de Lusternik Schnirelmann notée $Cat(X)$ d'un espace X est définie comme étant le plus petit entier positif k tel que, il existe des sous ensembles ouverts catégoriques $U_1, ..., U_k$ de X qui couvrent X. Si un tel entier n'existe pas, on pose $cat(X) = \infty$.*

0.5.2 LS CAT des espaces projectifs complexes

Théorème 3 *Si X est un CW complexe $(n-l)$-connexe pour $n \geq 1$, alors*

$$cat^{Wh}(X) \leq dim(X)/n.$$

Preuve 3 ***Rappel :*** La Catégorie de Whitehead :
La catégorie de X notée Cat^{wh} est le plus petit entier tel que, il existe une application $\Delta^{'} : X \longrightarrow T^{n+1}(X)$, tel que le diagramme suivant commute à homotopie près :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Delta'"] \arrow[dr, "\Delta"'] & T^{n+1}(X) \arrow[d] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & X^{n+1} \end{tikzcd}$$

avec $T^{n+1}(X) = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in X^n / \quad$ au moins un des $\quad x_i = *\}$.

On a X est connexe par arcs, donc il a seulement une cellule de dimension 0, et c'est exactement le point base $*$, et il n'y a pas d'autres cellules qui sont inférieurs à n. C'est à dire que $T^{k+1}(X)$ se diffère de X^{k+1} en dimension $n(k+1)$.
Or X^{k+1} a $n(k+1)$ cellules s'obtient à partir du produit de $(k+1)$ n-cellules. on fait augmenter k jusqu'à ce que $nk \leq dim(X) \leq n(k+1)$. D'après le théorème d'approximation cellulaire (voir [6] pages 349), Δ peut se factoriser par $T^{k+1}(X)$. Ainsi la définition de la catégorie de Whitehead nous donne :

$$Cat^{wh}(X) \leq k \leq dim(X)/n$$

Théorème 4 *Soit X un espace connexe par arcs qui n'admet pas un point base non degenéré, on a :*

$$cat^{Wh}(X) = cat(X).$$

Preuve 4 *On pose $Cat^{wh}(X) = n$. Donc il existe une application*

$\Delta^{'} : X \longrightarrow T^{n+1}(X)$ avec $\Delta \approx j\Delta^{'}$ via l'homotopie $H : X \times I \longrightarrow X^{n+1}$.

Soit $p_i : X^{n+1} \longrightarrow X$ la $i^{\text{ème}}$ projection. Donc $P_i \circ H : X \times I \longrightarrow X$ avec

$$\begin{cases} p_i H(x,0) = x \\ p_i H(x,1) = p_i j \Delta^{'}(x) \end{cases}$$

Notons l'application $p_i j\Delta'$ par h_i, et soit $U_i = h_i^{-1}(N)$ l'image réciproque ouverte du voisinage N du point base $*$ qui contracte X vers $*$.

Notons que $T^{n+1}(X) = \bigcup_i p_i^{-1}(*)$ et $j\Delta'(X) \subseteq T^{n+1}(X)$.

Alors $X = \bigcup_i U_i$ (où $1 \leq i \leq n+1$).

Maintenant il est facile de voir qu'on peut contracter U_i vers un point par prendre l'application $L : U_i \times I \longrightarrow X$, qu'on définit par :

$$L(u,t) = \begin{cases} p_i H(u,2t) & si \quad 0 \leq t \leq 1/2 \\ G(h_i(u), 2t-1) & si \quad 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

où $G : N \times I \longleftarrow X$ est une homotopie rétracte du voisinage N.
Ainsi $\{U_i\}$ est une couverture catégorique de X et $Cat(X) \leq n$.

Réciproquement, soit $Cat(X) = n$ avec $\{U_i\}$ une couverture catégorique ouverte via les homotopies $H_i(X \times I) \longrightarrow X$ avec $H_i(x,0) = x$ et $H_i(u,1) = *$ pour $u \in U_i$. Fixons $* \in X$, on définit $H : X \times I \longrightarrow X^{n+1}$ par
$H(x,t) = (H_1(x,t), ..., H_{n+1}(x,t))$. Notons que $H(u,0) = \Delta x$ et
$H(u,1) \in T^{n+1}$ avec u soit l'une des U_i, on a $h(x) \subset T^{n+1}(X)$.
Donc par définition H est une homotopie de $j \circ h$ vers Δ. D'où $h : X \longrightarrow T^{n+1}$ est la factorisation demandée. Donc on a bien $Cat^{wh} = n$.

Conclusion :

On a d'après le théorème (4) : $cat(X) = cat^{Wh}(X)$, et on sait d'après la proposition (1) que :

$$cup_A(X) \leq cat(X) \quad \text{donc} \quad n \leq cat(\mathbf{CP}^n).$$

On a la variété $\mathbf{CP}^n$ est simplement connexe, et d'autre part le théorème (3) nous donne :

$$cat(\mathbf{CP}^n) \leq dim(\mathbf{CP}^n)/2 = 2n/2 = n.$$

On a alors :

$$cat(\mathbf{CP}^n) = n.$$

Bibliography

[1] Octav Cornea, Gregory Lupton, John Opreaand Daniel Tanré, *Lusternick Shnirelman Category*, Mathematical surveys and monographs, Volume 103

[2] Michael Farber, *Invitation to toplogical robotics*, European mathematical society.

[3] Michael Farber, Serge Tabachinkov and Surgey Yuzvinsky, *Topological robotics : Motion planing in projective spaces*, IMR International Mathematics Reserch Notices 2003, No.x.

[4] Michael Farber, Serge Tabachinkov and Surgey Yuzvinsky, *Topological robotics : Motion planing in projective spaces*, Octobre2, 2002.

[5] Omar Ortiz, *CW Complexes and the Projective Space*, Department of Mathematics and Statistics University of Melbourne, August 14, 2012.

[6] Alain Hatcher, *Algebraic topology*, 2001