Problèmes de Théorie des Catégories et de Théorie des Topos

Alain Prouté
Équipe de Logique
Institut Mathématique de Jussieu
Université Denis Diderot - Paris 7.
email : `alp@logique.jussieu.fr`
web : `people.math.jussieu.fr/~alp`

Sont rassemblés ici les huit problèmes donnés en partiel et examen lors des trois années où j'ai enseigné la logique catégorique dans le Master 2[ième] année LMFI (Logique Mathématique et Fondements de l'Informatique) de l'université Denis Diderot. Les corrigés sont également inclus dans ce document.

Ces problèmes utilisent certaines notations et certaines expressions que j'ai introduites pour les besoin de mon cours. Afin de rendre les textes de ces problèmes intelligibles, sans qu'il soit besoin de se référer au cours, j'ai ajouté des notes de bas de pages partout où cela m'a paru nécessaire.

Problème 1

I.

Soit X un ensemble ordonné non vide (on note $\leq$ la relation d'ordre). L'ensemble $X \times X$ est ordonné par $(x, y) \leq (u, v)$ si et seulement si $x \leq u$ et $y \leq v$. On suppose que l'application diagonale $\Delta : X \to X \times X$, définie par $\Delta(x) = (x, x)$ a une adjointe à gauche $\vee$ et une adjointe à droite $\wedge$.

(a) Montrer que si X est fini et si $\wedge$ est distributif sur $\vee$, alors X est une algèbre de Heyting.

II.

Pour tout ensemble fini $\Sigma = \{a, b, c, \dots\}$ qu'on appelle « alphabet », et dont les éléments seront appelés « lettres », on note Σ^* l'ensemble de tous les « mots » de longueur finie qu'on peut écrire avec des lettres de Σ. Σ^* est un monoïde, d'élément neutre le mot vide (aucune lettre) et ayant la concaténation des mots pour multiplication.

(a) Soient a et b deux lettres distinctes. Montrer que le cocône

$$\{a\}^* \xrightarrow{i_1} \{a, b\}^* \xleftarrow{i_2} \{b\}^*$$

où i_1 et i_2 sont les inclusions canoniques (au sens ensembliste), est une somme de $\{a\}^*$ et $\{b\}^*$ dans la catégorie des monoïdes.

$(\mathbb{N}, +, 0)$ *est un monoïde, de même que* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, *muni de l'addition* $(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$.

(b) Montrer que le cocône :

$$\mathbb{N} \xrightarrow{i_1} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xleftarrow{i_2} \mathbb{N}$$

où $i_1(n) = (n, 0)$ et $i_2(n) = (0, n)$ est une somme de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$ dans la catégorie des monoïdes commutatifs.

(c) En déduire que le foncteur d'inclusion de la catégorie des monoïdes commutatifs dans la catégorie des monoïdes n'a pas d'adjoint à droite.

III.

Soit

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

un carré cartésien dans une catégorie $\mathcal{C}$ ayant des produits binaires.

(a) Montrer que la flèche :

$$X \xrightarrow{\langle \alpha, \beta \rangle} A \times B$$

est un monomorphisme.

IV.

On considère la catégorie $\mathcal{C}$ dont les objets sont les paires (X, s), où X est un ensemble et s une involution de X (i.e. une application $s : X \to X$ telle que $s \circ s = 1_X$). Un morphisme de $f : (X, s) \to (Y, t)$ est une application $f : X \to Y$ telle que $t \circ f = f \circ s$.

(a) Montrer que $\mathcal{C}$ est cartésienne.

(b) Montrer que le foncteur $F : (\mathcal{C}^{op})^{op} \to \mathbf{Ens}$ défini par $F(X, s) = X$ et $F(f : (X, s) \to (Y, t)) = f : X \to Y$ a un classifiant $((\Gamma, \sigma), \iota)$ (où $\iota \in \Gamma$ est l'élément universel). Donner une description explicite de (Γ, σ), et indiquer tous les choix possibles pour ι.

(c) En déduire que si une exponentielle $(E, e) = (Y, t)^{(X,s)}$ existe pour deux objets (X, s) et (Y, t), alors on a une bijection :

$$\mathcal{C}((\Gamma \times X, \sigma \times s), (Y, t)) \to E$$

(d) Sous les mêmes hypothèse que dans la question précédente, montrer qu'il y a une bijection $\lambda : Y^X \to E$ telle que $\lambda(t \circ f \circ s) = e(\lambda(f))$ pour tout $f \in Y^X$.

(e) Montrer que $\mathcal{C}$ est cartésienne fermée.

V.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un objet P de $\mathcal{C}$ est dit « projectif » si le foncteur $X \mapsto \mathcal{C}(P, X)$ de $\mathcal{C}$ vers $\mathbf{Ens}$ transforme tout épimorphisme en surjection. Il revient au même de dire que pour tout épimorphisme $f : X \to Y$, toute flèche $\varphi : P \to Y$ « se relève » le long de f (c'est-à-dire qu'il existe $\psi : P \to X$ telle que $f \circ \psi = \varphi$).

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"] \\ P \arrow[ur, dotted, "\psi"] \arrow[r, "\varphi"'] & Y \end{tikzcd}$$

(a) Montrer que tout objet isomorphe à un objet projectif est projectif.

On note $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ l'ensemble ordonné à deux éléments qu'on regarde comme une catégorie (à deux objets), et $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ le groupe à deux éléments qu'on regarde comme une catégorie (à un seul objet).

(b) Déterminer les objets projectifs dans $\mathbf{Ens}$, dans $\mathbf{Ens}^{\mathbf{2}}$ et dans $\mathbf{Ens}^G$. *(On admettra qu'une flèche f de $\mathbf{Ens}^{\mathbf{2}}$ (resp. $\mathbf{Ens}^G$) est un épimorphisme si et seulement si l'application f_X est surjective pour tout objet X de $\mathbf{2}$ (resp. G).)*

(c) Montrer que si les objets P et Q sont projectifs, leur somme $P + Q$, si elle existe, est un objet projectif.

Désormais, on suppose $\mathcal{C}$ cartésienne fermée. Un objet P de $\mathcal{C}$ est dit « intérieurement projectif » si le foncteur $X \mapsto X^P$ de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}$ transforme tout épimorphisme en épimorphisme.([1])

(d) Montrer que tout objet isomorphe à un objet intérieurement projectif est intérieurement projectif.

(e) Montrer que tout objet final est intérieurement projectif.

(f) Montrer que si tous les objets de $\mathcal{C}$ sont projectifs, alors ils sont tous intérieurement projectifs.

(g) Montrer que si P est projectif et Q intérieurement projectif, alors $P \times Q$ est projectif.

(h) Montrer que si l'objet final est projectif, tout objet intérieurement projectif est projectif.

1. On rappelle que ce foncteur envoie la flèche $f : X \to Y$ sur $f_* = \Lambda_P(f \circ \mathbf{ev}) : X^P \to Y^P$.

Problème 2

I.

Dans un topos, soit $f : X \to Y$ un monomorphisme, dont la flèche caractéristique est notée $\chi_f : Y \to \Omega$.

(a) Montrer que :([2])

$$\chi_f = \lfloor \exists_{x \in X}\ y = f[x] \rfloor_{(y \in Y)}$$

II.

Soit X un objet dans un topos $\mathcal{T}$. Soient $f : A \to X$ et $g : B \to X$ deux monomorphismes. On note $h : C \to X$ et $k : D \to X$ des monomorphismes dont les flèches caractéristiques χ_h et χ_k sont respectivement $\chi_f \vee \chi_g$ et $\chi_f \wedge \chi_g$.([3])

(a) Montrer qu'il existe des flèches α, β, γ et δ uniques telles que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "k"] \arrow[dd, "\beta"'] & & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[dd, "\gamma"] \\
& X & \\
B \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "\delta"'] & & C \arrow[ul, "h"']
\end{tikzcd}$$

et que ces flèches sont des monomorphismes.

(b) Montrer que le carré formé par les flèches α, β, γ et δ est cartésien.

(c) Montrer que le carré formé par les flèches α, β, γ et δ est cocartésien.([4])

III.

Soit $\mathcal{T}$ un topos. On rappelle que la flèche $\neg : \Omega \to \Omega$ (négation) est par définition $\lfloor x \Rightarrow \bot \rfloor_{(x \in \Omega)}$. La notation du langage interne $\neg[x]$ (où x est une variable de type Ω) pourra être abrégée en $\neg x$.

(a) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :([5])

- $\neg$ est un monomorphisme,
- $\neg$ est une involution,
- $\neg$ est un épimorphisme.

---

2. La notation $\lfloor E \rfloor_\Gamma$ représente la flèche du topos qui est l'interprétation du terme E du langage interne dans le contexte Γ.
3. On rappelle que l'opération $\wedge$ ci-dessus est la « conjonction externe » définie pour deux flèches $u : X \to \Omega$ et $v : X \to \Omega$ par la formule $u \wedge v = \lfloor u[x] \wedge v[x] \rfloor_{(x \in X)}$ (où le $\wedge$ qui apparaît dans le membre de droite est la conjonction du langage interne), et que $\vee$ est la « disjonction externe » définie de manière similaire par $u \vee v = \lfloor u[x] \vee v[x] \rfloor_{(x \in X)}$.
4. C'est-à-dire cartésien dans la catégorie opposée. Pour cette question on pourra utiliser le résultat de l'exercice **I.** ci-dessus et le principe de description.
5. On rappelle que l'équivalence $\neg E \Leftrightarrow \neg\neg\neg E$ est structurellement (intuitionnistiquement) démontrable. On ne demande pas de la redémontrer.

IV.

Soit $f : X \to Y$ un monomorphisme dans un topos $\mathcal{T}$.

(a) Soient a et b deux termes du langage interne de $\mathcal{T}$ tous deux de type X dans un même contexte Γ. Montrer que l'énoncé du langage interne $(f[a] = f[b]) \Rightarrow a = b$ est vrai dans le contexte Γ.([6])

On suppose désormais que $X = Y = \Omega$.

(b) Montrer que l'énoncé du langage interne de $\mathcal{T}$: $\forall_{q\in\Omega}\ f[q] \Rightarrow (f[\top] = q)$ est vrai dans le contexte vide.

(c) Même question pour l'énoncé $\forall_{q\in\Omega}\ f[f[q]] \Rightarrow q$.

(d) Même question pour l'énoncé $\forall_{q\in\Omega}\ f[q] \Rightarrow f[f[f[q]]]$.

(e) En déduire que tout monomorphisme de Ω vers lui-même est une involution.

(f) Que pensez-vous de l'affirmation : « *dans un topos quelconque $\mathcal{T}$, Ω est intérieurement fini* » ?

V.

Soit $\mathcal{C}$ la catégorie :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{0} \arrow[loop left, "1_{\mathbf{0}}"] \arrow[rr, "\beta\circ\alpha"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & \mathbf{2} \arrow[loop right, "1_{\mathbf{2}}"] \\
& \mathbf{1} \arrow[ur, "\beta"'] \arrow[loop below, "1_{\mathbf{1}}"] &
\end{tikzcd}$$

(a) Donner une description complète des préfaisceaux standard([7]) de $\hat{\mathcal{C}}$.

(b) Inventer une représentation graphique commode et non ambiguë pour les préfaisceaux d'ensembles sur $\mathcal{C}$, et représenter les préfaisceaux standard et les préfaisceaux $\mathbf{1}$ (objet final de $\hat{\mathcal{C}}$) et Ω (objet $\mathcal{P}(\mathbf{1})$ de $\hat{\mathcal{C}}$).

(c) Déterminer toutes les flèches de $\mathbf{1}$ vers Ω dans $\hat{\mathcal{C}}$ et en donner une description et/ou une représentation graphique.

6. On fera attention au fait que Γ est quelconque, et en particulier pas nécessairement vide.
7. Rappelons qu'il s'agit des préfaisceaux qui sont dans l'image du foncteur de Yoneda.

Problème 3

I.

On note $\mathcal{T}$ la catégorie des espaces topologiques et applications continues, et $\mathcal{O} : \mathcal{T}^{op} \to \mathbf{Ens}$ le foncteur qui à chaque espace topologique associe l'ensemble de ses ouverts, et à chaque application continue $f : X \to Y$ associe l'application image réciproque $\mathcal{O}(f) = f^{-1} : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$.

(a) Montrer que le foncteur $\mathcal{O}$ est représentable.

II.

On note $\mathbf{Ab}$ la catégorie des groupes abéliens et homomorphismes de groupes. Pour tout groupe abélien G, on note $\mathcal{S}(G)$ l'ensemble de ses sous-groupes.

(a) Montrer que les applications $G \mapsto \mathcal{S}(G)$ et $f \mapsto f^{-1}$ définissent un foncteur $\mathcal{S} : \mathbf{Ab}^{op} \to \mathbf{Ens}$.

(b) Montrer que si $\mathcal{S}$ a un classifiant Γ, alors tout élément de Γ est d'ordre 2.

(c) Montrer que le foncteur $\mathcal{S}$ n'est pas représentable.

III.

Soit $\mathcal{T}$ un topos, et A un objet de $\mathcal{T}$. On rappelle que toute flèche $f : X \to A$ s'écrit $f = {E_f}^{\top} \circ \psi$, où E_f est la flèche $\lfloor \exists_{x\in X}\ y = f[x] \rfloor_{(y\in A)}$, et où ψ est un épimorphisme.([8])

(a) Soit $m : Z \to A$ un monomorphisme. Montrer qu'une flèche $f : X \to A$ se factorise à travers m si et seulement si ${E_f}^{\top}$ se factorise à travers m.

L'ensemble $\mathbf{Sub}(A)$ des sous-objets de A est un ensemble ordonné, et peut donc être vu comme une catégorie. On suppose que pour tout sous-objet S de A, on a choisi un monomorphisme $\tilde{S}$ représentant S.

(b) Montrer que l'application $S \mapsto \langle \tilde{S} \rangle$ se prolonge de façon unique un en foncteur $i : \mathbf{Sub}(A) \to \mathcal{T}/A$ (où $\langle \tilde{S} \rangle$ est la flèche $\tilde{S}$ vue comme un objet de $\mathcal{T}/A$).

(c) Montrer que le foncteur i de la question précédente a un adjoint à gauche.

IV.

Soit $\mathcal{T}$ un topos. On rappelle qu'une « relation d'ordre interne » sur un objet X de $\mathcal{T}$ est une flèche $\lfloor x \leq y \rfloor_{(x\in X)(y\in Y)} : X \times X \to \Omega$ (prédicat interne sur $X \times X$) pour laquelle les axiomes des ensembles ordonnés sont vrais dans le langage interne de $\mathcal{T}$. Par ailleurs, on a le foncteur $\mathcal{P} : \mathcal{T}^{op} \to \mathcal{T}$, et pour toute flèche $f : X \to Y$, on a la flèche $\exists_f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ (image directe) intérieurement adjointe à gauche de $\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$. Cette flèche est définie dans le langage interne de $\mathcal{T}$ par :

$$\exists_f = \lfloor \{y \in Y \mid \exists_{x\in X}\ y = f[x] \wedge x \in A\} \rfloor_{(A\in\mathcal{P}(X))}.$$

On rappelle que si u est un terme de type Y du langage interne de $\mathcal{T}$, interprétable dans le contexte $(x \in X)$, et t un terme interprétable dans le contexte $(y \in Y)$. Alors on a :

$$\lfloor t \rfloor_{(y\in Y)} \circ \lfloor u \rfloor_{(x\in X)} = \lfloor t[u/y] \rfloor_{(x\in X)}.$$

8. $\lfloor E \rfloor_{\Gamma}$ est la flèche de $\mathcal{T}$ qui est l'interprétation du terme E du langage interne dans le contexte Γ. $g^{\top}$ est le pullback de $\top : \mathbf{1} \to \Omega$ le long de g.

(a) Montrer que les applications $X \mapsto \mathcal{P}(X)$ et $f \mapsto \exists_f$ définissent un foncteur $\mathcal{P} : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$.

On pose :

$$\begin{array}{rcl} \eta_X & = & \lfloor \{x \in X \mid x = a\} \rfloor_{(a \in X)} \\ \mu_X & = & \lfloor \{x \in X \mid \exists_{U \in \mathcal{P}(X)}\ U \in F \wedge x \in U\} \rfloor_{(F \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)))} \end{array}$$

(b) Vérifier que les transformations $\eta : 1 \to \mathcal{P}$ et $\mu : \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ sont naturelles.

