Université de Rennes I **Institut de Mathématiques** **1994-95**

D.E.A. de Mathématiques

Algèbre homologique et théorie des faisceaux

Bernard Le Stum

I. CATEGORIES ET FONCTEURS

1.1. Catégories

Une catégorie C consiste en une collection d'*objets* X (on écrira $X \in C$ bien que C ne soit pas un ensemble en général) et pour tout $X, Y \in C$ d'un ensemble de *morphismes* $Hom_C(X, Y)$. Si $f \in Hom_C(X, Y)$, on dit que X est la *source* de f et Y son *but* et on écrira $f : X \longrightarrow Y$. On se donne une opération qui à $f : X \longrightarrow Y$ et g : $Y \longrightarrow Z$ associe leurs *composée* $g \circ f : X \longrightarrow Z$ et on demande que l'on ait toujours et $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Enfin, on demande aussi que pour tout $X \in C$, il existe un morphisme *identité* $Id_X : X \longrightarrow X$ tel que l'on ait toujours $Id_Y \circ f = f$ et $f \circ Id_X = f$.

Exemples : i) On dispose de la catégorie **Ens** des ensembles avec pour morphismes les applications et de la catégorie **Top** des espaces topologiques avec pour morphismes les applications continues. Aussi, si G est un monoïde, on peut considérer la catégorie $\boldsymbol{G}$ ayant pour seul objet G et pour morphismes les éléments de G.

ii) On peut considérer les catégories **Mon** des monoïdes, **Gr** des groupes et **Ann** des anneaux. On peut aussi considérer la catégorie A**-mod** (resp. **Mod-**A) des modules à gauche (resp. à droite) sur un anneau (resp. anneau commutatif) A. Comme cas particulier, on trouve la catégories K**-ev** des espaces vectoriels sur un corps K avec les applications linéaires et la catégorie **Ab** des groupes abéliens. On peut aussi considérer les catégories G**-mod** des modules à gauche sur un monoïde G et A**-alg** des algèbres commutatives sur un anneau A. On pourra aussi s'intéresser à la catégorie K**-evf** des K-espaces vectoriels de dimension finie. Enfin, il y a aussi la catégorie $\mathbf{Mat}_A$ dont les objets sont les entiers naturels et les morphismes $m \longrightarrow n$, les matrices à n lignes et m colonnes à coefficients dans l'anneau A.

iii) On dispose aussi de la catégorie **GrT** des groupes topologiques avec homomorphismes continus et de la catégorie K**-evt** des K-espaces vectoriels topologiques avec applications linéaires continues si K est topologisé. Un autre exemple est fourni par les catégories **Met** (resp. **Comp**) des espaces métriques (resp. métriques complets) avec application uniformément continues ou par la catégorie K**-evn** des espaces vectoriels normés et les applications contractantes sur un corps valué K (par exemple sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

iv) On peut aussi considérer un ensemble partiellement ordonné $(A, \leq)$ comme une catégorie : Les objets sont donc les éléments de A et pour tout α, β de

A, il y a un unique morphisme $\alpha \longrightarrow \beta$ si $\alpha \leq \beta$ et aucun sinon. Comme cas particulier, on peut considérer si X est un espace topologique, l'ensemble $Ouv(X)$ des ouverts de X muni de l'inclusion $\subset$.

Une catégorie est *petite* si ses objets forment un ensemble. Elle est *finie* si (ses objets et) ses morphismes sont en nombre fini. Si C et C' sont deux catégories, la *catégorie produit* est la catégorie ayant pour objets les couples (X, X') d'objets de C et C' et pour morphismes $(X, X') \longrightarrow (Y, Y')$, les couples de morphismes $X \longrightarrow Y$ et $X' \longrightarrow Y'$. On appelle *catégorie duale* de C, la catégorie C^{op} ayant mêmes objets que C obtenue en renversant les flèches. Une *sous-catégorie* C' de C est une catégorie dont tous les objets sont des objets de C et tous les morphismes sont des morphismes de C, les identités et la composition étant induit par ceux de C. On dit que C' est une *sous-catégorie pleine* de C si tout morphisme $X \longrightarrow Y$ de C avec X, Y $\in C'$, est un morphisme de C'.