(c) Montrer que $(\mathcal{P}, \mu, \eta)$ est une monade sur $\mathcal{T}$.

Une algèbre sur la monade $(\mathcal{P}, \mu, \eta)$ sera appelée une $\mathcal{P}$-algèbre. On utilisera la notation $\{x_1, \dots, x_k\}$ pour $\{z \in X \mid z = x_1 \vee \dots \vee z = x_k\}$.

(d) Soit (X, h) une $\mathcal{P}$-algèbre. On note $x \leq y$ l'énoncé $h[\{x, y\}] = y$ du langage interne (dans le contexte $(x \in X)(y \in X)$). Montrer que :

- **(d.1)** $h[\{x\}] = x$ est vrai dans le contexte $(x \in X)$,
- **(d.2)** $x \in A \Rightarrow x \leq h[A]$ est vrai dans le contexte $(x \in X)(A \in \mathcal{P}(X))$,
- **(d.3)** la relation $\leq$ est une relation d'ordre interne sur X,
- **(d.4)** $A \subset B \Rightarrow h[A] \leq h[B]$ est vrai dans le contexte $(A \in \mathcal{P}(X))(B \in \mathcal{P}(X))$,
- **(d.5)** toute partie de X a une borne supérieure pour la relation d'ordre $\leq$.

(e) Montrer réciproquement que si $\leq$ est un ordre interne sur X, tel que toute partie de X ait une borne supérieure donnée par une flèche $h : \mathcal{P}(X) \to X$, alors (X, h) est une $\mathcal{P}$-algèbre.

Problème 4

I.

On considère la catégorie $\mathcal{C}$ suivante :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[loop left, "1_X"] \arrow[r, bend left, "\alpha"] \arrow[r, bend right, "\beta"'] & Y \arrow[loop right, "1_Y"] \end{tikzcd}$$

et soit M un monoïde qu'on considère comme une catégorie (à un seul objet).

(a) Montrer qu'il n'existe aucune paire de foncteurs adjoints entre ces deux catégories.

II.

On note $\mathcal{P} : \mathbf{Ens}^{op} \to \mathbf{Ens}$ le foncteur « ensemble des parties » qui associe à tout ensemble X son ensemble de parties $\mathcal{P}(X)$ et à toute application $f : X \to Y$ l'application « image réciproque par f » : $\mathcal{P}(f) = f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$. Pour toute partie A de X, on note $\gamma_X(A)$ le complémentaire de A dans X.

(a) Montrer que γ est une transformation naturelle de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{P}$.

(b) On pose $\mathbf{2} = \{\top, \bot\}$. On note $Q : \mathbf{Ens}^{op} \to \mathbf{Ens}$ le foncteur défini par $Q(X) = \mathbf{Ens}(X, \mathbf{2})$ et $Q(f) = f^*$. Montrer qu'il y a exactement quatre transformations naturelles de Q vers Q.

(c) En déduire qu'il existe exactement quatre transformations naturelles de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{P}$, qu'on identifiera explicitement.

III.

On note $\mathcal{P} : \mathbf{Ens}^{op} \to \mathbf{Ens}$ le foncteur qui envoie tout ensemble sur son ensemble de parties, et toute application $f : X \to Y$ sur l'application image réciproque $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$.

(a) Montrer que l'application $u : X \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ qui envoie $x \in X$ sur l'ultrafiltre trivial en x, c'est-à-dire telle que $u(x) = \{A \subset X \mid x \in A\}$ est un objet initial dans la comma-catégorie $X/\mathcal{P}$.

IV.

(a) Montrer que tout foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ qui crée les coégaliseurs (binaires) et reflète les limites finies est fidèle.

V.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie cartésienne fermée qui a un objet initial 0.

(a) Montrer que si X est un objet quelconque de $\mathcal{C}$, il n'y a qu'une seule flèche de $X \times 0$ vers $X \times 0$.

(b) En déduire que toute flèche de cible 0 est un isomorphisme.

(c) Montrer que si pour tout objet X, on a un isomorphisme $X \simeq 0^{(0^X)}$, alors deux flèches quelconques parallèles de $\mathcal{C}$ sont égales.

VI.

Soit $\mathcal{C}$ la catégorie dont les objets sont les paires (X, p), où X est un ensemble et $p : X \to X$ une application telle que $p \circ p = p$. Un morphisme $f : (X, p) \to (Y, q)$ est une application $f : X \to Y$ telle que $q \circ f = f \circ p$.

(a) Montrer que que le foncteur $F : \mathbf{Ens} \to \mathcal{C}$ défini par $F(X) = (X, 1_X)$ et $F(f) = f$, pour toute application $f : X \to Y$ a un adjoint à droite G.

(b) Montrer que G lui-même a un adjoint à droite.

VII.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie qui a un objet final $\mathbf{1}$. On note Γ le foncteur $\mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$ défini par $\Gamma(X) = \mathcal{C}(\mathbf{1}, X)$ sur les objets et $\Gamma(f) = f_*$ sur les flèches.

(a) Montrer que la comma-catégorie $\mathbf{Ens}/\Gamma$ a un objet final (qu'on notera $\mathbf{1}$).

On note $\Phi : \mathbf{Ens}/\Gamma \to \mathbf{Ens}$ le foncteur d'oubli.

(b) Montrer que le foncteur Φ est naturellement isomorphe au foncteur défini sur les objets par $\zeta \mapsto (\mathbf{Ens}/\Gamma)(\mathbf{1}, \zeta)$ et sur les flèches par $\lambda \mapsto \lambda_*$.

Problème 5

I.

On note $\Phi : \mathbf{Ens} \to \mathbf{Ens}$ *le foncteur qui envoie tout ensemble* X *sur l'ensemble* $X \times X$*, et toute application* $f : X \to Y$ *sur l'application* $f \times f : X \times X \to Y \times Y$.([9]) *On note* $I : \mathbf{Ens} \to \mathbf{Ens}$ *le foncteur identité de* $\mathbf{Ens}$.

(a) Montrer qu'il existe une et une seule transformation naturelle $I \to \Phi$.

(b) Montrer qu'il existe exactement deux transformations naturelles (distinctes) $\Phi \to I$.

II.

Un groupe abélien G *(noté additivement) est dit « divisible », si pour tout élément* $x \in G$*, et tout entier* $n > 0$*, il existe* $y \in G$ *tel que* $x = ny$ *(où* ny *est la somme* $y + \cdots + y$ *comprenant* n *fois* y*). On note* $\mathcal{D}$ *la sous-catégorie pleine de la catégorie* $\mathbf{Grp}$ *des groupes dont les objets sont les groupes divisibles.*

(a) Montrer que la projection canonique $\pi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ n'est pas un monomorphisme dans $\mathbf{Grp}$, mais en est un dans $\mathcal{D}$.

III.

(a) Montrer que toute petite catégorie est isomorphe à une sous-catégorie pleine d'un topos de faisceaux sur un site.

IV.

Soit $\mathcal{T}$ *un topos. Soit* $i : J \to \Omega$ *un monomorphisme tel que* $\top : \mathbf{1} \to \Omega$ *se relève le long de* i *en une flèche* $\lambda : \mathbf{1} \to J$*, c'est-à-dire que* $i \circ \lambda = \top$.

(a) Montrer que le carré suivant, où Δ est le morphisme diagonal, est cartésien :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "\langle \lambda, \langle\rangle \rangle"] \arrow[d, "\top"'] & J \times \mathbf{1} \arrow[d, "i \times \top"] \\
\Omega \arrow[r, "\Delta"'] & \Omega \times \Omega
\end{tikzcd}$$

(b) En déduire que si j est une topologie de Lawvere-Tierney sur $\mathcal{T}$, on a $\wedge \circ \langle j, 1_\Omega \rangle = 1_\Omega$.

V.

Soit A *un objet dans une catégorie* $\mathcal{C}$*, et* U *le foncteur d'oubli* $\mathcal{C}/A \to \mathcal{C}$.

(a) Montrer que U crée les colimites.

9. Définie par $(f \times f)(x, x') = (f(x), f(x'))$

VI.

Un « système dynamique discret » est un couple (X, φ), où X est un ensemble et φ est une application de X vers X, qu'on appelera la « dynamique » du système. On notera X ce système dynamique quand φ est sous-entendue. On notera d'ailleurs φ la dynamique de tous les systèmes. Un « morphisme » de (X, φ) vers (Y, φ) est une application $f : X \to Y$ telle que $\varphi \circ f = f \circ \varphi$. On notera $\mathcal{D}$ la catégorie des systèmes dynamiques discrets. Un point x de X est dit « périodique » s'il existe un entier naturel $k \neq 0$ tel que $\varphi^k(x) = x$.

(a) Montrer que $\mathcal{D}$ est un topos.

(b) Exhiber un objet Ω de $\mathcal{D}$ pouvant servir de classifiant du foncteur des sous-objets, et décrire les monomorphismes $\bot, \top : \mathbf{1} \to \Omega$ représentant les valeurs « faux » et « vrai ». Le topos $\mathcal{D}$ est-il bivalué ?([10])

(c) Soit (X, φ) un système dynamique à deux éléments dont l'un seulement est fixe par φ. Faire la liste de ses sous-systèmes et en déduire que le topos $\mathcal{D}$ n'est pas booléen.([11])

(d) Soit X un système dynamique discret. Expliquer pourquoi la négation $\neg : \mathbf{Sub}(X) \to \mathbf{Sub}(X)$ de l'algèbre de Heyting externe $\mathbf{Sub}(X)$ est l'application qui envoie un sous-système A sur le plus grand sous-système de X disjoint de A.

(e) Montrer que pour tout système dynamique (X, φ), l'algèbre de Heyting externe $\mathbf{Sub}(X)$ est une algèbre de Boole si et seulement si tous les points de X sont périodiques.

(f) Décrire la topologie de la double négation sur le topos des systèmes dynamiques discrets en donnant explicitement l'image par $\neg\neg$ de tous les éléments de Ω.

(g) Montrer qu'un système dynamique discret est un faisceau pour la topologie de la double négation si et seulement si sa dynamique est une bijection.

(h) Montrer que le topos des faisceaux de $\mathcal{D}$ pour la topologie de la double négation ne satisfait pas l'axiome du choix externe.([12])

(i) Trouver la faute dans le raisonnement suivant (dont la conclusion est clairement fausse) : D'après la question **(g)**, le système dynamique $(\mathbb{Z}, \varphi)$ (où $\varphi(x) = x + 1$) est un $\neg\neg$-faisceau. Le topos $\mathbf{Sh}_{\neg\neg}(\mathcal{D})$ est booléen, donc $\mathbf{Sub}((\mathbb{Z}, \varphi))$ est une algèbre de Boole, donc tout élément de $(\mathbb{Z}, \varphi)$ est périodique d'après la question **(e)**.

10. On rappelle qu'un topos $\mathcal{T}$ est bivalué si $\mathcal{T}(\mathbf{1}, \Omega)$ ne contient pas d'autres éléments que $\bot$ et $\top$.
11. On rappelle qu'un topos $\mathcal{T}$ est booléen si pour tout objet X de $\mathcal{T}$, l'algèbre de Heyting $\mathbf{Sub}(X)$ est une algèbre de Boole.
12. Rappelons qu'un topos $\mathcal{T}$ satisfait l'axiome du choix externe si et seulement si tout épimorphisme de $\mathcal{T}$ a une section.

Problème 6

I.

On note $\mathcal{P}$ le foncteur (covariant) de **Ens** *vers* **Ens** *envoyant tout ensemble sur son ensemble de parties, et toute application $f : X \to Y$ sur l'application image directe (existentielle) $f_\flat : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$.([13]) On note par ailleurs I le foncteur identité de* **Ens**.

(a) Déterminer toutes les transformations naturelles de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{I}$.

(b) Déterminer toutes les transformations naturelles de I vers $\mathcal{P}$.

(c) Mêmes questions **(a)** et **(b)** en remplaçant l'image directe existentielle $f_\flat$ par l'image directe universelle $f_\sharp : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$.([14])

II.

On note $\mathcal{C}$ la catégorie dont les objets sont les couples (X, p) où X est un ensemble et $p : X \to X$ un projecteur, c'est-à-dire une application telle que $p \circ p = p$. Une flèche de (X, p) vers (Y, q) est une application $f : X \to Y$ telle que $q \circ f = f \circ p$. On note $\mathcal{U} : \mathcal{C} \to$ **Ens** *le foncteur d'oubli envoyant (X, p) sur X et $f : (X, p) \to (Y, q)$ sur $f : X \to Y$.*

(a) Montrer que $\mathcal{U}$ crée strictement les limites.

III.

On note **1** *la catégorie à un seul objet et une seule flèche et $C : \mathbf{1} \to$* **Ens** *le foncteur envoyant l'unique objet de* **1** *sur un ensemble singleton S. On note I le foncteur identité de* **Ens**. *On note σ l'objet $\langle 1 \rangle_S^S$ de la comma-catégorie C/I ($= S/I = S/$* **Ens***), représenté par la flèche identité de S.*

(a) Montrer que la somme $\sigma + \sigma$ existe dans C/I et est isomorphe à σ.

(b) En déduire que le foncteur d'oubli $\mathcal{V} : C/I \to$ **Ens** (envoyant l'objet $\langle f \rangle_X^S$ représenté par la flèche $f : S \to X$ sur X) ne préserve pas et ne crée pas les colimites.

(c) Montrer que $\mathcal{V} : C/I \to$ **Ens** reflète les colimites.

IV.

On reprend la catégorie $\mathcal{C}$ de l'exercice **II**, *et on considère le foncteur $F : (\mathcal{C}^{op})^{op} \to$* **Ens** *envoyant tout objet (X, p) sur l'ensemble $\{x \in X \mid p(x) = x\}$, et envoyant la flèche $f : (X, p) \to (Y, q)$ sur la restriction de f à $F((X, p))$.*

(a) Vérifier que la définition de F est correcte.

(b) Montrer que F est représentable.

V.

On considère une catégorie $\mathcal{C}$ qui n'a que deux objets (distincts) X et Y, deux flèches $f, g : X \to Y$, plus les flèches identité de X et Y. Soit $S = \{*\}$ un singleton de **Ens**.

(a) Montrer que l'unique foncteur $F : \mathcal{C}^{op} \to$ **Ens** qui envoie X et Y sur S n'est pas représentable.

---

13. Par définition, $f_\flat(A) = \{y \in Y \mid \exists_{x \in X}\ y = f(x) \wedge x \in A\}$ (image directe existentielle).
14. Par définition, $f_\sharp(A) = \{y \in Y \mid \forall_{x \in X}\ y = f(x) \Rightarrow x \in A\}$ (image directe universelle).

VI.

Soient a et b deux entiers relatifs. On considère les applications $x \mapsto x + a$, $x \mapsto x + b$ et $x \mapsto x$ de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}$.

(a) Déterminer le nombre d'éléments dans un coégaliseur de ces trois flèches.

Problème 7

I.

Dans une catégorie $\mathcal{C}$ on considère le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[r, "\pi_4"] \arrow[d, shift right, bend right, "f_2"'] \arrow[d, shift left, bend left, "g_2"] & C \arrow[d, shift right, bend right, "f_3"'] \arrow[d, shift left, bend left, "g_3"] \\
D \arrow[r, shift left, bend left, "f_5"] \arrow[r, shift right, bend right, "g_5"'] \arrow[d, "\pi_1"'] & E \arrow[r, "\pi_5"] \arrow[d, "\pi_2"] & F \arrow[d, "\pi_3"] \\
G \arrow[r, shift left, bend left, "f_6"] \arrow[r, shift right, bend right, "g_6"'] & H \arrow[r, "\pi_6"'] & K
\end{tikzcd}$$

qui devient commutatif quand on retire les flèches f_i. De même, il devient commutatif quand on retire les flèches g_i. On suppose de plus que pour $i = 3$ et $i = 5$, π_i est un coégaliseur de f_i et g_i, que $\pi_2 \circ f_2 = \pi_2 \circ g_2$, et que les flèches π_1, π_2 et π_4 sont des épimorphismes.

(a) Montrer que $\pi_6 \circ f_6 = \pi_6 \circ g_6$ et que π_6 est un coégaliseur de f_6 et g_6.

II.

(a) Trouver un coégaliseur

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift left, bend left, "f"] \arrow[r, shift right, bend right, "g"'] & Y \arrow[r, "\pi"] & Z
\end{tikzcd}$$

dans **Ens**, tel que

$$\begin{tikzcd}
X \times X \arrow[r, shift left, bend left, "f \times f"] \arrow[r, shift right, bend right, "g \times g"'] & Y \times Y \arrow[r, "\pi \times \pi"] & Z \times Z
\end{tikzcd}$$

ne soit pas un coégaliseur.

III.

Soit $\mathcal{T}$ un topos, et soit $f : X \to \Omega$ un prédicat interne de $\mathcal{T}$.

(a) Démontrer structurellement l'énoncé $\neg(f(x) = \neg f(x))$ du langage interne de $\mathcal{T}$ dans le contexte $(x \in X)$.

(b) Montrer que le sommet d'un cône limite sur le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[loop right, "\neg"]
\end{tikzcd}$$

est un objet initial.

IV.

(a) Montrer que la catégorie à deux objets E et B, librement engendrée par les flèches $r : B \to E$ et $s : E \to B$ telles que $s \circ r = 1_B$ a exactement cinq flèches. Cette catégorie sera notée $\mathcal{C}$.

On représentera graphiquement un préfaisceau ζ sur $\mathcal{C}$ en plaçant les éléments de $\zeta(E)$ sur une ligne supérieure et les éléments de $\zeta(B)$ sur une ligne inférieure. Les flèches $\zeta(s)$ (montante) et $\zeta(r)$ (descendante), seules représentées dans le dessin, n'ont alors pas besoin d'être labélisées.

(b) Représenter (en justifiant le résultat) l'objet final $\mathbf{1}$ et le classifiant $(\Omega, \top)$ du foncteur des sous-objets dans le topos de préfaisceaux $\hat{\mathcal{C}}$.

(c) Montrer que Ω est isomorphe à $\hat{E} + \hat{B}$.

(d) Montrer qu'il y a exactement trois topologies de Grothendieck sur $\mathcal{C}$.

(e) Montrer qu'un objet ζ de $\hat{\mathcal{C}}$ est un faisceau pour la topologie dense si et seulement si $\zeta(s)$ est une bijection.

V.

Soit $\mathcal{T}$ un topos, et $f, g : X \to Y$ deux flèches parallèles de $\mathcal{T}$. On note E l'énoncé $\forall_{x \in X}\ f(x) \in S \Leftrightarrow g(x) \in S$ du langage interne de $\mathcal{T}$, interprétable dans le contexte $(S \in \mathcal{P}(Y))$, et on considère le carré cartésien :([15])

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "j"'] & \mathbf{1} \arrow[d, "\top"] \\ \mathcal{P}(Y) \arrow[r, "\lfloor E \rfloor_{(S \in \mathcal{P}(Y))}"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

(a) Donner une interprétation intuitive (ensembliste) de A, et montrer que j est un égaliseur de $\mathcal{P}(f)$ et $\mathcal{P}(g)$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "j"] & \mathcal{P}(Y) \arrow[r, shift left, "\mathcal{P}(f)"] \arrow[r, shift right, "\mathcal{P}(g)"'] & \mathcal{P}(X) \end{tikzcd}$$

(b) Montrer que si $\pi : Y \to Q$ est un coégaliseur de f et g, $\mathcal{P}(\pi)$ est un monomorphisme et les sous-objets de $\mathcal{P}(Y)$ représentés par j et $\mathcal{P}(\pi)$ sont égaux. En déduire une interprétation intuitive de A comme ensemble de parties.

On considère la flèche $\gamma : Y \to \mathcal{P}(Y)$ qui est l'interprétation du terme

$$\{y' \in Y \mid \forall_{S \in \mathcal{P}(Y)}\ (E \wedge (y \in S)) \Rightarrow y' \in S\}$$

dans le contexte $(y \in Y)$.([16])

(c) Donner une interprétation intuitive de $\gamma(y)$, et montrer que γ se relève le long de j en une (unique) flèche $\theta : Y \to A$.

Soit $\varphi : Y \to Z$ une flèche telle que $\varphi \circ f = \varphi \circ g$. On note k la flèche qui est l'interprétation du terme $\{y \in Y \mid \varphi(y) = \varphi(y_0)\}$ dans le contexte $(y_0 \in Y)$.

(d) Donner une interprétation intuitive de $k(y_0)$, et démontrer structurellement l'énoncé $E[k(y_0)/S]$ dans le contexte $(y_0 \in Y)$.

(e) Démontrer structurellement l'énoncé $\forall_{y \in Y}\ y \in \gamma(y_0) \Rightarrow y \in k(y_0)$ dans le contexte $(y_0 \in Y)$, et interpréter intuitivement le résultat.

On note $Y \xrightarrow{\rho} \mathrm{Im}(\theta) \xrightarrow{i} A$ la décomposition de θ en un épimorphisme ρ suivi d'un monomorphisme i.

(f) Montrer que ρ est un coégaliseur de f et g.

15. On rappelle que la flèche $\lfloor E \rfloor_\Gamma$ de $\mathcal{T}$ est l'interprétation du terme E du langage interne de $\mathcal{T}$ dans le contexte Γ.
16. On rappelle que E peut avoir des occurrences libres de S.

Problème 8

I

Soit $\mathcal{V}$ la catégorie des espaces vectoriels réels (avec les applications $\mathbb{R}$-linéaires pour flèches). On considère le foncteur $D : \mathcal{V}^{op} \to \mathcal{V}$ qui envoie tout objet de $\mathcal{V}$ sur son dual, et toute application linéaire sur sa transposée.

(a) Montrer que D^{op} est adjoint à gauche de D.

(b) Déterminer l'unité et la co-unité de l'adjonction $D^{op} \dashv D$.

Soit $\mathcal{V}_f$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{V}$ dont les objets sont les espaces de dimension finie.

(c) Montrer que D envoie $\mathcal{V}_f^{op}$ dans $\mathcal{V}_f$, et est une équivalence de catégories de $\mathcal{V}_f^{op}$ vers $\mathcal{V}_f$.

II

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Une classe d'isomorphismes d'objets de $\mathcal{C}$ sera appelée un « cardinal » de $\mathcal{C}$. Le cardinal d'un objet X (i.e. sa classe d'isomorphisme) sera noté $|X|$. Le fait qu'il existe un monomorphisme $m : X \to Y$ sera noté $|X| \leq |Y|$. Si on a $|X| \leq |Y|$ et s'il n'existe pas d'isomorphisme entre X et Y, on écrira $|X| < |Y|$.

(a) Montrer que $\leq$ est une relation de préordre bien définie entre cardinaux de $\mathcal{C}$.

(b) Montrer que dans le topos $\hat{\mathbf{2}}$ (où $\mathbf{2}$ est l'ensemble ordonné $\{0, 1\}$ vu comme une catégorie), la relation $\leq$ entre cardinaux n'est pas antisymétrique.

Dans tout topos, l'objet final est noté $\mathbf{1}$, et la somme $\mathbf{1} + \cdots + \mathbf{1}$ (n termes) est notée $\mathbf{n}$. Le cardinal de $\mathbf{n}$ est noté n. Le cardinal de l'objet initial $\mathbf{0}$ est noté 0.

(c) Montrer que dans $\hat{\mathbf{2}}$, il existe, pour tout entier n, un et un seul cardinal α tels que $n < \alpha < n + 1$.

(d) Trouver un topos booléen dans lequel il existe un cardinal α tel que $0 < \alpha < 1$.

(e) Montrer que dans tout topos, si deux sous-objets de $\mathbf{1}$ sont isomorphes, alors ils sont égaux.

(f) Déduire de **(e)** que dans tout topos booléen dans lequel il existe un cardinal α tel que $0 < \alpha < 1$, il existe un cardinal β, distinct de α, tel que $0 < \beta < 1$.

III

Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur, où $\mathcal{C}$ est une petite catégorie. On note $\hat{\mathcal{C}}$ la catégorie $\mathbf{Ens}^{\mathcal{C}^{op}}$ des préfaisceaux d'ensembles sur $\mathcal{C}$.

(a) Montrer que si on pose, pour toute flèche $\sigma : A \to B$ de $\mathcal{C}$ et toute flèche $f : X \to Y$ de $\mathcal{D}$:

- $S(X)(A) = \mathcal{D}(F(A), X)$,
- $S(X)(\sigma) = F(\sigma)^* : \mathcal{D}(F(B), X) \to \mathcal{D}(F(A), X)$,
- $S(f)(A) = f_* : \mathcal{D}(F(A), X) \to \mathcal{D}(F(A), Y)$,

on définit un foncteur $S : \mathcal{D} \to \hat{\mathcal{C}}$.

(b) Montrer que si on pose $(\theta_B)_A(\sigma) = F(\sigma)$ pour toute flèche $\sigma : A \to B$ de $\mathcal{C}$, on définit une transformation naturelle $\theta : \mathcal{Y} \to S \circ F$, où $\mathcal{Y} : \mathcal{C} \to \hat{\mathcal{C}}$ est le plongement de Yoneda.

On suppose désormais que $\mathcal{D}$ a toutes les petites colimites.

(c) Montrer que S a un adjoint à gauche $R : \hat{\mathcal{C}} \to \mathcal{D}$.

(d) Soit $\alpha \in \hat{\mathcal{C}}(\hat{A}, S(X))$ et $\sigma \in \mathcal{C}(B, A)$. Montrer que $\alpha_A(1_A) \circ F(\sigma) = \alpha_B(\sigma)$.

(e) En déduire que pour $\alpha \in \hat{\mathcal{C}}(\hat{A}, S(X))$ on a $S(\alpha_A(1_A)) \circ S(\varepsilon_{F(A)}) \circ SR(\theta_A) \circ \eta_{\hat{A}} = \alpha$ (où η et ε sont l'unité et la co-unité de l'adjonction $R \dashv S$).

(f) En déduire que la transformation naturelle $\varepsilon F \circ R\theta : R \circ \mathcal{Y} \to F$ est un isomorphisme (où ε est la co-unité de l'adjonction $R \dashv S$).

IV

Soit X un objet dans un topos $\mathcal{T}$, et soit une flèche $r : X \times X \to \Omega$. Les deux composantes du pullback $r^\top : C \to X \times X$ de $\top : \mathbf{1} \to \Omega$ le long de r, seront notées α et β. On a donc le carré cartésien :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d, "\langle \alpha, \beta \rangle"'] & \mathbf{1} \arrow[d, "\top"] \\ X \times X \arrow[r, "r"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

(a) Montrer que dans le contexte $(x \in X)(y \in X)$, les trois énoncés suivants du langage interne de $\mathcal{T}$ sont équivalents :

- $r(x, y)$
- $\exists_{c \in C}\ \alpha(c) = x \wedge \beta(c) = y$
- $\exists!_{c \in C}\ \alpha(c) = x \wedge \beta(c) = y$

(b) Montrer que l'énoncé $\forall_{x \in X}\ r(x, x)$ est vrai dans le contexte vide si et seulement si α et β ont une section commune (c'est-à-dire s'il existe une flèche $\sigma : X \to C$ telle que $\alpha \circ \sigma = 1_X$ et $\beta \circ \sigma = 1_X$).

(c) Montrer que l'énoncé $\forall_{x \in X}\ \forall_{y \in X}\ r(x, y) \Rightarrow r(y, x)$ est vrai dans le contexte vide si et seulement s'il existe une flèche $\varphi : C \to C$ telle que $\alpha \circ \varphi = \beta$ et $\beta \circ \varphi = \alpha$.

On définit l'objet K et les flèches u et v en imposant au carré

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & C \arrow[d, "\alpha"] \\ C \arrow[r, "\beta"'] & X \end{tikzcd}$$

d'être cartésien.

(d) Montrer que l'énoncé $\forall_{x \in X}\ \forall_{y \in X}\ \forall_{z \in X}\ (r(x, y) \wedge r(y, z)) \Rightarrow r(x, z)$ est vrai dans le contexte vide si et seulement s'il existe une flèche $\psi : K \to C$ telle que $\alpha \circ \psi = \alpha \circ v$ et $\beta \circ \psi = \beta \circ u$.

Solutions

Problème 1

I.

(a) Considérons la diagonale k-aire $\Delta_k : X \to X^k$, définie par $x \mapsto (x, \dots, x)$. On a clairement $\Delta_k = (\Delta_{k-1} \times 1) \circ \Delta_2$.([17]) On peut supposer par hypothèse de récurrence que Δ_{k-1} a une adjointe à gauche $\sup_{k-1}$. Les adjonctions étant compatibles avec la composition et $\times$, on voit que Δ_k a une adjointe à gauche $\sup_k = \sup_2 \circ (\sup_{k-1} \times 1)$. On a de même une adjointe à droite $\inf_k$. Comme X est fini, on a $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ et donc $\sup(x_1, \dots, x_n)$ est un plus grand élément de X. On a de même un plus petit élément.

Il reste à prouver que l'application $x \mapsto x \wedge a$, c'est-à-dire $x \mapsto \inf(x, a)$ a une adjointe à droite pour tout $a \in X$. Pour tout $y \in X$, posons $a \Rightarrow y = \sup(S_y)$ avec $S_y = \{x \in X \mid x \wedge a \leq y\}$, ce qui a un sens puisque tout sous-ensemble de X est fini. Si on a $x \wedge a \leq y$, alors $x \in S_y$, donc $x \leq \sup(S_y) = a \Rightarrow y$. Réciproquement, si $x \leq a \Rightarrow y$, alors $x \wedge a \leq (a \Rightarrow y) \wedge a$, puisque $\wedge$, comme adjointe, est croissante. Il suffit donc de prouver que $(a \Rightarrow y) \wedge a \leq y$ (modus ponens !), c'est-à-dire que $\sup(S_y) \in S_y$. Comme $\wedge$ est distributif sur $\vee$, on déduit $(u \vee v) \wedge a \leq y$ de $u \wedge a \leq y$ et $v \wedge a \leq y$. Autrement-dit, S_y est stable par $\vee$. Comme S_y est fini, on en déduit que $\sup(S_y)$ qui est le $\vee$ de tous les éléments de S_y appartient à S_y.

II.

(a) $\{a\}^*$ est un sous-ensemble de $\{a, b\}^*$, et l'opération de concaténation dans $\{a\}^*$ est évidemment la restriction de celle de $\{a, b\}^*$. En conséquence, les inclusions canoniques i_1 et i_2 sont des morphismes de monoïdes. Pour montrer que le cocône de l'énoncé est une somme, considérons un cocône :

$$\{a\}^* \xrightarrow{f} M \xleftarrow{g} \{b\}^*$$

quelconque. Il s'agit de montrer qu'il existe un unique morphisme de monoïdes $\varphi : \{a, b\}^* \to M$ tel que $\varphi \circ i_1 = f$ et $\varphi \circ i_2 = g$. On est obligé de poser $\varphi(a) = f(a)$ et $\varphi(b) = f(b)$. Un mot quelconque $x_1 \dots x_k$ de $\{a, b\}^*$ est alors nécessairement envoyé sur $\varphi(x_1) \dots \varphi(x_k)$. Ceci définit correctement φ car tout mot est d'une façon unique une concaténation de lettres. C'est de plus un morphisme de monoïdes, puisque :

$$\varphi(x_1 \dots x_k y_1 \dots y_l) = \varphi(x_1) \dots \varphi(x_k) \varphi(y_1) \dots \varphi(y_l) = \varphi(x_1 \dots x_k) \varphi(y_1 \dots y_l)$$

(b) $i_1, i_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sont encore des morphismes de monoïdes (additifs). Soit

$$\mathbb{N} \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} N$$

un cocône quelconque où C est un monoïde commutatif (additif). Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on a $(p, q) = (p, 0) + (0, q)$. On doit donc poser $\varphi(p, q) = f(p) + g(q)$. Il est clair qu'on a alors un morphisme de monoïdes $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to C$.

(c) Si le foncteur d'inclusion de la catégorie des monoïdes commutatifs dans celle des monoïdes avait un adjoint à droite, il préserverait les colimites, donc en particulier les sommes. On remarque que $\mathbb{N}$ est isomorphe comme monoïde à $\{a\}^*$, et donc que la somme de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$ dans la catégorie des monoïdes est un mononoïde non commutatif, qui ne peut donc pas être isomorphe à un objet dans l'image du foncteur d'inclusion. Ce dernier ne préserve donc pas les sommes.