Exemples : i) La catégorie duale de $(A, \leq)$ est $(A, \geq)$.

ii) Les catégories **Ens**, **Top**, **Mon**, **Gr**, **Ann**, A-**mod** et A-**alg** ne sont pas petites, mais (A, $\leq$) (et donc aussi $Ouv(X)$), $\boldsymbol{G}$ et $\mathbf{Mat}_A$ sont des exemples de petites catégories.

iii) **Ab** est une sous-catégorie pleine de **Gr**, qui est elle même une sous-catégorie pleine de **Mon**.

1.2. Structure interne d'une catégorie

Un *inverse à gauche* (ou une *rétraction*) pour $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme g : $Y \longrightarrow X$ tel que $g \circ f = Id_X$. Un *inverse à droite* (ou une *section)* pour f est un morphisme $h : Y \longrightarrow X$ tel que h soit un inverse à gauche pour f dans C^{op}.

Proposition. Si f possède une rétraction r et une section s, alors $r = s$.

Un *inverse* pour f est un morphisme qui est à la fois un inverse à gauche et à droite. On le note f^{-1}. On dit alors que f est un *isomorphisme* et que X et Y sont *isomorphes*. Enfin, on dit que f est un *monomorphisme* (ou que f fait de X un sous-objet de Y) si $g = h$ chaque fois que $f \circ g = f \circ h$. On dit que f est un *épimorphisme* (ou que f fait de Y un *quotient* de X) si f est un monomorphisme dans C^{op}.

Exemples : i) Dans **Ens**, un monomorphisme est simplement une application injective et elle possède toujours un inverse à gauche. De même, un épimorphisme est une application surjective et elle possède toujours un inverse à droite. Enfin, un isomorphisme est tout simplement une application bijective.

ii) Dans **Top**, **Gr**, **Ann**, A**-mod** et A**-alg**, les monomorphismes sont les morphismes injectifs. Un isomorphisme de **Top** est tout simplement un homéomorphisme. Dans A**-mod**, tout homomorphisme bijectif est un isomorphisme.

Exercices : i) Dans **Top**, il y a des applications bijectives (continues) qui ne sont pas des homéomorphismes.

ii) Dans **Ann**, il existe des monomorphismes qui sont aussi des épimorphismes mais pas des isomorphismes ($\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$).

iii) Dans **Ab**, il existe des épimorphismes qui n'ont pas de section et des monomorphismes qui n'ont pas de rétraction.

Proposition. i) Un morphisme possédant une rétraction est un monomorphisme (dual).

ii) Le composé de deux monomorphismes en est aussi un (dual).

iii) Si $g \circ f$ est un monomorphisme alors f aussi (dual).

1.3. Objets universels

Un objet X de C est *final* si pour tout Y de C, il existe un unique morphisme $Y \longrightarrow X$, appelé *morphisme final*. Il est *initial* si c'est un objet final de C^{op} et on parle alors de *morphisme initial*

Exemples : L'ensemble $\{0\}$ est final dans **Ens** (ou **Top)** et l'ensemble $\emptyset$ est initial. Dans A**-mod**, le module nul est à la fois final et initial. Dans A**-alg**, l'anneau nul est l'objet final et A est l'objet initial. Dans $(A, \leq)$, un plus grand élément est un objet final et un plus petit élément est un objet initial.

Proposition. Un objet final est unique à unique isomorphisme près (dual).

Un objet X de C est un *produit* d'une famille $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ d'objet de C s'il existe une famille $\{p_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de morphismes de C appelées *projections* telle que pour toute famille de morphismes $\{f_\alpha : Y \longrightarrow X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de C, il existe un unique morphisme $f : Y \longrightarrow X$ tel que, pour tout α, on ait $f_\alpha = p_\alpha \circ f$. C'est une *somme* de la famille $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ si c'est un produit dans C^{op}. On parle alors d'*injections*.