17. Pour obtenir k exemplaires de x, on duplique d'abord x, puis on "$(k-1)$-plique" l'un des deux exemplaires.

III.

Soient $u, v : Y \to X$ deux flèches quelconques, telle que $\langle \alpha, \beta \rangle \circ u = \langle \alpha, \beta \rangle \circ v$. On doit montrer que $u = v$. On a $\langle \alpha \circ u, \beta \circ u \rangle = \langle \alpha \circ v, \beta \circ v \rangle$, donc $\alpha \circ u = \alpha \circ v$ et $\beta \circ u = \beta \circ v$. Comme $f \circ \alpha = g \circ \beta$, on a $f \circ \alpha \circ u = g \circ \beta \circ u = g \circ \beta \circ v$. Le carré étant cartésien, il existe une unique flèche $\varphi : Y \to X$ telle que $\alpha \circ \varphi = \alpha \circ u$ et $\beta \circ \varphi = \beta \circ v$. Or u et v ont toutes les deux cette propriété, donc $u = v$.

IV.

(a) Notons $\mathbf{1} = \{*\}$ un ensemble à un seul élément. L'objet $(\mathbf{1}, 1)$ est final dans $\mathcal{C}$. En effet, pour tout objet (X, s), il y a une seule application $f : X \to \mathbf{1}$ et elle satisfait évidemment $1 \circ f = f \circ s$.

Si (X, s) et (Y, t) sont deux objets de $\mathcal{C}$, on pose $(X, s) \times (Y, t) = (X \times Y, s \times t)$ (avec $(s \times t)(x, y) = (s(x), t(y))$). Les projections π_1 et π_2 sont celle du produit d'ensembles $X \times Y$. On a bien sûr $s \circ \pi_1 = \pi_1 \circ (s \times t)$. Si $f : (Z, u) \to (X, s)$ et $g : (Z, u) \to (Y, t)$ sont données, la seule flèche $\langle f, g \rangle : (Z, u) \to (X \times Y, s \times t)$ telle que $\pi_1 \circ \langle f, g \rangle = f$ et $\pi_2 \circ \langle f, g \rangle = g$ est bien sûr définie par $\langle f, g \rangle(z) = (f(z), g(z))$, et on a clairement $(s \times t) \circ \langle f, g \rangle = \langle f, g \rangle \circ u$. $\mathcal{C}$ est donc cartésienne.

(b) Il s'agit de trouver un ensemble Γ muni d'une involution σ tel qu'on ait une bijection naturelle en (X, s) :

$$\mathcal{C}^{op}((X, s), (\Gamma, \sigma)) \xrightarrow{\theta} X$$

c'est-à-dire :

$$\mathcal{C}((\Gamma, \sigma), (X, s)) \xrightarrow{\theta} X$$

Autrement-dit, les éléments de X doivent être en bijection avec les application $f : \Gamma \to X$ telles que $s \circ f = f \circ \sigma$. Il suffit de prendre $\Gamma = \{a, b\}$ avec $\sigma(a) = b$ (et donc $\sigma(b) = a$), et de poser $\theta(f) = f(a)$, pour toute $f : (\Gamma, \sigma) \to (X, s)$. θ est bijective, car pour $x \in X$, en posant $f(a) = x$ et $f(b) = s(x)$, on obtient une flèche $f : (\Gamma, \sigma) \to (X, s)$ qui est bien sûr la seule qui vérifie $f(a) = x$ c'est-à-dire $\theta(f) = x$.

La naturalité de θ en (X, s), c'est-à-dire le fait que le carré :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}((\Gamma, \sigma), (X, s)) \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\varphi_*"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\
\mathcal{C}((\Gamma, \sigma), (Y, s)) \arrow[r, "\theta"] & Y
\end{tikzcd}$$

soit commutatif pour toute flèche $\varphi : (X, s) \to (Y, t)$ est immédiate, puisque $\varphi(\theta(f)) = \varphi(f(a)) = (\varphi \circ f)(a) = (\varphi_*(f))(a) = \theta(\varphi_*(f))$. L'élément universel est a, puisque dans le cas où $(X, s) = (\Gamma, \sigma)$, on a $\theta(1_{(\Gamma, \sigma)}) = 1_\Gamma(a) = a$. L'autre choix possible est b.

(c) On a la bijection $\theta : \mathcal{C}((\Gamma, \sigma), (E, e)) \to E$, donnée par $\theta(f) = f(a)$, et par définition de l'exponentielle, une bijection :

$$\mathcal{C}((\Gamma, \sigma) \times (X, s), (Y, t)) \xrightarrow{\Lambda_{(X,s)}} \mathcal{C}((\Gamma, \sigma), (Y, t)^{(X,s)})$$

On a donc une bijection $\mu = \theta \circ \Lambda_{(X,s)} : \mathcal{C}((\Gamma \times X, \sigma \times s), (Y, t)) \to E$.

(d) L'application $\xi : Y^X \to \mathcal{C}((\Gamma \times X, \sigma \times s), (Y, t))$ telle que $\xi(f)(a, x) = f(x)$ est bien définie, car on doit avoir $\xi(f)(b, x) = \xi(f)((\sigma \times s)(a, s(x))) = t(\xi(f)(a, s(x))) = t(f(s(x)))$ et est une bijection, car ξ^{-1} est donné par $\xi^{-1}(g) = x \mapsto g(a, x)$. En effet, $\xi(x \mapsto g(a, x))(a, x) = g(a, x)$ et $x \mapsto \xi(f)(a, x) = x \mapsto f(x) = f$.

Posons $\lambda = \mu \circ \xi$. On a $\xi(t \circ f \circ s)(a,x) = t(f(s(x))) = \xi(f)(b,x) = (\xi(f) \circ (\sigma \times 1))(a,x)$, donc :

$$\begin{array}{rcl} \lambda(t \circ f \circ s) & = & \theta(\Lambda_{(X,s)}(\xi(f) \circ (\sigma \times 1))) \\ & = & \theta(\Lambda_{(X,s)}(\xi(f)) \circ \sigma) \\ & = & \theta(e \circ \Lambda_{(X,s)}(\xi(f))) \\ & = & e(\Lambda_{(X,s)}(\xi(f))(a)) \\ & = & e(\theta(\Lambda_{(X,s)}(\xi(f)))) \\ & = & e(\lambda(f)) \end{array}$$

(e) Il y a juste à montrer que $\mathcal{C}$ a des exponentielles. La question précédente nous a expliqué comment les construire. On pose donc :

$$(Y,t)^{(X,s)} = (Y^X, e = f \mapsto t \circ f \circ s)$$

On définit également $\mathbf{ev} : (Y,t)^{(X,s)} \times (X,s) \to (Y,t)$ comme $(f,x) \mapsto f(x)$. C'est bien une flèche de $\mathcal{C}$ car $\mathbf{ev}(t \circ f \circ s, s(x)) = t(f(s(s(x)))) = t(f(x)) = t(\mathbf{ev}(f,x))$. Enfin, pour $f : (X,s) \times (Y,t) \to (Z,u)$ on définit $\Lambda_{(Y,t)}(f) : (X,s) \to (Z,u)^{(Y,t)}$ par $\Lambda_{(Y,t)}(f)(x) = y \mapsto f(x,y)$. Il s'agit encore d'une flèche de $\mathcal{C}$, puisque $\Lambda_{(Y,t)}(f)(s(x))(y) = f(s(x),y) = u(f(x,t(y))) = u(\Lambda_{(Y,t)}(f)(x)(t(y))) = (u \circ \Lambda_{(Y,t)}(f)(x) \circ t)(y)$. Il reste à vérifier les trois égalités qui caractérisent équationnellement les exponentielles. On a :

$$\begin{array}{rcl} (\mathbf{ev} \circ (\Lambda_{(Y,t)}(f) \times 1))(x,y) & = & \mathbf{ev}(f(x),y) \\ & = & f(x,y) \\ \Lambda_{(Y,t)}(\mathbf{ev})(f)(x) & = & \mathbf{ev}(f,x) \\ & = & f(x) \\ (\Lambda_{(Y,t)}(f) \circ \varphi)(\zeta)(x) & = & \Lambda_{(Y,t)}(f)(\varphi(\zeta))(x) \\ & = & f(\varphi(\zeta),x) \\ & = & (f \circ (\varphi \times 1))(\zeta,x) \\ & = & \Lambda_{(Y,t)}(f \circ (\varphi \times 1))(x) \end{array}$$

V.

(a) Soit P un objet projectif et $\varphi : P \to Q$ un isomorphisme. On a alors la bijection $\varphi_* : \mathcal{C}(P,X) \to \mathcal{C}(Q,X)$ pour tout objet X (d'inverse $(\varphi^{-1})_*$). Soit $f : X \to Y$ un épimorphisme. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(Q,X) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\varphi^*"'] & \mathcal{C}(Q,Y) \arrow[d, "\varphi^*"] \\ \mathcal{C}(P,X) \arrow[r, "f_*"'] & \mathcal{C}(P,Y) \end{tikzcd}$$

puisque pour toute flèche $\alpha : Q \to X$, on a $f_*(\varphi^*(\alpha)) = f \circ \alpha \circ \varphi = \varphi^*(f_*(\alpha))$. Comme les flèches verticales sont des bijections et celle du bas est surjective, celle du haut est surjective pour tout épimorphisme f, et Q est projectif.

(b) Dans **Ens** tous les objets sont projectifs. En effet, les épimorphismes de **Ens** sont les applications surjectives, et toute $f : X \to Y$ surjective a une section, c'est-à-dire une application $s : Y \to X$ telle que $f \circ s = 1_Y$. (Axiome du choix). Il en résulte que pour tout $\alpha : P \to Y$ on a $\alpha = f \circ s \circ \alpha = f_*(s \circ \alpha)$, ce qui montre que f_* est surjective.

Un objet F de $\mathbf{Ens^2}$ est un diagramme de la forme $F(0) \xrightarrow{F(i)} F(1)$ (où $i : 0 \to 1$, plus les deux flèches identité), c'est-à-dire juste une application entre deux ensembles. Une flèche f de $\mathbf{Ens^2}$ est une transformation naturelle entre deux tels diagrammes, c'est-à-dire un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} F(0) \arrow[r, "F(i)"] \arrow[d, "f_0"'] & F(1) \arrow[d, "f_1"] \\ G(0) \arrow[r, "G(i)"'] & G(1) \end{tikzcd}$$

C'est un épimorphisme si et seulement si f_0 et f_1 sont surjectives (admis). Prenons maintenant un objet projectif P de $\mathbf{Ens}^{\mathbf{2}}$. On va montrer que la flèche $P(i) : P(0) \to P(1)$ est injective. Considérons la flèche (f_0, f_1) suivante de $\mathbf{2} \xrightarrow{F(i)} \mathbf{2}$ vers $\mathbf{2} \xrightarrow{G(i)} \mathbf{1}$ dans $\mathbf{Ens}^{\mathbf{2}}$, où $F(i) = 1_{\mathbf{2}}$:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{2} \arrow[r, "F(i)"] \arrow[d, "1=f_0"'] & \mathbf{2} \arrow[d, "f_1"] \\ \mathbf{2} \arrow[r, "G(i)"'] & \mathbf{1} \end{tikzcd}$$

Si $P(0)$ n'a pas plus d'un élément, la flèche $P(0) \xrightarrow{P(i)} P(1)$ est injective. Sinon, soient x et y deux éléments de $P(0)$. Donnons-nous une flèche $\varphi : P \to G$, qui envoie x et y sur des éléments distincts dans $G(0) = \mathbf{2}$. Il y a alors une unique flèche $\psi_0 : P(0) \to F(0)$ telle que $f_0 \circ \psi_0 = \varphi_0$. Si les images de x et y dans $P(1)$ sont égales, il est impossible de trouver $\psi_1 : P(1) \to F(1)$ rendant le diagramme commutatif, car on devrait alors avoir $\psi_0(x) = \psi_0(y)$. Il en résulte que $P(i)$ est injective.

Réciproquement, supposons $P(i)$ injective. Soit $f : F \to G$ un épimorphisme quelconque et soit $\varphi : P \to G$ une flèche quelconque. On relève d'abord φ_0 le long de f_0 en ψ_0, ce qui est possible puisque f_0 est surjective. Si $y = \varphi_1(x) \in G(1)$, on pose $\psi_1(y) = F(i)(\psi_0(x))$. Sinon on choisit n'importe quel antécédent de y par f_1. Le diagramme obtenu est commutatif, et P est projectif.

Les éléments de $\mathbf{Ens}^G$ sont les ensembles munis d'une action du groupe G, et les flèches sont les applications équivariantes. Les projectifs sont les ensembles sur lesquels G agit librement. En effet, supposons que G agisse librement sur P, soit $f : F \to G$ une surjection équivariante et $\varphi : P \to G$ une application équivariante. On choisit un représentant dans chaque orbite de l'action de G sur P, et on envoie ce représentant sur un antécédent par f de son image par φ. Comme l'action sur P est libre, ceci se prolonge de façon unique en une application équivariante $\psi : P \to F$ telle que $f \circ \psi = \varphi$.

Réciproquement, supposons P projectif, et considérons l'unique application $G \to \mathbf{1}$, qui est équivariante et surjective (donc un épimorphisme). Une flèche $\varphi : P \to \mathbf{1}$ ne peut se relever que si les orbites dans P sont libres.

(c) Supposons P et Q projectifs. Soit $f : X \to Y$ un épimorphisme, et $\varphi : P + Q \to Y$ une flèche quelconque. Les composés $\varphi \circ i_1$ et $\varphi \circ i_2$ (où i_1 et i_2 sont les inclusions canoniques de la somme) se relèvent en $\psi_1 : P \to X$ et $\psi_2 : Q \to X$. On a donc $[\psi_1, \psi_2] : P+Q \to X$, et $f \circ [\psi_1, \psi_2] = [f \circ \psi_1, f \circ \psi_2] = [\varphi \circ i_1, \varphi \circ i_2] = \varphi \circ [i_1, i_2] = \varphi$. $P + Q$ est donc projectif.

(d) Soit P un objet intérieurement projectif, et $\varphi : P \to Q$ un isomorphisme. Alors $\varphi^* = \Lambda_P(\mathbf{ev} \circ (1 \times \varphi)) : X^Q \to X^P$ est un isomorphisme pour tout objet X. Soit $f : X \to Y$ un épimorphisme. Pour montrer que $f_* : Y^Q \to X^Q$ est un épimorphisme, il suffit de vérifier que le composé :

$$Y^P \xrightarrow{(\varphi^{-1})^*} Y^Q \xrightarrow{f_*} X^Q \xrightarrow{\varphi^*} X^P$$

est $f_* : Y^P \to X^P$. On a :

$$\begin{array}{rcl}\Lambda_P(\mathbf{ev}\circ(1\times\varphi))\circ\Lambda_Q(f\circ\mathbf{ev}) & = & \Lambda_P(\mathbf{ev}\circ(1\times\varphi)\circ(\Lambda_Q(f\circ\mathbf{ev})\times 1)) \\ & = & \Lambda_P(\mathbf{ev}\circ(\Lambda_Q(f\circ\mathbf{ev})\times 1)\circ(1\times\varphi)) \\ & = & \Lambda_P(f\circ\mathbf{ev}\circ(1\times\varphi))\end{array}$$

puis

$$\begin{array}{rl}\multicolumn{2}{l}{\Lambda_P(f\circ\mathbf{ev}\circ(1\times\varphi))\circ\Lambda_Q(\mathbf{ev}\circ(1\times\varphi^{-1}))} \\ = & \Lambda_P(f\circ\mathbf{ev}\circ(\Lambda_Q(\mathbf{ev}\circ(1\times\varphi^{-1}))\times\varphi)) \\ = & \Lambda_P(f\circ\mathbf{ev}\circ(1\times\varphi^{-1})\circ(1\times\varphi)) \\ = & \Lambda_P(f\circ\mathbf{ev})\end{array}$$

(e) Soit $\mathbf{1}$ un objet final. On a l'isomorphisme $\Lambda_{\mathbf{1}}(\pi_1) : X \to X^{\mathbf{1}}$. Soit $f : X \to Y$ un épimorphisme. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Lambda_{\mathbf{1}}(\pi_1)"] \arrow[d, "f"'] & X^{\mathbf{1}} \arrow[d, "\Lambda_{\mathbf{1}}(f\circ\mathbf{ev})"] \\ Y \arrow[r, "\Lambda_{\mathbf{1}}(\pi_1)"'] & Y^{\mathbf{1}} \end{tikzcd}$$

En effet,

$$\begin{array}{rcl}\Lambda_{\mathbf{1}}(f\circ\mathbf{ev})\circ\Lambda_{\mathbf{1}}(\pi_1) & = & \Lambda_{\mathbf{1}}(f\circ\mathbf{ev}\circ(\Lambda_{\mathbf{1}}(\pi_1)\times 1)) \\ & = & \Lambda_{\mathbf{1}}(f\circ\pi_1) \\ & = & \Lambda_{\mathbf{1}}(\pi_1\circ(f\times 1)) \\ & = & \Lambda_{\mathbf{1}}(\pi_1)\circ f\end{array}$$

ce qui montre que $\Lambda_{\mathbf{1}}(f\circ\mathbf{ev})$ est un épimorphisme.