Exemples : Le produit cartésien ΠE_α d'une famille d'ensembles est leur produit dans **Ens** et leur union disjointe $\coprod E_\alpha$ est leur somme. Dans **Top**, on a le même résultat avec la topologie la moins fine (resp. la plus fine) rendant continues les projections (resp. les injections). Dans A-**mod** ou **Gr**, le produit cartésien est toujours le produit mais c'est la somme directe ou le produit libre qui est la somme. Dans A-**alg** aussi, le produit est le produit cartésien, mais la somme de deux anneaux est leur produit tensoriel sur A. Dans $(A, \leq)$, la borne inférieure (resp. supérieure) d'une famille est leur produit (resp. leur somme).

Proposition. i) Si on se donne une famille de morphismes $f_\alpha : X_\alpha \longrightarrow Y_\alpha$ et si X (resp. Y) est produit des X_α (resp. Y_α) avec projections p_α (resp. q_α), alors il existe un unique morphisme $f : X \longrightarrow Y$ tel que $q_\alpha \circ f = f_\alpha \circ p_\alpha$ (dual).

ii) Si X (resp. X') est produit des X_α avec projections p_α (resp. p'_α), alors il existe un unique isomorphisme $f : X \xrightarrow{\sim} X'$ tel que $p'_\alpha \circ f = p_\alpha$ (dual).

iii) Si Y est un produit de X par lui même, il existe un unique $\delta_X : X \longrightarrow Y$ tel que $Id_X = p_1 \circ \delta = p_2 \circ \delta$ (dual).

Exercice : Dans **Top**, X est séparé si et seulement si δ_X est fermée.

Un objet Z est un *noyau* de $f_1, f_2 : X \longrightarrow Y$ s'il existe un morphisme $i : Z \longrightarrow X$, appelé *inclusion*, tel que $f_1 \circ i = f_2 \circ i$ et que pour tout morphisme $g : T \longrightarrow X$ tel que $f_1 \circ g = f_2 \circ g$, il existe un unique $h : T \longrightarrow Z$ tel que $i \circ h = g$. On dit alors que la suite

$$Z \xrightarrow{i} X \overset{f_1}{\underset{f_2}{\rightrightarrows}} Y$$

est *exacte à gauche*. On dit que Z est un *conoyau* de f_1, $f_2 : X \longrightarrow Y$ si c'est un noyau de f_1 , f_2 dans C^{op}. On parle alors de *projection* et de suite exacte *à droite*.

Exemples : Un noyau de $f, g : E \longrightarrow F$ dans **Ens** est donné par $Ker(f, g) := \{x \in X, f(x) = g(x)\}$. Le quotient $Coker(f, g)$ de F par la plus petite relation d'équivalence $\mathcal{R}$ satisfaisant $f(x)\ \mathcal{R}\ g(x)$ pour $x \in E$, est un conoyau de f, g. Dans

Top, on trouve les mêmes ensembles avec la topologie induite ou la topologie quotient. Dans A-**mod**, $Ker(f - g)$ est un noyau de f, g et $Coker(f - g)$ est un conoyau de f, g.

Proposition. i) Si Z (resp. Z') est un noyau de $f, g : X \longrightarrow Y$ (resp. $f', g' : X' \longrightarrow Y'$) avec morphisme d'inclusion i' et si $\varphi : X \longrightarrow X'$ et $\psi : Y \longrightarrow Y'$ sont deux morphismes tels que $\psi \circ f = f' \circ \varphi$ et $\psi \circ g = g' \circ \varphi$, alors il existe une unique flèche $\lambda : Z \longrightarrow Z'$ telle que $i' \circ \lambda = \varphi \circ i$ (dual).

ii) Si Z (resp. Z') est un noyau de f, g avec morphisme d'inclusion i (resp. i'), alors il existe un unique isomorphisme $\lambda : Z \xrightarrow{\sim} Z'$ tel que $i' \circ \lambda = i$ (dual).

iii) Si Z est un noyau de $f, g : X \longrightarrow Y$, alors le morphisme d'inclusion $i : Z \longrightarrow X$ est un monomorphisme (dual).

iv) Si Z est un noyau de $f, g : X \longrightarrow Y$ et $j : Y \hookrightarrow Y'$ un monomorphisme, alors Z est aussi un noyau de $j \circ f$ et $j \circ g$. (dual).