(f) Soit P un objet quelconque et $f : X \to Y$ un épimorphisme. Il s'agit de montrer que $f_* : X^P \to Y^P$ est un épimorphisme. Comme $Y^P \times P$ est projectif, la flèche $\mathbf{ev} : Y^P \times P \to Y$ se relève le long de l'épimorphisme f, en une flèche $\psi : Y^P \times P \to X$, telle que $f\circ\psi = \mathbf{ev}$. On a donc $\Lambda_P(f\circ\psi) = \Lambda_P(\mathbf{ev}) = 1_{Y^P}$, et par ailleurs :

$$\begin{array}{rcl}\Lambda_P(f\circ\mathbf{ev})\circ\Lambda_P(\psi) & = & \Lambda_P(f\circ\mathbf{ev}\circ(\Lambda_P(\psi)\times 1)) \\ & = & \Lambda_P(f\circ\psi) \\ & = & 1\end{array}$$

Ainsi on voit que $f_* = \Lambda_P(f\circ\mathbf{ev})$ a une section. C'est donc un épimorphisme.

(g) Supposons P projectif et Q intérieurement projectif. Soit $f : X \to Y$ un épimorphisme, et $\varphi : P\times Q \to Y$ une flèche quelconque. Comme $f_* : X^Q \to Y^Q$ est un épimorphisme et P projectif, la flèche $\Lambda_Q(\varphi) : P \to Y^Q$ se relève le long de f_* en un flèche $\psi : P \to X^Q$ telle que $f_*\circ\psi = \Lambda_Q(\varphi)$. Mais alors :

$$\begin{array}{rcl}\varphi & = & \mathbf{ev}\circ(\Lambda_Q(\varphi)\times 1) \\ & = & \mathbf{ev}\circ((f_*\circ\psi)\times 1) \\ & = & \mathbf{ev}\circ(\Lambda_Q(f\circ\mathbf{ev}\circ(\psi\times 1))\times 1) \\ & = & f\circ\mathbf{ev}\circ(\psi\times 1)\end{array}$$

ce qui montre que φ se relève le long de f, donc que $P\times Q$ est projectif.

(h) Ceci résulte immédiatement de la question précédente et du fait que tout objet P est isomorphe à $\mathbf{1}\times P$.

Problème 2

I.

On sait (décomposition épi-mono) qu'en posant $E = \lfloor \exists_{x \in X}\ y = f[x] \rfloor_{(y \in Y)}$, on a un épimorphisme $\psi : X \to Z$ tel que $E^\top \circ \psi = f$, où Z est la source de $E^\top$.([18]) Mais comme f est un monomorphisme, cette égalité entraîne que ψ est un monomorphisme, donc un isomorphisme. Il en résulte que les monomorphismes f et $E^\top$ sont équivalents et ont donc même flèche caractéristique. Mais celle de $E^\top$ est E.

II.

(a) Posons $F = \chi_f$, $G = \chi_g$, $H = \chi_h$ et $K = \chi_k$. Ce sont des flèches de X vers Ω. On a par définition $H = F \vee G$ et $K = F \wedge G$. L'énoncé $K \Rightarrow F$ est vrai structurellement (intuitionnistiquement), c'est-à-dire qu'il se factorise à travers $\top : \mathbf{1} \to \Omega$. Il résulte donc de la sémantique de Kripke-Joyal pour l'implication que le sous-objet représenté par le monomorphisme k est inclus dans le sous-objet représenté par le monomorphisme f. Il est équivalent de dire que k se factorise à travers f, ce qui montre l'existence de la flèche α. Son unicité résulte du fait que f est un monomorphisme (i.e. est simplifiable à gauche). On traite de même les trois autres cas, qui résultent du fait que les énoncés $K \Rightarrow G$, $F \Rightarrow H$ et $G \Rightarrow H$ sont vrais structurellement. La flèche α est un monomorphisme car $f \circ \alpha = k$ en est un. Même chose pour β, γ et δ.

(b) Le carré est commutatif, car $h \circ \gamma \circ \alpha = f \circ \alpha = k = g \circ \beta = h \circ \delta \circ \beta$ et car h est un monomorphisme. Pour voir qu'il est cartésien, donnons-nous des flèches $u : Y \to A$ et $v : Y \to B$ telles que $\gamma \circ u = \delta \circ v$. On a alors $f \circ u = g \circ v$. Posons $\varphi = f \circ u = g \circ v$. On a $F \circ \varphi = \chi_f \circ f \circ u = \top \circ u = \top$. De même, $G \circ \varphi = \top$. En conséquence, $K \circ \varphi = (F \wedge G) \circ \varphi = \top$ d'après la sémantique de Kripke-Joyal pour $\wedge$. Il en résulte que φ se factorise à travers k en une flèche $\psi : Y \to D$. Comme on a $f \circ u = \varphi = k \circ \psi = f \circ \alpha \circ \psi$, et comme f est un monomorphisme, on voit que $u = \alpha \circ \psi$. On a de même $v = \beta \circ \psi$. L'unicité de ψ résulte du fait que α est un monomorphisme.

(c) Pour voir que le carré, dont on sait déjà qu'il est commutatif, est cocartésien, donnons-nous des flèches $u : A \to Z$ et $v : B \to Z$ telles que $u \circ \alpha = v \circ \beta$. Il s'agit de montrer qu'il existe une unique flèche $\psi : C \to Z$ telle que $\psi \circ \gamma = u$ et $\psi \circ \delta = v$. Si on est dans le topos des ensembles, la chose est évidente, car il s'agit simplement de montrer que si l'application $u : A \to Z$ est définie sur la partie A de X et l'application $v : B \to Z$ sur la partie B de X et sont telles que $u(x) = v(x)$ pour tout x de D qui n'est autre que $A \cap B$, alors u et v sont les restrictions à A et B d'une unique application définie sur $C = A \cup B$. Dans un topos quelconque, c'est plus compliqué car $C = A \cup B$ est défini via le connecteur additif $\vee$, et on sait que les constructions additives sont difficiles à exprimer dans le "langage machine" du topos. La façon élégante de s'en sortir est d'utiliser le langage interne, et de construire la flèche ψ à l'aide du principe de description.

Il s'agit de construire une flèche $\psi : C \to Z$ telle que les énoncés $\forall_{a \in A}\ \psi[\gamma[a]] = u[a]$ et $\forall_{b \in B}\ \psi[\delta[b]] = v[b]$ soient vrais dans le contexte vide. Or ces deux énoncés sont conséquences structurelles de :

$$\forall_{c \in C}\ (\forall_{a \in A}\ c = \gamma[a] \Rightarrow \psi[c] = u[a]) \wedge (\forall_{b \in B}\ c = \delta[b] \Rightarrow \psi[c] = v[b])$$

Par exemple, pour le premier, on déclare $a \in A$ et on particularise l'énoncé ci-dessus en faisant $c = \gamma[a]$. On obtient alors $\psi[\gamma[a]] = u[a]$. On traite de même l'autre énoncé. Il suffit donc d'après le principe de description de prouver structurellement l'énoncé :

$$\forall_{c \in C}\ \exists!_{z \in Z}\ (\forall_{a \in A}\ c = \gamma[a] \Rightarrow z = u[a]) \wedge (\forall_{b \in B}\ c = \delta[b] \Rightarrow z = v[b])$$

Soit donc $c \in C$. Par définition de h, l'énoncé $H[h[c]]$ est vrai dans le contexte $(c \in C)$. Autrement-dit, $F[h[c]] \vee G[h[c]]$ est vrai,dans le contexte $(c \in C)$. Raisonnons par cas. Dans le premier cas, on a $F[h[c]]$, c'est-à-dire $\exists_{a \in A}\ h[c] = f[a]$ d'après l'exercice **I**, donc $\exists_{a \in A}\ c = \gamma[a]$, puisque h est un monomorphisme. On a

18. $E^\top$ est le pullback de $\top : \mathbf{1} \to \Omega$ le long de E.

donc un a tel que $c = \gamma[a]$, et on pose $z = u[a]$. On satisfait ainsi la première condition. Quant à la seconde, soit $b \in B$ tel que $c = \delta[b]$. Pour montrer que $z = v[b]$ il suffit de montrer que $u[a] = v[b]$. Mais comme $\gamma[a] = c = \delta[b]$, le fait que notre carré soit cartésien donne (leçon 9, exercice 1, page 16) :

$$\exists!_{d\in D}\ \alpha[d] = a \wedge \beta[d] = b$$

d'où on déduit $u[a] = u[\alpha[d]] = v[\beta[d]] = v[b]$.

On traite de même l'autre cas (hypothèse $G[h[c]]$). On a donc prouvé :

$$\forall_{c\in C}\ \exists_{z\in Z}\ (\forall_{a\in A}\ c = \gamma[a] \Rightarrow z = u[a]) \wedge (\forall_{b\in B}\ c = \delta[b] \Rightarrow z = v[b])$$

et il reste à se préoccuper de l'unicité de z. On suppose donc qu'on a z et z' tels que les deux énoncés :

$$\begin{array}{ccc}(\forall_{a\in A}\ c = \gamma[a] \Rightarrow z = u[a]) & \wedge & (\forall_{b\in B}\ c = \delta[b] \Rightarrow z = v[b]) \\ (\forall_{a\in A}\ c = \gamma[a] \Rightarrow z' = u[a]) & \wedge & (\forall_{b\in B}\ c = \delta[b] \Rightarrow z' = v[b])\end{array}$$

soient vrais dans le contexte $(c \in C)(z \in Z)(z' \in Z)$. On a toujours l'hypothèse $F[h[c]] \vee G[h[c]]$, qui s'écrit :

$$(\exists_{a\in A}\ c = \gamma[a]) \vee (\exists_{b\in B}\ c = \delta[b])$$

De tous ces énoncés on déduit facilement (et structurellement) que $z = z'$.

III.

(a) Supposons que $\neg$ soit un monomorphisme. L'énoncé du langage interne $\forall_{x\in\Omega}\ \forall_{y\in\Omega}\ \neg x = \neg y \Rightarrow x = y$ est donc vrai dans le contexte vide. En particulier, en remplaçant x par $\neg\neg x$ et y par x, on obtient $\neg\neg\neg x = \neg x \Rightarrow \neg\neg x = x$. Comme la prémisse de cette dernière implication est structurellement démontrable, on en déduit que l'énoncé $\neg\neg x = x$ (c'est-à-dire $\neg[\neg[x]] = x$) est vrai dans le contexte $(x \in \Omega)$. mais ceci signifie que $\neg \circ \neg = 1_\Omega$, i.e. que $\neg$ est une involution.

Toute involution étant un isomorphisme (ayant lui-même comme inverse), on voit que $\neg \circ \neg = 1_\Omega$ entraine que $\neg$ est un épimorphisme.

Enfin, supposons que $\neg$ soit un épimorphisme. L'énoncé $\forall_{x\in\Omega}\ \exists_{y\in\Omega}\ x = \neg y$ est alors vrai dans le contexte vide. Soient $x \in \Omega$ et $y \in \Omega$. D'après l'énoncé précédent, il existe $u \in \Omega$ et $v \in \Omega$ tels que $x = \neg u$ et $y = \neg v$. Supposons $\neg x = \neg y$. On doit montrer que $x = y$. On a $\neg\neg u = \neg\neg v$, donc $\neg\neg\neg u = \neg\neg\neg v$, donc $\neg u = \neg v$, c'est-à-dire $x = y$. $\neg$ est donc un monomorphisme.

IV.

(a) Comme f est un monomorphisme, l'énoncé $\forall_{x\in X}\ \forall_{y\in X}\ f[x] = f[y] \Rightarrow x = y$ est vrai dans le contexte vide, donc dans tout contexte, donc dans le contexte Γ donné. D'après la sémantique de Kipke-Joyal pour $\forall$, l'énoncé $f[x] = f[y] \Rightarrow x = y$ est alors vrai dans le contexte $\Gamma(x \in X)(y \in X)$. On utilise pour finir deux fois la règle de remplacement pour conclure.

(b) Il suffit de raisonner structurellement : Soit $q \in \Omega$, tel que $f[q]$. Il s'agit de montrer que $f[\top] = q$, c'est-à-dire $f[\top] \Rightarrow q$ et $q \Rightarrow f[\top]$. Supposons d'abord que $f[\top]$, c'est-à-dire $f[\top] = \top$. Comme $f[q] = \top$ et comme f est un monomorphisme, on voit que $q = \top$ (question **(a)**) et on a donc q. Réciproquement, supposons q, on alors $q = \top$ donc $f[q] = f[\top]$, mais on sait que $f[q] = \top$. On a donc $f[\top] = \top$, c'est-à-dire $f[\top]$.

(c) Même méthode : Soit $q \in \Omega$, tel que $f[f[q]]$. En remplaçant q par $f[q]$ dans l'énoncé de la question précédente, on obtient $f[f[q]] \Rightarrow (f[\top] = f[q])$. On a donc $f[\top] = f[q]$, d'où $\top = q$ (question **(a)**), c'est-à-dire q.

(d) Même méthode : Soit $q \in \Omega$, tel que $f[q]$. On a donc $f[q] = \top$, et il suffit donc de prouver $f[f[\top]]$. Mais par **(b)**, on a $f[\top] = q$, donc $f[f[\top]] = f[q]$, d'où le résultat, puisque $f[q] = \top$.

(e) En remplaçant q par $f[q]$ dans **(c)**, et en utilisant **(d)**, on voit que $f[q] = f[f[f[q]]]$ est vrai dans le contexte $(q \in \Omega)$. Il en résulte d'après **(a)** que $q = f[f[q]]$ dans le contexte $(q \in \Omega)$. Or $\lfloor q \rfloor_{(q \in \Omega)} = 1_\Omega$, et $\lfloor f[f[q]] \rfloor_{(q \in \Omega)} = f \circ f$, et f est donc une involution.

(f) D'après Dedekind, un ensemble X est infini s'il existe une injection non surjective $X \to X$. On peut donc caractériser le fait que X est fini en demandant que toute injection $X \to X$ soit surjective. Dans le cas d'un topos quelconque, on peut donc définir la notion d'objet "intérieurement fini" X en demandant que tout monomorphisme $X \to X$ soit un épimorphisme. Les questions précédentes ont montré que c'est le cas de Ω. Cette condition peut bien sûr s'exprimer par un énoncé du langage interne, c'est pourquoi il convient de la qualifier d'"intérieure". Noter d'ailleurs qu'il existe des topos pour lesquels il y a une infinité de flèches de $\mathbf{1}$ vers Ω, par exemple le topos de préfaisceaux $\hat{\mathbb{N}}$. Ceci n'empêche pas Ω d'être "intérieurement fini". Il convient toutefois de remarquer qu'en mathématiques constructives il existe plusieurs définitions non équivalentes de la notion d'ensemble fini. On devrait donc peut-être préciser "intérieurement Dedekind fini".

V.

(a) Il y a trois préfaisceaux standard([19]) $\hat{\mathbf{0}}$, $\hat{\mathbf{1}}$ et $\hat{\mathbf{2}}$. Sur les objets de $\mathcal{C}$ ils donnent :

$$\begin{array}{lll} \hat{\mathbf{0}}(\mathbf{0}) = \mathcal{C}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = \{1_\mathbf{0}\} & \hat{\mathbf{1}}(\mathbf{0}) = \mathcal{C}(\mathbf{0},\mathbf{1}) = \{\alpha\} & \hat{\mathbf{2}}(\mathbf{0}) = \mathcal{C}(\mathbf{0},\mathbf{2}) = \{\beta \circ \alpha\} \\ \hat{\mathbf{0}}(\mathbf{1}) = \mathcal{C}(\mathbf{1},\mathbf{0}) = \emptyset & \hat{\mathbf{1}}(\mathbf{1}) = \mathcal{C}(\mathbf{1},\mathbf{1}) = \{1_\mathbf{1}\} & \hat{\mathbf{2}}(\mathbf{1}) = \mathcal{C}(\mathbf{1},\mathbf{2}) = \{\beta\} \\ \hat{\mathbf{0}}(\mathbf{2}) = \mathcal{C}(\mathbf{2},\mathbf{0}) = \emptyset & \hat{\mathbf{1}}(\mathbf{2}) = \mathcal{C}(\mathbf{2},\mathbf{1}) = \emptyset & \hat{\mathbf{2}}(\mathbf{2}) = \mathcal{C}(\mathbf{2},\mathbf{2}) = \{1_\mathbf{2}\} \end{array}$$

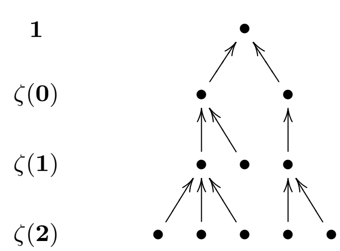
Comme tous les ensembles ci-dessus sont des singleton ou sont vides, les flèches sont déterminées sans qu'il soit nécessaire de les calculer.

(b) L'ensemble des flèches de la catégorie $\mathcal{C}$ est engendré (via la composition) par les deux flèches α et β. Se donner un préfaisceau ζ sur $\mathcal{C}$ est donc équivalent à se donner un triplet d'ensembles $(\zeta(\mathbf{0}), \zeta(\mathbf{1}), \zeta(\mathbf{2}))$, avec deux applications $\zeta(\alpha) : \zeta(\mathbf{1}) \to \zeta(\mathbf{0})$ et $\zeta(\beta) : \zeta(\mathbf{2}) \to \zeta(\mathbf{1})$, c'est-à-dire un diagramme de la forme :

$$\mathbf{1} \longleftarrow \zeta(\mathbf{0}) \xleftarrow{\zeta(\alpha)} \zeta(\mathbf{1}) \xleftarrow{\zeta(\beta)} \zeta(\mathbf{2})$$

puisque cela ne coute rien d'ajouter l'unique flèche de $\zeta(\mathbf{0})$ vers l'ensemble singleton $\mathbf{1} = \{*\}$.

On peut voir un tel diagramme comme un arbre à quatre niveaux de nœuds. Les applications du diagramme appliquent chaque nœud sur son "parent". Par exemple :



19. C'est-à-dire se trouvant dans l'image de plongement de Yoneda.

Les trois préfaisceaux standard calculés à la question précédente ont donc la représentation suivante :

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
* & * & * \\
1_{\mathbf{0}} \arrow[u] & \alpha \arrow[u] & \beta \circ \alpha \arrow[u] \\
& 1_{\mathbf{1}} \arrow[u] & \beta \arrow[u] \\
& & 1_{\mathbf{2}} \arrow[u] \\
\hat{\mathbf{0}} & \hat{\mathbf{1}} & \hat{\mathbf{2}}
\end{tikzcd}$$

Comme on le sait, dans un topos de préfaisceaux $\hat{\mathcal{C}}$, l'objet final est le foncteur constant envoyant tout objet de $\mathcal{C}$ sur le singleton $\mathbf{1}$ (et bien sûr toute flèche de $\mathcal{C}$ sur l'identité de $\mathbf{1}$). Le préfaisceau $\hat{\mathbf{2}}$ (qu'on notera aussi $\mathbf{1}$) est donc un objet final dans $\hat{\mathcal{C}}$.

Il reste donc à décrire le préfaisceau $\Omega = \mathcal{P}(\mathbf{1}) = \mathcal{P}(\hat{\mathbf{2}})$. On sait, par définition de $\mathcal{P}$, que $\mathcal{P}(\mathbf{1})(X) = \mathbf{Sub}(\hat{X})$ pour tout objet X de $\mathcal{C}$ (après qu'on ait identifié $\hat{X} \times \mathbf{1}$ avec $\hat{X}$). Par ailleurs, pour toute flèche $f : X \to Y$ de $\mathcal{C}$, la flèche $\mathcal{P}(\mathbf{1})(f) : \mathcal{P}(\mathbf{1})(Y) \to \mathcal{P}(\mathbf{1})(X)$ est $\mathbf{Sub}(\hat{f}) : \mathbf{Sub}(\hat{Y}) \to \mathbf{Sub}(\hat{X})$.([20]) Autrement-dit, l'application $\mathcal{P}(\mathbf{1})(f)$ envoie un élément de $\mathcal{P}(\mathbf{1})(Y)$, c'est-à-dire de $\mathbf{Sub}(\hat{Y})$, c'est-à-dire un sous-préfaisceau de $\hat{Y}$, sur son image réciproque par $\hat{f}$.

Les sous-préfaisceaux de $\hat{\mathbf{0}}$ sont au nombre de deux. Ce sont $\emptyset$ et $\hat{\mathbf{0}}$:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
* & * \\
& 1_{\mathbf{0}} \arrow[u] \\
\emptyset & \hat{\mathbf{0}}
\end{tikzcd}$$

De même, les sous-préfaisceaux de $\hat{\mathbf{1}}$ sont au nombre de trois, à savoir $\emptyset$, (un préfaisceau isomorphe à) $\hat{\mathbf{0}}$ et $\hat{\mathbf{1}}$ (avec les seules inclusions possibles), et ceux de $\hat{\mathbf{2}}$ au nombre de quatre, à savoir $\emptyset$, (un préfaisceau isomorphe à) $\hat{\mathbf{0}}$, (un préfaisceau isomorphe à) $\hat{\mathbf{1}}$ et $\hat{\mathbf{2}}$. La flèche $\hat{\alpha} : \hat{\mathbf{0}} \to \hat{\mathbf{1}}$ est la composition à gauche par α. Elle envoie $1_{\mathbf{0}}$ sur α. De même, $\hat{\beta}$ est la composition à gauche par β. Elle envoie α sur $\beta \circ \alpha$ et $1_{\mathbf{1}}$ sur β. Les branches de l'arbre Ω ci-dessous sont des représentations des applications images réciproques par $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$. Ω est donc l'arbre suivant :

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
* \\
\emptyset \arrow[u] & \hat{\mathbf{0}} \arrow[ul] \\
\emptyset \arrow[u] & \hat{\mathbf{0}} \arrow[u] & \hat{\mathbf{1}} \arrow[ul] \\
\emptyset \arrow[u] & \hat{\mathbf{0}} \arrow[u] & \hat{\mathbf{1}} \arrow[u] & \hat{\mathbf{2}} \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

(c) Il se trouve que l'objet final $\mathbf{1}$ de $\hat{\mathcal{C}}$ est aussi un préfaisceau standard.([21]) En conséquence, les flèches de $\mathbf{1} = \hat{\mathbf{2}}$ vers Ω sont les atomes de Ω de la sorte $\mathbf{2}$. Par le lemme de Yoneda, ils sont en bijection avec les éléments de sorte $\mathbf{2}$ de Ω, c'est-à-dire les éléments de $\mathcal{P}(\mathbf{1})(\mathbf{2}) = \mathbf{Sub}(\hat{\mathbf{2}})$. Il y a quatre tels éléments qui sont le sous-objet vide, le sous-objet isomorphe à $\hat{\mathbf{0}}$, le sous-objet isomorphe à $\hat{\mathbf{1}}$ et le sous objet plein de $\hat{\mathbf{2}}$. On les voit sur la dernière ligne du dessin ci-dessus.

20. Rappelons que $\mathbf{Sub}$ est contravariant, et que $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{Y}$, car le foncteur de Yoneda $\mathcal{Y} : \mathcal{C} \to \hat{\mathcal{C}}$ est covariant.
21. Ce n'est pas toujours le cas. Par exemple, ce n'est pas le cas pour le topos de graphes.

Problème 3

I.

(a) Il s'agit de montrer que $\mathcal{O}$ a un classifiant, c'est-à-dire de trouver un espace topologique Γ (le classifiant), dans lequel il y a un ouvert particulier ι (l'élément universel), tels que l'application :

$$\mathcal{T}(X,\Gamma) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$$

qui envoie l'application continue $f : X \to \Gamma$ sur l'ouvert $f^{-1}(\iota)$ soit une bijection.

Soit $S = \{*\}$ un singleton muni de son unique topologie. Comme la topologie de S est discrète, on a les bijections :

$$\Gamma \simeq \mathcal{T}(S,\Gamma) \simeq \mathcal{O}(S)$$

ce qui montre que l'ensemble (sous-jacent à) Γ a deux éléments. Il n'y a que quatre topologies possibles sur un ensemble à deux éléments, à savoir la topologie grossière, la topologie discrète et les deux topologies de Sierpiński. C'est l'une quelconque des deux topologies de Sierpiński qui fait l'affaire. En effet, notons $\Gamma = \{0,1\}$ l'espace de Sierpiński, dans lequel les ouverts sont $\emptyset$, $\{1\}$ et Γ, et choisissons $\{1\}$ comme élément universel.

Si on se donne un ouvert U quelconque d'un espace topologique X quelconque, il n'y a qu'une seule application $f : X \to \Gamma$ telle que $U = f^{-1}(\{1\})$, et cette application est continue, précisément parce que $\{0\}$ n'est pas un ouvert de Γ. L'application $f \mapsto f^{-1}(\{1\})$ est donc une bijection de $\mathcal{T}(X,\Gamma)$ vers $\mathcal{O}(X)$.

II.

(a) Il faut d'abord vérifier que si $f : G \to H$ est un morphisme de groupes, et $B \subset H$ un sous-groupe de H, alors $f^{-1}(B)$ est un sous-groupe de G. De $x \in f^{-1}(B)$ et $y \in f^{-1}(B)$, on déduit $f(x) \in B$ et $f(y) \in B$, puis $f(x+y) = f(x) + f(y) \in B$, et enfin $x + y \in f^{-1}(B)$ On traite de même le cas de l'élément neutre et le cas de l'opposé. Enfin, on a $1^{-1}(A) = A$, pour la flèche identité $1 : G \to G$ et tout sous-groupe A de G et $f^{-1}(g^{-1}(C)) = (g \circ f)^{-1}(C)$ pour tous morphismes de groupes $f : G \to H$ et $g : H \to K$ et tout sous-groupe C de K. $\mathcal{S}$ est donc un foncteur de $\mathbf{Ab}^{op}$ vers $\mathbf{Ens}$.

(b) Si $\mathcal{S}$ a un classifiant Γ, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Ab}(\mathbb{Z},\Gamma) \arrow[r, "\theta"] & \mathcal{S}(\mathbb{Z}) \\ \mathbf{Ab}(\mathbb{Z},\Gamma) \arrow[u, "\alpha^*"] \arrow[r, "\theta"'] & \mathcal{S}(\mathbb{Z}) \arrow[u, "\alpha^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

où $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ est le morphisme de groupes $n \mapsto -n$. L'application $\alpha^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{Z}) \to \mathcal{S}(\mathbb{Z})$ est alors l'identité, car tout sous-groupe de $\mathbb{Z}$ est invariant par α.

Soit $x \in \Gamma$. Il existe un (unique) morphisme de groupes $\varphi : \mathbb{Z} \to \Gamma$ tel que $\varphi(1) = x$. On a par ailleurs, d'après ce qui précède, $\theta(\alpha^*(\varphi)) = \theta(\varphi)$. Mais comme θ est bijective, on a $\alpha^*(\varphi) = \varphi$ et donc $-x = \varphi(-1) = \varphi(\alpha(1)) = \varphi(1) = x$, ce qui montre que x est d'ordre 2.

(c) Si $\mathcal{S}$ avait un classifiant Γ, on aurait la bijection :

$$\mathbf{Ab}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z},\Gamma) \xrightarrow{\theta} \mathcal{S}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$$

Comme tout élément de Γ est d'ordre 2, on voit que $\mathbf{Ab}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z},\Gamma)$ est un singleton, puisque si $f(1) = x$, on a $0 = f(0) = f(3) = 3f(1) = 3x = x$. Or, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ayant deux sous-groupes distincts, $\mathcal{S}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ n'est pas un singleton.

III.

(a) Si ${E_f}^\top$ se factorise à travers m, on a une flèche λ telle que le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
& \bullet \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "{E_f}^\top"'] & Z \arrow[dl, "m"] \\
X \arrow[ur, "\psi"] \arrow[r, "f"'] & A &
\end{tikzcd}$$

soit commutatif. f est alors factorisée à travers m via la composition $\lambda \circ \psi$.

Réciproquement, s'il y a une flèche $\theta : X \to Z$ qui factorise f à travers m, on a $\chi_m \circ f = \top$, donc $\chi_m \circ {E_f}^\top \circ \psi = \top = \top \circ \psi$. Comme ψ est un épimorphisme, on a $\chi_m \circ {E_f}^\top = \top$, ce qui signifie que ${E_f}^\top$ se factorise à travers m.

(b) On a une flèche $S \to T$ dans $\mathbf{Sub}(A)$ si et seulement si $S \subset T$, ce qui signifie que le monomorphisme $\tilde{S}$ se factorise à travers $\tilde{T}$:

$$\begin{tikzcd}
& \bullet \arrow[d, "\tilde{T}"] \\
\bullet \arrow[ur, "\psi"] \arrow[r, "\tilde{S}"'] & A
\end{tikzcd}$$

La flèche ψ est unique car $\tilde{T}$ est un monomorphisme. Elle sera l'image de l'unique flèche $S \to T$ par i. Bien entendu, si $S = T$, ψ ne peut être que l'identité, et si $S \subset T \subset U$, si ψ est l'image par i de la flèche $S \to T$ et φ l'image par i de la flèche $T \to U$, alors $\varphi \circ \psi$ est telle que $\tilde{U} \circ \varphi \circ \psi = \tilde{S}$. C'est donc l'image de $S \to U$ par i, qui est donc un foncteur.

(c) Soit $\langle f \rangle_X$ un objet quelconque de $\mathcal{T}/A$ (où $f : X \to A$ est une flèche de $\mathcal{T}$). On pose $j(\langle f \rangle_X) = \overline{{E_f}^\top}$ (où le surlignement signifie « le sous-objet représenté par »). On va montrer que j se prolonge en un foncteur adjoint à gauche de i.

Pour tout sous-objet S de A, l'ensemble $\mathbf{Sub}(A)(\overline{{E_f}^\top}, S)$ est un singleton si $\overline{{E_f}^\top} \subset S$ et est vide sinon. Si $\overline{{E_f}^\top} \subset S$, alors ${E_f}^\top$ se factorise à travers $\tilde{S}$, donc f se factorise à travers $\tilde{S}$, d'après la question **(a)**, donc il y a une flèche (nécessairement unique puisque $\tilde{S}$ est un monomorphisme) de $\langle f \rangle_X$ vers $\langle \tilde{S} \rangle$ dans $\mathcal{T}/A$. Réciproquement, si une telle flèche existe, f se factorise à travers $\tilde{f}$ et il en est de même de ${E_f}^\top$, ce qui fait que $\mathbf{Sub}(A)(\overline{{E_f}^\top}, S)$ contient un élément. On voit donc qu'on a une bijection θ :

$$\mathbf{Sub}(A)(j(\langle f \rangle_X), S) = \mathbf{Sub}(A)(\overline{{E_f}^\top}, S) \xrightarrow{\theta} \mathcal{T}/A(\langle f \rangle_X, \langle \tilde{S} \rangle) = \mathcal{T}/A(\langle f \rangle_X, i(S))$$

La naturalité de cette bijection par rapport à S est immédiate puisque les deux ensembles sont vides ou sont des singletons. Le foncteur de $\mathbf{Sub}(A)^{op}$ vers $(\mathcal{T}/A)^{op}$, qui envoie S sur $(\mathcal{T}/A)^{op}(i^{op}(S), \langle f \rangle_X)$ est donc représentable (avec pour classifiant $j(\langle f \rangle_X)$) et i^{op} admet un adjoint à droite j^{op}, qui est j sur les objets. Le foncteur i a donc un adjoint à gauche qui est j sur les objets.

IV.