On dit que X est un *produit fibré* de $f_1 : X_1 \longrightarrow Y$ et $f_2 : X_2 \longrightarrow Y$ s'il existe $p_1 : X \longrightarrow X_1$ et $p_2 : X \longrightarrow X_2$ satisfaisant $f_1 \circ p_1 = f_2 \circ p_2$ appelées *projections* tels que pour toute paire de morphismes $g_1 : Z \longrightarrow X_1$ et $g_2 : Z \longrightarrow X_2$ satisfaisant $f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_2$, il existe un unique morphisme $f : Z \longrightarrow X$ tel que $f_1 = p_1 \circ f$ et $f_2 = p_2 \circ f$. On dit alors que le *diagramme*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p_1} & X_1 \\ \downarrow p_2 & & \downarrow f_1 \\ X_2 & \xrightarrow{f_2} & Y \end{array}$$

est *cartésien.* On dit que X est un *coproduit fibré* ou une *somme amalgamée* de $f_1 : Y \longrightarrow X_1$ et $f_2 : Y \longrightarrow X_2$ si c'est un produit fibré de f_1 et f_2 dans C^{op}. On parle alors d'*injections* et de *diagramme cocartésien.*

Exemples : Un produit fibré de $f_1 : X_1 \longrightarrow Y$ et $f_2 : X_2 \longrightarrow Y$ dans **Ens**, **Top**, ou A-**mod** est donné par $X_1 \times_Y X_2 := \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2, f_1(x_1) = f_2(x_2)\}$ avec la structure induite. Une somme amalgamée de $f_1 : Y \longrightarrow X_1$ et $f_2 : Y \longrightarrow X_2$ dans **Ens** ou **Top** est donnée par le quotient de $X_1 \coprod X_2$ par la plus petite relation d'équivalence telle que $f_1(y) \mathscr{R} f_2(y)$ si $y \in Y$.

Proposition. i) Si X (resp. X') est un *produit fibré* de $f_1 : X_1 \longrightarrow Y$ et $f_2 : X_2 \longrightarrow Y$ (resp. $f'_1 : X'_1 \longrightarrow Y'$ et $f'_2 : X'_2 \longrightarrow Y'$) avec projections p_1 et p_2 (resp. p'_1 et p'_2) et si

$\psi : Y \longrightarrow Y'$, $\varphi_1 : X_1 \longrightarrow X_1'$ et $\varphi_2 : X_2 \longrightarrow X_2'$ sont tels que $\psi \circ f_1' = f_1 \circ \varphi_1$ et $\psi \circ f_2' = f_2 \circ \varphi_2$, alors il existe un unique morphisme $\varphi : X \longrightarrow X'$ tel que $p_1' \circ \varphi = \varphi_1 \circ p_1$ et $p_2' \circ \varphi = \varphi_2 \circ p_2$ (dual).

ii) Si X (resp. X') est un produit fibré de f_1 et f_2 avec projections p_1 et p_2 (resp. p_1' et p_2'), il existe un unique isomorphisme $\varphi : X \xrightarrow{\sim} X'$ tel que $p_1' \circ \varphi = p_1$ et $p_2' \circ \varphi = p_2$ (dual).

iii) Dans un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad ,$$

si f est un monomorphisme, alors f' aussi (dual).

Exercice : Si le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f} & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f'} & Y \end{array} \quad ,$$

est cocartésien et f est un monomorphisme, alors f aussi dans **Ens**, **Top** ou A-**mod** mais pas dans **Gr** (prendre pour f l'injection de A_4 dans A_5 et pour X un quotient on trivial de A_4).

Proposition. i) Si C possède un objet final 0, un produit fibré de $X \longrightarrow 0$ et $Y \longrightarrow 0$ est un produit de X et Y (dual). D'autre part, 0 est le produit vide (dual).

ii) Si X est un produit de X_1 et X_2, alors un noyau de $f_1 \circ p_1, f_2 \circ p_2 : X \longrightarrow Y$ est un produit fibré de $f_1 : X_1 \longrightarrow Y$ et $f_2 : X_2 \longrightarrow Y$ (dual).

iii) Si Z est un produit de Y par lui même et si $f_1, f_2 : X \longrightarrow Y$, il existe un unique $f : X \longrightarrow Z$ tel que $p_1 \circ f = f_1$ et $p_2 \circ f = f_2$ et alors, un produit fibré de f et de δ_Y est un noyau de f_1, f_2 (dual).

1.4. Foncteurs

Un *foncteur (covariant)* $F : C \longrightarrow C'$ est une opération qui à tout $X \in C$ associe un objet $F(X) \in C'$ et à toute flèche $f : X \longrightarrow Y$ associe un morphisme $F(f) : F(X) \longrightarrow F(Y)$. On demande que $F(Id_X) = Id_{F(X)}$ et que $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$. On dispose du foncteur identique $Id_C : C \longrightarrow C$ et on peut aussi composer deux foncteurs $F : C \longrightarrow C'$ et $G : C' \longrightarrow C''$ de manière évidente. Un *bifoncteur* est un foncteur $C \times C' \longrightarrow C''$. On définit de manière évidente le *produit* $F_1 \times F_2 : C_1 \times C_2 \longrightarrow C'_1 \times C'_2$ de deux foncteurs $F_1 : C_1 \longrightarrow C'_1$ et $F_2 : C_2 \longrightarrow C'_2$. Si $F : C \longrightarrow C'$ est un foncteur, il lui correspond de manière évidente un foncteur $F^{op} : C^{op} \longrightarrow C'^{op}$. Enfin, on dit aussi qu'un foncteur $F : C^{op} \longrightarrow C'$ est un *foncteur contravariant* de C dans C'.

Exemples : i) On dispose des foncteurs oublis **Top** $\longrightarrow$ **Ens**, A-**mod** $\longrightarrow$ **Ens**, **Gr** $\longrightarrow$ **Ens**, **Ann** $\longrightarrow$ **Mon**. On dispose aussi des foncteurs d'inclusion **Ab** $\hookrightarrow$ **Gr**, **Gr** $\hookrightarrow$ **Mon**, **Comp** $\hookrightarrow$ **Met** et K-**evf** $\hookrightarrow$ K-**ev**. Tout morphisme de monoïdes $G \longrightarrow H$ induit un foncteur $G \longrightarrow H$.

ii) On a le foncteur d'abélianisation $G \longmapsto G^{ab} := G/[G, G]$, **Gr** $\longrightarrow$ **Ab.** On peut aussi considérer le foncteur évident $n \longmapsto A^n$, $\mathbf{Mat}_A \longrightarrow A$-**mod**. On dispose du foncteur Gl^n : **Ann** $\longrightarrow$ **Gr**, et en particulier du foncteur $A \longmapsto A^*$. Il y a aussi le foncteur $M \longmapsto M' := Hom_A(M, A)$, A-**mod** $\longrightarrow$ A-**mod**.

iii) Un foncteur covariant $(A, \leq) \longrightarrow (B, \leq)$ est une application croissante. Toute application continue $f : Y \longrightarrow X$ fournit un foncteur $f^{-1} : Ouv(X) \longrightarrow Ouv(Y)$. On peut considérer la catégorie **Cat** des petites catégories avec pour morphismes les foncteurs. On dispose alors d'un foncteur contravariant $X \longmapsto Ouv(X)$, **Top** $\longrightarrow$ **Cat**.

iv) Si A est un anneau, on peut considérer le bifoncteur $(M, N) \longmapsto Hom_{Ab}(M, N)$ de **Mod-A** $\times$ **Ab** dans A-**mod**, qui est covariant en M et contravariant en N ou le bifoncteur $(M, N) \longmapsto M \otimes_A N$ de **Mod-A** $\times$ A-**mod** dans **Ab** qui est covariant en les deux variables.

v) Si $A \longrightarrow B$ est un morphisme d'anneaux, on dispose du foncteur de restriction des scalaires B-**mod** $\longrightarrow$ A-**mod** et du foncteur d'extension des scalaires A-**mod** $\longrightarrow$ B-**mod**, $M \longmapsto B \otimes_A M$.

vi) On peut considérer les foncteurs $E \longmapsto E^{gros}$ et $E \longmapsto E^{disc}$, **Ens** $\longrightarrow$ **Top** qui munissent un ensemble de la topologie grossière ou discrète et dans l'autre sens, le foncteur $X \longmapsto \pi_0(X)$. On a aussi le foncteur **Ens** $\longrightarrow$ A-**mod** (resp. **Ens** $\longrightarrow$ **Gr**) qui associe à E le A-module libre AE (resp. le groupe libre) sur X. Enfin, on peut considérer le foncteur **Mon** $\longrightarrow$ **Ann** qui associe au monoïde G l'anneau $\mathbb{Z}[G]$.