(a) Pour tout objet X, on a $\mathcal{P}(1_X) = 1_{\mathcal{P}(X)}$, et comme $1_{\mathcal{P}(X)}$ est intérieurement adjointe d'elle-même, on voit que $1_{\mathcal{P}(X)}$ et $\exists_f$ sont intérieurement équivalentes, ce qui dans le langage interne s'exprime par le fait que pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$, on a $A \subset \exists_{1_X}(A)$ et $\exists_{1_X}(A) \subset A$. On a donc $A = \exists_{1_X}(A)$ par extensionnalité. Comme une égalité du langage interne se traduit par une égalité interne, on conclut à l'égalité des flèches $\exists_{1_X}$ et $1_{\mathcal{P}(X)}$

par équivalence de l'égalité interne et de l'égalité externe. On traite de même la question de la composition. Pour deux flèches $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, On a d'abord $\mathcal{P}(g \circ f) = \mathcal{P}(f) \circ \mathcal{P}(g)$, puis l'équivalence interne des adjointes à gauche internes, et donc $\exists_{g\circ f} = \exists_g \circ \exists_f$ par le même raisonnement que ci-dessus.

(b) Dans le cas de η, la naturalité signifie que le carré :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{P}(X) \arrow[d, "\exists_f"] \\ Y \arrow[r, "\eta_Y"'] & \mathcal{P}(Y) \end{tikzcd}$$

est commutatif pour toute flèche $f : X \to Y$. La flèche f s'écrit $\lfloor f[a] \rfloor_{(a\in X)}$. On a donc :

$$\begin{array}{rcl} \exists_f \circ \eta_X & = & \lfloor \{y \in Y \mid \exists_{x\in X}\ y = f[x] \wedge x \in A\} \rfloor_{(A\in\mathcal{P}(X))} \circ \lfloor \{x \in X \mid x = a\} \rfloor_{(a\in X)} \\ & = & \lfloor \{y \in Y \mid \exists_{x\in X}\ y = f[x] \wedge x \in \{x \in X \mid x = a\}\} \rfloor_{(a\in X)} \\ & = & \lfloor \{y \in Y \mid \exists_{x\in X}\ y = f[x] \wedge x = a\} \rfloor_{(a\in X)} \\ & = & \lfloor \{y \in Y \mid y = f[a]\} \rfloor_{(a\in X)} \\ & = & \lfloor \{y \in Y \mid y = b\} \rfloor_{(b\in Y)} \circ \lfloor f[a] \rfloor_{(a\in X)} \\ & = & \eta_Y \circ f \end{array}$$

On notera que l'équivalence des énoncés $\exists_{x\in X}\ y = f[x] \wedge x = a$ et $y = f[a]$ se démontre structurellement.

Le cas de μ se traite de même. On doit établir la commutativité du carré :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[d, "\exists_{\exists_f}"'] & \mathcal{P}(X) \arrow[d, "\exists_f"] \\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y)) \arrow[r, "\mu_Y"'] & \mathcal{P}(Y) \end{tikzcd}$$

Intuitivement, μ_X fait la réunion d'un ensemble de parties de X, c'est-à-dire d'un élément de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$. Il s'agit de voir que cette opération commute aux images directes. C'est un exercice élémentaire, sauf qu'il faut faire attention à le traiter structurellement. On a :

$$\begin{array}{rcl} \exists_f \circ \mu_X & = & \lfloor \{y \in Y \mid \exists_{x\in X}\ y = f[x] \wedge x \in A\} \rfloor_{(A\in\mathcal{P}(X))} \circ \\ & & \qquad \lfloor \{x \in X \mid \exists_{U\in\mathcal{P}(X)}\ U \in F \wedge x \in U\} \rfloor_{(F\in\mathcal{P}(\mathcal{P}(X)))} \\ & = & \lfloor \{y \in Y \mid \exists_{x\in X}\ y = f[x] \wedge \exists_{U\in\mathcal{P}(X)}\ U \in F \wedge x \in U\} \rfloor_{(F\in\mathcal{P}(\mathcal{P}(X)))} \\ & = & \lfloor \{y \in Y \mid \exists_{x\in X}\ \exists_{U\in\mathcal{P}(X)}\ y = f[x] \wedge U \in F \wedge x \in U\} \rfloor_{(F\in\mathcal{P}(\mathcal{P}(X)))} \end{array}$$

D'autre part, $\exists_{\exists_f}$ est $\lfloor \{V \in \mathcal{P}(Y) \mid \exists_{U\in\mathcal{P}(X)}\ V = \exists_f[U] \wedge U \in F\} \rfloor_{(F\in\mathcal{P}(\mathcal{P}(X)))}$, et $\mu : \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y)) \to \mathcal{P}(Y)$ s'écrit :

$$\lfloor \{y \in Y \mid \exists_{V\in\mathcal{P}(Y)}\ V \in G \wedge y \in V\} \rfloor_{(G\in\mathcal{P}(\mathcal{P}(Y)))}$$

On a donc :

$$\mu_Y \circ \exists_{\exists_f} \quad = \quad \lfloor \{y \in Y \mid \exists_{V\in\mathcal{P}(Y)}\ \exists_{U\in\mathcal{P}(X)}\ V = \exists_f[U] \wedge U \in F \wedge y \in V\} \rfloor_{(F\in\mathcal{P}(\mathcal{P}(X)))}$$

Il suffit pour terminer de montrer l'équivalence structurelle des énoncés :

$$\exists_{x\in X}\ \exists_{U\in\mathcal{P}(X)}\ y = f[x] \wedge U \in F \wedge x \in U$$
$$\exists_{V\in\mathcal{P}(Y)}\ \exists_{U\in\mathcal{P}(X)}\ V = \exists_f[U] \wedge U \in F \wedge y \in V$$

dans le contexte $(F \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)))(y \in Y)$. Comme les quantificateurs de même sorte sont structurellement permutables, il suffit de prouver l'équivalence de :

$$\exists_{x \in X}\ y = f[x] \wedge U \in F \wedge x \in U \qquad \text{et} \qquad \exists_{V \in \mathcal{P}(Y)}\ V = \exists_f[U] \wedge U \in F \wedge y \in V$$

dans le contexte $(F \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)))(y \in Y)(U \in \mathcal{P}(X))$. Le second énoncé est équivalent à :

$$U \in F \wedge y \in \exists_f[U]$$

et $y \in \exists_f[U]$ est équivalent à $\exists_{x \in X}\ y = f[x] \wedge x \in U$, ce qui termine la démonstration.

(c) On doit montrer que les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))) \arrow[r, "\mathcal{P}\mu_X"] \arrow[d, "\mu_{\mathcal{P}(X)}"'] & \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \arrow[d, "\mu_X"] \\
\mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \arrow[r, "\mu_X"'] & \mathcal{P}(X)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(X) \arrow[r, "\eta_{\mathcal{P}(X)}"] \arrow[dr, "1"'] & \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \arrow[d, "\mu_X"] & \mathcal{P}(X) \arrow[l, "\mathcal{P}\eta_X"'] \arrow[dl, "1"] \\
& \mathcal{P}(X) &
\end{tikzcd}$$

La flèche $\mathcal{P}\mu_X$ est l'image de μ_X par le foncteur $\mathcal{P}$, c'est-à-dire $\exists_{\mu_X}$, qui s'écrit :

$$\lfloor \{A \in \mathcal{P}(X) \mid \exists_{F \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))}\ A = \mu_X[F] \wedge F \in \Phi\} \rfloor_{(\Phi \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))))}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\mu_X \circ \mathcal{P}\mu_X &= \lfloor \{x \in X \mid \exists_{U \in \mathcal{P}(X)}\ U \in F \wedge x \in U\} \rfloor_{(F \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)))} \circ \\
&\qquad \lfloor \{A \in \mathcal{P}(X) \mid \exists_{F \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))}\ A = \mu_X[F] \wedge F \in \Phi\} \rfloor_{(\Phi \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))))} \\
&= \lfloor \{x \in X \mid \exists_{U \in \mathcal{P}(X)}\ \exists_{F \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))}\ U = \mu_X[F] \wedge F \in \Phi \wedge x \in U\} \rfloor_{(\Phi \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))))} \\
&= \lfloor \{x \in X \mid \exists_{F \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))}\ F \in \Phi \wedge x \in \mu_X[F]\} \rfloor_{(\Phi \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))))}
\end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
\mu_X \circ \mu_{\mathcal{P}(X)} &= \lfloor \{x \in X \mid \exists_{U \in \mathcal{P}(X)}\ U \in F \wedge x \in U\} \rfloor_{(F \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)))} \circ \\
&\qquad \lfloor \{A \in \mathcal{P}(X) \mid \exists_{F \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))}\ F \in \Phi \wedge A \in F\} \rfloor_{(\Phi \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))))} \\
&= \lfloor \{x \in X \mid \exists_{U \in \mathcal{P}(X)}\ \exists_{F \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))}\ F \in \Phi \wedge U \in F \wedge x \in U\} \rfloor_{(\Phi \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))))} \\
&= \lfloor \{x \in X \mid \exists_{F \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))}\ F \in \Phi \wedge \exists_{U \in \mathcal{P}(X)}\ U \in F \wedge x \in U\} \rfloor_{(\Phi \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))))}
\end{aligned}$$

L'égalité $\mu_X \circ \mathcal{P}\mu_X = \mu_X \circ \mu_{\mathcal{P}(X)}$ résulte donc du fait que les énoncés :

$$x \in \mu_X[F] \qquad \text{et} \qquad \exists_{U \in \mathcal{P}(X)}\ U \in F \wedge x \in U$$

sont équivalents, ce qui est le cas par définition de μ_X.

Pour ce qui est du second diagramme, on a :

$$\begin{aligned}
\mu_X \circ \eta_{\mathcal{P}(X)} &= \lfloor \{x \in X \mid \exists_{U \in \mathcal{P}(X)}\ U \in F \wedge x \in U\} \rfloor_{(F \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)))} \circ \lfloor \{B \in \mathcal{P}(X) \mid B = A\} \rfloor_{(A \in \mathcal{P}(X))} \\
&= \lfloor \{x \in X \mid \exists_{U \in \mathcal{P}(X)}\ U = A \wedge x \in U\} \rfloor_{(A \in \mathcal{P}(X))} \\
&= \lfloor \{x \in X \mid x \in A\} \rfloor_{(A \in \mathcal{P}(X))} \\
&= \lfloor A \rfloor_{(A \in \mathcal{P}(X))} \\
&= 1_{\mathcal{P}(X)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_X \circ \mathcal{P}\eta_X &= \mu_X \circ \exists_{\eta_X} \\
&= \lfloor \{x \in X \mid \exists_{U \in \mathcal{P}(X)}\ U \in F \wedge x \in U\} \rfloor_{(F \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)))} \circ \\
&\qquad \lfloor \{B \in \mathcal{P}(X) \mid \exists_{y \in X}\ B = \eta_X[y] \wedge y \in A\} \rfloor_{(A \in \mathcal{P}(X))} \\
&= \lfloor \{x \in X \mid \exists_{U \in \mathcal{P}(X)}\ \exists_{y \in X}\ U = \eta_X[y] \wedge y \in A \wedge x \in U\} \rfloor_{(A \in \mathcal{P}(X))} \\
&= \lfloor \{x \in X \mid \exists_{y \in X}\ y \in A \wedge x \in \eta_X[y]\} \rfloor_{(A \in \mathcal{P}(X))} \\
&= \lfloor \{x \in X \mid \exists_{y \in X}\ y \in A \wedge x = y\} \rfloor_{(A \in \mathcal{P}(X))} \\
&= \lfloor \{x \in X \mid x \in A\} \rfloor_{(A \in \mathcal{P}(X))} \\
&= 1_{\mathcal{P}(X)}
\end{aligned}$$

(d) Comme (X, h) est une $\mathcal{P}$-algèbre, on a les diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[d, "\exists_h"'] & \mathcal{P}(X) \arrow[d, "h"] \\
\mathcal{P}(X) \arrow[r, "h"'] & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "1_X"'] & \mathcal{P}(X) \arrow[d, "h"] \\
 & X
\end{tikzcd}$$

(d.1) L'énoncé $h[\{x\}] = x$ est vrai dans le contexte $(x \in X)$, car $\lfloor h[\{x\}] \rfloor_{(x \in X)} = h \circ \lfloor \{x\} \rfloor_{(x \in X)} = h \circ \eta_X = 1_X = \lfloor x \rfloor_{(x \in X)}$.

(d.2) On a $\mu_X \circ \exists_{\eta_X} = 1_{\mathcal{P}(X)}$ (autrement-dit, toute partie est la réunion de l'ensemble des singletons construits avec ses propres éléments). Si $x \in A$, on a $x \leq h[A]$. En effet, $\mu_X[\{\{x\}, A\}] = A$, donc $h[\{x, h[A]\}] = h[A]$ (en utilisant $h \circ \exists_h = h \circ \mu_X$). En particulier, on a $x \leq h[\{x, y\}]$.

(d.3) Réflexivité : On a $\{x, x\} = \{z \in X \mid z = x\}$, donc $\lfloor x \leq x \rfloor_{(x \in X)} = \lfloor h[\eta_X[x]] = x \rfloor_{(x \in X)}$. Or l'égalité $h[\eta_X[x]] = x$ est vraie dans le contexte $(x \in X)$, puisque $h \circ \eta_X = 1_X$.

Antisymétrie : Supposons que $x \leq y$ et $y \leq x$. On a $h[\{x, y\}] = y$ et $h[\{y, x\}] = x$. Comme $\{x, y\} = \{y, x\}$, on a $x = y$.

Transitivité : Supposons que $x \leq y$ et $y \leq z$ soient vrais dans le contexte $(x \in X)(y \in X)(z \in X)$. Alors, $h[\{x, y\}] = y$ et $h[\{y, z\}] = z$. On a par ailleurs $h[\{\{z\}, \{x, z\}\}] = h[\{x, z\}] = z$ et $h[\{\{z\}, \{x, z\}\}] = h[\{z, h[\{x, z\}]\}]$, d'ou il suit que $h[\{x, z\}] \leq z$. Comme par ailleurs $z \leq h[\{x, z\}]$, on obtient $h[\{x, z\}] = z$ par antisymétrie.

(d.4) Supposons $A \subset B$. On a $\mu_X[\{A, B\}] = B$, donc $h[\mu_X[\{A, B\}]] = h[B]$ et $h[\exists_h[\{A, B\}]] = h[\{h[A], h[B]\}]$, donc $h[A] \leq h[B]$.

(d.5) Soit A une partie de X. Il s'agit de montrer que $h[A]$ est une borne supérieure pour A, c'est-à-dire que pour tout $z \in X$, $h[A] \leq z$ est équivalent à $\forall_{x \in X}\ x \in A \Rightarrow x \leq z$. Supposons d'abord $h[A] \leq z$. Soit $x \in X$, tel que $x \in A$. Alors, $x \leq h[A]$, donc $x \leq z$. Réciproquement, supposons que $\forall_{x \in X}\ x \in A \Rightarrow x \leq z$. Posons $B = \{x \in X \mid x \in A \vee x = z\}$. B est la réunion de l'ensemble de parties $F = \{\{x, z\}\}_{x \in A}$. L'hypothèse nous dit que $h[\{x, z\}] = z$, pour tout $x \in A$. On a donc $h[B] = (h \circ \exists_h)[F] = h[\{z, \dots, z\}] = h[\{z\}] = z$. Comme $A \subset B$, on a $h[A] \leq z$.

(e) La relation $h \circ \mu_X = h \circ \exists_h$ dit simplement que la borne supérieure de la réunion d'un ensemble F de parties de X, est la borne supérieure de l'ensemble des bornes supérieures des éléments de F, ce qui se vérifie facilement structurellement. L'autre relation $h \circ \eta_X = 1_X$ dit que la borne supérieure du singleton $\{x\}$ est x, ce qui est trivial structurellement.

Problème 4

I.

(a) Notons $*$ l'unique objet de M. Si on a une adjonction $F \dashv G : \mathcal{C} \to M$, alors on a des bijections $\mathcal{C}(X, G(*)) \simeq M(*, *) \simeq \mathcal{C}(Y, G(*))$, car $F(X) = F(Y) = *$. Si $G(*) = X$, on obtient $1 = 0$ en considérant les cardinaux de ces ensembles. Si $G(*) = Y$ on obtient $2 = 1$. Si on a une adjonction $F \dashv G : M \to \mathcal{C}$, on a les bijections $\mathcal{C}(F(*), X) \simeq M(*, *) \simeq \mathcal{C}(F(*), Y)$. Si $F(*) = X$, on obtient $1 = 2$, et si $F(*) = Y$, on obtient $0 = 1$. Il n'y a donc aucune paire de foncteurs adjoints entre ces deux catégories.