Proposition. Un foncteur préserve les sections (dual) et les isomorphismes.

Exercice : Un foncteur ne préserve pas toujours les monomorphismes ni les épimorphismes.

Un foncteur $F : C \longrightarrow C'$ est *fidèle* (resp. *pleinement fidèle*) si les applications $f \longrightarrow F(f), Hom(X, Y) \longrightarrow Hom\ (F(X), F(Y))$ sont injectives (resp. bijectives). Il est *essentiellement surjectif* si tout objet de C' est isomorphe à un objet de la forme $F(X)$.

Exemples : Le foncteur d'abélianisation est surjectif. Les foncteurs oubli **Top** $\longrightarrow$ **Ens**, A-**mod** $\longrightarrow$ **Ens**, **Gr** $\longrightarrow$ **Ens**, **Ann** $\longrightarrow$ **Mon** sont fidèles. Le foncteur $\mathbf{Mat}_K \longrightarrow K$-**evf**, $n \longmapsto K^n$, est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.

Proposition. i) Le composé de deux foncteurs (pleinement) fidèles est (pleinement) fidèle.

ii) Si C' est une sous-catégorie de C, le foncteur d'inclusion $C' \hookrightarrow C$ est fidèle. Il et pleinement fidèle si et seulement si C' est une sous-catégorie pleine de C.

iii) Si F est pleinement fidèle et $F(X)$ est isomorphe à $F(Y)$, alors X est isomorphe à Y.

iv) Si F est fidèle et $F(f)$ est un monomorphisme alors f est un monomorphisme (dual).

1.5. Transformation naturelle

Étant donnés deux foncteurs $F, G : C \longrightarrow C'$, une *transformation naturelle* $\alpha : F \longrightarrow G$ est une collection de morphismes $\alpha^X : F(X) \longrightarrow G(X)$ tels que pour tout $f : X \longrightarrow Y$, on ait $G(f) \circ \alpha^X = \alpha^Y \circ F(f)$. On définit de manière évidente la notion d'*identité naturelle* Id_F en prenant $Id_F^X = Id^{F(X)}$, la *composée* de deux transformations naturelles en prenant $(\beta \circ \alpha)^X = \beta^X \circ \alpha^X$ et la notion d'*isomorphisme naturel* α en demandant qu'il existe $\beta : G \longrightarrow F$ tel que $\beta \circ \alpha = Id_F$ et $\alpha \circ \beta = Id_G$. On dit qu'un foncteur $F : C \longrightarrow C'$ est une *équivalence de catégories* s'il existe $G : C' \longrightarrow C$ tels que $G \circ F$ soit naturellement isomorphe à Id_C et $F \circ G$ soit naturellement isomorphe à $Id_{C'}$ On dit alors que F et G sont *quasi-inverses*. On dit que C et C' sont *anti-équivalentes* si C^{op} et C' sont équivalentes.

Exemples : $det : Gl^nA \longrightarrow A^*$ définit une transformation naturelle. De même, la projection $G \longrightarrow G^{ab}$ définit une transformation naturelle entre l'identité de **Gr** et le foncteur composé **Gr** $\longrightarrow$ **Ab** $\hookrightarrow$ **Gr.** L'application canonique $M \longrightarrow M''$, $x \longmapsto (u \longmapsto u(x))$ définit une transformation naturelle entre l'identité et le foncteur bidual sur A-**mod**. Le foncteur bidual $E \longmapsto E''$ induit une équivalence entre K-**evf** et elle même. Le foncteur $\mathbf{Mat}_K \longrightarrow K$-**evf**, $n \longmapsto K^n$ est une équivalence de catégories.

Proposition. Une transformation naturelle α est un isomorphisme si et seulement si pour tout X, l'application α^X en est un.

On dira que α est un *monomorphisme* ou un *épimorphisme* si pour tout X, l'application α^X en est un.

Théorème. Un foncteur est une équivalence de catégories si et seulement si il est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.

Proposition. i) Si A est une petite catégorie et C une catégorie quelconque, les foncteurs $D : A \longrightarrow C$ forment une catégorie C_A avec pour morphismes les transformations naturelles. Un morphisme T de C_A est un monomorphisme si et seulement T^α en est un pour tout $\alpha \in A$ (dual).

ii) Si A est une petite catégorie et $F : C \longrightarrow C'$ un foncteur, il existe un unique foncteur $F_A : C_A \longrightarrow C'_A$, tel que $F_A(D) = F \circ D$ si $D \in C_A$ et $F_A(T)^\alpha = F(T^\alpha)$ si T est un morphisme de C_A et $\alpha \in A$. On a toujours $(G \circ F)_A = G_A \circ F_A$.

iii) Si $\lambda : A \longrightarrow B$ est un foncteur entre petites catégories, il existe un unique foncteur $\lambda^* : C_B \longrightarrow C_A$ tel que $\lambda^*(D) = D \circ \lambda$ si $D \in C_B$ et $\lambda^*(T)^\alpha = T^{\lambda(\alpha)}$ si T est un morphisme de C_B et $\alpha \in A$. On a toujours $(\mu \circ \lambda)^* = \lambda^* \circ \mu^*$.

iv) Si A et B sont deux petites catégories, le foncteur $(C_A)_B \longrightarrow C_{A\times B}$ qui envoie $D \in (C_A)_B$ sur le foncteur $(\alpha, \beta) \longmapsto D(\beta)(\alpha)$ et $(u, v) \longrightarrow D(\beta')(u) \circ D(v)^\alpha$ est une équivalence de catégories.

1.6. Foncteurs représentables

Si $X \in C$, on définit un foncteur $h_X : C \longrightarrow$ **Ens** en posant $h_X(Y) := Hom(X, Y)$ et $h_X(f)(g) = f \circ g$ si $f : Y \longrightarrow Z$ et $g : X \to Y$. A $f : Y \longrightarrow X$, on associe une transformation naturelle $h_f : h_X \longrightarrow h_Y$ en posant $h_f^Z : h_X(Z) \longrightarrow h_Y(Z)$, $g \longmapsto g \circ f$.

Proposition. Si A est une petite catégorie, on obtient un foncteur contravariant $\alpha \longmapsto h_\alpha$, $A \longrightarrow \mathbf{Ens}_A$.

On dit qu'un foncteur $F : C \longrightarrow \mathbf{Ens}$ est *représentable* s'il est naturellement isomorphe à un foncteur de la forme h_X.

Exemples : Si A est un anneau et S une partie multiplicative de A, le foncteur $B \longmapsto \{\varphi : A \longrightarrow B,\ \varphi(S) \subset B^*\}$ dans la catégorie des anneaux commutatifs est représentable par A_S. Le foncteur oubli sur **Gr** est représentable par $\mathbb{Z}$ et le foncteur oubli sur A-**mod** est représentable par A. Le foncteur oubli sur **Top** est représentable par l'espace ponctuel. Le foncteur oubli sur A-**alg** est représentable par $A[T]$. Si A est un anneau, le bifoncteur $P \longrightarrow Bil(M, N; P)$ de **Mod**-$A \times A$-**mod** dans **Ab** est représenté par $M \otimes_A N$.

Exercice : Le foncteur oubli de la catégorie **Grf** des groupes finis vers **Ens** n'est pas représentable.

Lemme de Yoneda : Soit $F : C \longrightarrow \mathbf{Ens}$ un foncteur et $X \in C$. Soit $s \in F(X)$. Si $Y \in C$, on note $\alpha^Y : h_X(Y) \longrightarrow F(Y)$, $f \longmapsto F(f)(s)$. Alors α est une transformation naturelle $h_X \longrightarrow F$. De plus, l'application $s \longmapsto \alpha$ ainsi construite est une bijection de $F(X)$ sur la collection des transformations naturelles $h_X \longrightarrow F$ (qui est donc un ensemble).

Proposition. i) Un foncteur $F : C \longrightarrow \mathbf{Ens}$ est représentable si et seulement si il existe $X \in C$ et $s \in F(X)$ tels que pour tout $Y \in C$ et tout $t \in F(Y)$, il existe un unique $f : X \longrightarrow Y$ tel que $F(f)(s) = t$.

ii) Si X et X' représentent le même foncteur à l'aide de s et s', respectivement, alors il existe un unique isomorphisme $f : X \xrightarrow{\sim} X'$ tel que $F(f)(s) = s'$.

iii) Si A est une petite catégorie, alors le foncteur contravariant $\alpha \longmapsto h_\alpha$, $A \longrightarrow \mathbf{Ens}_A$ est pleinement fidèle(dual).

iv) Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de C et $F : C \longrightarrow \mathbf{Ens}$ un foncteur fidèle représentable. Alors f est un monomorphisme si et seulement si $F(f)$ est injective.

Proposition. i) Un objet est final si et seulement si il représente le foncteur contravariant $Y \longmapsto \{0\}$ (dual).

ii) Un objet est un produit des X_α si et seulement si il représente le foncteur $Y \longrightarrow \Pi Hom(Y, X_\alpha)$ (dual).

iii) Un objet est un noyau de $f, g : X \longrightarrow Y$ si et seulement si il représente le foncteur $Z \longmapsto Ker(h_Z^f, h_Z^g)$ (dual).

iv) Un objet est un produit fibré de $f_1 : X_1 \longrightarrow Y$ et $f_2 : X_2 \longrightarrow Y$ si et seulement si il représente le foncteur $Z \longmapsto Hom(Z, X_1) \times_{Hom(Z,\ Y)} Hom(Z, X_2)$ (dual).

Tout foncteur représentable étant unique à unique isomorphisme près, on parle souvent de l'objet qui le représente. En particulier, on note souvent 0 ou e l'objet final, Ø l'objet initial, Π ou $\times$ le produit (fibré), $\coprod$ la somme (amalgamée), Ker le noyau et $Coker$ le conoyau.

1.7. Limites

Un *diagramme commutatif* X dans C de *base* A est un foncteur D d'une petite catégorie A dans la catégorie C. On dispose du *foncteur diagonal* $\delta_A : C \longrightarrow C_A$, qui à X associe le *diagramme constant* $\underline{X} : \alpha \longmapsto X, u \longmapsto Id_X$. Si D est un diagramme commutatif de base A dans C et si le foncteur composé $h_D \circ \delta_A$ est représentable par X, on dit que X est la *limite inductive* de D et on pose $\varinjlim D := X$. Si D^{op} possède une limite inductive X, on dit que X est la limite projective de D et on pose $\varprojlim D := X$. On parle de limite *finie* si A est finie. Dire que $X = \varprojlim D$ signifie donc qu'il existe un morphisme canonique $S : \underline{X} \longrightarrow D$ tel que si $Y \in C$ et $T : \underline{Y} \longrightarrow D$ est un morphisme, il existe un unique $g : Y \longrightarrow X$ tel que $T = S \circ \underline{g}$.

Se donner un *diagramme commutatif* X dans C de *base* A revient à se donner le *système* suivant : pour tout $\alpha \in A$, un objet $X_\alpha := D(\alpha)$ de C et pour toute flèche $u : \alpha \longrightarrow \beta$, un morphisme $f_u = D(u) : X_\alpha \longrightarrow X_\beta$ tels que l'on ait toujours $f_{v \circ u} = f_v \circ f_u$. On a alors $X = \varprojlim D$ si et seulement si il existe une famille $\{p_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de morphismes de C satisfaisant $f_u \circ p_\alpha = p_\beta$ pour tout $u : \alpha \longrightarrow \beta$, telle que pour toute famille de morphismes $\{f_\alpha : Y \longrightarrow X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de C satisfaisant $f_u \circ f_\alpha = f_\beta$, il existe un unique morphisme $f : Y \longrightarrow X$ tel que, pour tout α, on ait $f_\alpha = p_\alpha \circ f$. On écrit parfois $\varprojlim D =: \varprojlim (X_\alpha, f_u)$ ou même $\varprojlim X_\alpha$.