II.

(a) Il s'agit de montrer que le diagramme suivant est commutatif pour toute application $f : X \to Y$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(Y) \arrow[r, "\gamma_Y"] \arrow[d, "f^{-1}"'] & \mathcal{P}(Y) \arrow[d, "f^{-1}"] \\ \mathcal{P}(X) \arrow[r, "\gamma_X"'] & \mathcal{P}(X) \end{tikzcd}$$

autrement-dit, que pour toute partie B de Y, on a $\gamma_X(f^{-1}(B)) = f^{-1}(\gamma_Y(B))$, c'est-à-dire que f^{-1} commute au complémentaire, ce qui est clair puisque $x \in \gamma_X(f^{-1}(B)) \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \notin B \Leftrightarrow f(x) \in \gamma_Y(B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(\gamma_Y(B))$.

(b) Soit $\tau : Q \to Q$ une transformation naturelle, et $f : X \to \mathbf{2}$ une application. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Ens}(\mathbf{2}, \mathbf{2}) \arrow[r, "\tau_{\mathbf{2}}"] \arrow[d, "f^*"'] & \mathbf{Ens}(\mathbf{2}, \mathbf{2}) \arrow[d, "f^*"] \\ \mathbf{Ens}(X, \mathbf{2}) \arrow[r, "\tau_X"'] & \mathbf{Ens}(X, \mathbf{2}) \end{tikzcd}$$

Posons $\alpha = \tau_{\mathbf{2}}(1_{\mathbf{2}})$. On a $\tau_X(f) = \tau_X(f^*(1_{\mathbf{2}})) = f^*(\alpha) = \alpha \circ f$. L'application $\alpha : \mathbf{2} \to \mathbf{2}$ détermine donc la transformation naturelle τ. De plus, toute application $\alpha : \mathbf{2} \to \mathbf{2}$ donne une transformation naturelle $\tau : Q \to Q$, quand on pose $\tau_X(f) = \alpha \circ f$. En effet, on a pour toute flèche $\varphi : X' \to X$, $(\varphi^* \circ \tau_X)(f) = \alpha \circ f \circ \varphi = \tau_{X'}(f \circ \varphi) = \tau_{X'}(\varphi^*(f))$. On a donc exactement quatre transformations naturelles de Q vers Q.

(c) On sait que les foncteurs Q et $\mathcal{P}$ sont naturellement isomorphes, puisque $\mathbf{2}$ est un classifiant de $\mathcal{P}$. Il y a donc quatre transformations naturelles de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{P}$. Les applications $\mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ suivantes sont clairement naturelles en X :

- $A \mapsto A$ (transformation naturelle identique)
- $A \mapsto \gamma_X(A)$ (complémentaire)
- $A \mapsto \emptyset$ (transformation « constante » de valeur $\emptyset$)
- $A \mapsto X$ (transformation « constante » de valeur X)

et déterminent quatre transformations naturelles distinctes. Il n'y en a donc pas d'autre.

III.

Il faut faire attention au fait que le foncteur $\mathcal{P}$ allant de $\mathbf{Ens}^{op}$ vers $\mathbf{Ens}$, une flèche de l'objet $f : X \to \mathcal{P}(Y)$ vers l'objet $g : X \to \mathcal{P}(Z)$ dans $X/\mathcal{P}$ est une flèche $\varphi : Z \to Y$ (dans ce sens !) telle que le triangle suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & \mathcal{P}(Y) \arrow[dl, "\varphi^{-1}"] \\ & \mathcal{P}(Z) & \end{tikzcd}$$

Soit donc $f : X \to \mathcal{P}(Y)$ un objet quelconque de $X/\mathcal{P}$. On doit montrer qu'il existe une unique application $\varphi : Y \to \mathcal{P}(X)$ telle que $\varphi^{-1} \circ u = f$.

Existence : Posons $\varphi(y) = \{x \in X \mid y \in f(x)\}$. On a, pour tout $x \in X$:

$$\begin{array}{rcl} \varphi^{-1}(u(x)) & = & \{y \in Y \mid \varphi(y) \in u(x)\} \\ & = & \{y \in Y \mid x \in \varphi(y)\} \\ & = & \{y \in Y \mid y \in f(x)\} \\ & = & f(x) \end{array}$$

Unicité : Supposons qu'on ait une autre application $\psi : Y \to \mathcal{P}(X)$ telle que $\psi^{-1} \circ u = f$. On aurait :

$$\{y \in Y \mid \psi(y) \in u(x)\} = \{y \in Y \mid \varphi(y) \in u(x)\}$$

donc l'équivalence entre $x \in \psi(y)$ et $x \in \varphi(y)$ pour tout $x \in X$ et tout $y \in Y$, et finalement $\psi = \varphi$.

IV.

(a) Soient $f, g : X \to Y$ deux flèches parallèles de $\mathcal{C}$ telles que $F(f) = F(g)$. Il s'agit de montrer que $f = g$. Comme $F(f) = F(g)$, la flèche identité de $F(Y)$ est un coégaliseur de $F(f)$ et $F(g)$. Comme F crée les coégaliseurs, il existe une unique flèche $\varphi : Y \to Z$ dans $\mathcal{C}$ telle que $\varphi \circ f = \varphi \circ g$ et telle que $F(Z) = F(Y)$ et $F(\varphi) = 1_{F(Y)}$. De plus, φ est un coégaliseur de f et g. On a le carré commutatif suivant dans $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "1_Y"] \arrow[d, "1_Y"'] & Y \arrow[d, "\varphi"] \\ Y \arrow[r, "\varphi"'] & Z \end{tikzcd}$$

dont l'image par F est un carré ne faisant intervenir que la flèche $1_{F(Y)}$, donc cartésien. Comme F reflète les limites finies, le carré ci-dessus est lui aussi cartésien, et φ est donc un monomorphisme. On en déduit que $f = g$.

V.

(a) On a $\mathcal{C}(X \times 0, X \times 0) \simeq \mathcal{C}(0 \times X, X \times 0) \simeq \mathcal{C}(0, (X \times 0)^X)$. Or ce dernier ensemble est un singleton car 0 est initial.

(b) Pour tout objet X, notons $[\,]$ l'unique flèche de 0 vers X. Soit $f : X \to 0$ une flèche quelconque. On a $f \circ [\,] = 1_0$, puisque 0 est initial. Par ailleurs, on a les deux carrés commutatifs suivants (celui de droite parce que 0 est initial) :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\langle 1_X, f\rangle"'] & 0 \arrow[r, "[\,]"] \arrow[d, "1_0"] & X \\
X \times 0 \arrow[r, "\pi_2"'] & 0 \arrow[r, "[\,]"'] & X \times 0 \arrow[u, "\pi_1"']
\end{tikzcd}$$

et $[\,] \circ \pi_2 = 1_{X\times 0}$ d'après la question **(a)**. On a donc $[\,] \circ f = \pi_1 \circ \langle 1_X, f\rangle = 1_X$, et f est un isomorphisme.

(c) Soient X et Y deux objets quelconques. On a :

$$\mathcal{C}(X, Y) \simeq \mathcal{C}(X, 0^{(0^Y)}) \simeq \mathcal{C}(X \times 0^Y, 0)$$

or ce dernier ensemble est un singleton ou est vide d'après la question **(b)**. $\mathcal{C}(X, Y)$ est donc un singleton ou est vide et deux flèches parallèles quelconques sont égales.

VI.

(a) Il s'agit de définir le foncteur $G : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$ de telle façon qu'on ait une bijection naturelle :

$$\mathcal{C}((X, 1_X), (Y, q)) \xrightarrow{\theta} \mathbf{Ens}(X, G((Y, q)))$$

Un élément de $\mathcal{C}((X, 1_X), (Y, q))$ est une fonction $f : X \to Y$ telle que $q \circ f = f$. L'image d'une telle fonction est contenue dans $\{y \in Y \mid q(y) = y\}$. Réciproquement, n'importe quelle fonction $f : X \to Y$ dont l'image est contenue dans $\{y \in Y \mid q(y) = y\}$ est un morphisme de $(X, 1_X)$ vers (Y, q). On pose donc $G((Y, q)) = \{y \in Y \mid q(y) = y\}$. Si $f : (X, p) \to (Y, q)$ est un morphisme, on a $q(f(x)) = f(p(x)) = f(x)$ pour tout x tel que $p(x) = x$. f se restreint donc en une application $G(f) : G((X, p)) \to G((Y, q))$, et on a clairement un foncteur. On définit θ en posant $\theta(f)(x) = f(x)$. Il reste à établir la naturalité de θ, c'est-à-dire le fait que $\theta(\psi \circ f \circ F(\varphi)) = G(\psi) \circ \theta(f) \circ \varphi$, pour $\varphi : X' \to X$ et $\psi : (Y, q) \to (Y', q')$. Soit $x \in X'$, on a $\theta(\psi \circ f \circ F(\varphi))(x) = \psi(f(\varphi(x))) = (G(\psi) \circ \theta(f) \circ \varphi)(x)$.

(b) Il s'agit maintenant de trouver un foncteur $H : \mathbf{Ens} \to \mathcal{C}$ tel qu'on ait une bijection naturelle :

$$\mathbf{Ens}(G((X, p)), Y) \xrightarrow{\xi} \mathcal{C}((X, p), H(Y))$$

Un flèche $f : G((X, p)) \to Y$ est une application $f : \{x \in X \mid p(x) = x\} \to Y$. On peut la prolonger en une application $\overline{f} : X \to Y$ en posant $\overline{f}(x) = f(p(x))$ pour tout x de X. On a alors $1_Y \circ \overline{f} = \overline{f} \circ p$, et $\overline{f}$ est un morphisme de (X, p) vers $F(Y)$, ce qui laisse supposer qu'on pourrait avoir $H = F$. On pose donc $\xi(f) = \overline{f}$. xi est alors une bijection puisque se donner $g : (X, p) \to (Y, 1_Y)$ revient à se donner une application $g : X \to Y$ telle que $g = g \circ p$, donc une application définie sur $\{x \in X \mid p(x) = x\}$. Il reste à montrer la naturalité de ξ, c'est-à-dire le fait que $\xi(\psi \circ f \circ G(\varphi)) = F(\psi) \circ \xi(f) \circ \varphi$, pour $\psi : Y \to Y'$ et $\varphi : (X', p') \to (X, p)$. Or, pour tout $x \in X'$, on a $\xi(\psi \circ f \circ G(\varphi))(x) = (\psi \circ f \circ G(\varphi))(p'(x)) = \psi(f(\varphi(p'(x)))) = \psi(f(p(\varphi(x)))) = \psi(\overline{f}(\varphi(x))) = (F(\psi) \circ \xi(f) \circ \varphi)(x)$.

VII.

(a) Les objets de $\mathbf{Ens}/\Gamma$ sont les triplets $(X, Y, f : X \to \mathcal{C}(\mathbf{1}, Y))$, où X est un ensemble et Y un objet de $\mathcal{C}$. Un morphisme de (X, Y, f) vers (X', Y', f') est un couple (φ, ψ), où $\varphi : X \to X'$ est une application, et $\psi : Y \to Y'$ une flèche de $\mathcal{C}$, tel que $\Gamma(\psi) \circ f = f' \circ \varphi$. L'objet $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, u)$, où $u : \mathbf{1} \to \mathcal{C}(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ est l'unique application entre ces deux singletons est clairement un objet final dans $\mathbf{Ens}/\Gamma$.

(b) Le foncteur d'oubli $\Phi : \mathbf{Ens}/\Gamma \to \mathbf{Ens}$ envoie (X, Y, f) sur X et (φ, ψ) sur φ. Il s'agit de trouver une bijection $\alpha_\zeta : \Phi(\zeta) \to (\mathbf{Ens}/\Gamma)(\mathbf{1}, \zeta)$ naturelle en ζ. Comme ζ s'écrit (X, Y, f), on doit trouver une bijection

$\theta : X \to (\mathbf{Ens}\,/\Gamma)(\mathbf{1}, \zeta)$. À tout élément $x \in X$ on associe le couple $\theta(x) = (\varphi : \mathbf{1} \to X, f(x) : \mathbf{1} \to Y)$, où est définie par $\varphi(*) = x$. Noter que $f(x) \in \mathcal{C}(1, Y)$. Cette application est bijective. En effet, soit (φ, ψ) une flèche de $\mathbf{1}$ vers ζ dans $\mathbf{Ens}\,/\Gamma$. On a le diagamme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\
\mathcal{C}(\mathbf{1}, \mathbf{1}) \arrow[r, "\psi_*"'] & \mathcal{C}(\mathbf{1}, Y)
\end{tikzcd}$$

qui donne $f(\varphi(*)) = \psi \circ 1_{\mathbf{1}} = \psi$. On voit donc que l'unique antécédent de (φ, ψ) par θ est $x = \varphi(*)$. Il reste à vérifier la naturalité de θ. Soit $(\varphi, \psi) : (X, Y, f) \to (X', Y', f')$ une flèche de $\mathbf{Ens}\,/\Gamma$. On doit vérifier que $\theta \circ \Phi((\varphi, \psi)) = (\varphi, \psi)_* \circ \theta$, c'est-à-dire la commutativité du carré :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\varphi"'] & (\mathbf{Ens}\,/\Gamma)(\mathbf{1}, (X, Y, f)) \arrow[d, "(\varphi,\psi)_*"] \\
X' \arrow[r, "\theta"'] & (\mathbf{Ens}\,/\Gamma)(\mathbf{1}, (X', Y', f'))
\end{tikzcd}$$

On a pour tout $x \in X$, $(\varphi, \psi)_*(\theta(x)) = (\varphi, \psi) \circ (* \mapsto x, f(x)) = (* \mapsto \varphi(x), \psi \circ f(x))$, et d'autre part $\theta(\varphi(x)) = (* \mapsto \varphi(x), f'(\varphi(x)))$. Mais comme $f' \circ \varphi = \Gamma(\psi) \circ f = \psi_* \circ f$, on a $\psi \circ f(x) = \psi_*(f(x)) = f'(\varphi(x))$.

Problème 5

I.

(a) Soit $\mathbf{1} = \{*\}$ un singleton. Soit $\theta : I \to \Phi$ une transformation naturelle. Soit X un ensemble, et $x \in X$. On note $\alpha : \mathbf{1} \to X$, l'application définie par $\alpha(*) = x$. On a le carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r, "\theta_{\mathbf{1}}"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathbf{1} \times \mathbf{1} \arrow[d, "\alpha\times\alpha"] \\ X \arrow[r, "\theta_X"'] & X \times X \end{tikzcd}$$

On a $\theta_X(x) = \theta_X(\alpha(*)) = (\alpha \times \alpha)(\theta_{\mathbf{1}}(*)) = (x, x)$, car $\theta_{\mathbf{1}}(*)$ ne peut être que $(*, *)$. L'application diagonale $X \to X \times X$, qui est naturelle en X, est donc la seule transformation naturelle de I vers Φ.

(b) Soit $\mathbf{2} = \{a, b\}$ un ensemble à deux éléments (distincts), et soit $\theta : \Phi \to I$ une transformation naturelle. Soit X un ensemble, x et y deux éléments de X. Notons $\alpha : \mathbf{2} \to X$ l'application définie par $\alpha(a) = x$ et $\alpha(b) = y$. On a le carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{2} \times \mathbf{2} \arrow[r, "\theta_{\mathbf{2}}"] \arrow[d, "\alpha\times\alpha"'] & \mathbf{2} \arrow[d, "\alpha"] \\ X \times X \arrow[r, "\theta_X"'] & X \end{tikzcd}$$

$\theta_{\mathbf{2}}((a, b))$ ne peut être que a ou b. Si c'est a, on a $\theta_X(x, y) = \theta_X(\alpha(a), \alpha(b)) = \alpha(a) = x$. Dans ce cas, la transformation naturelle θ est la première projection canonique. L'autre est bien sûr la seconde projection canonique.

II.

Considérons l'inclusion $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, qui est un morphisme de groupes. La composition $\pi \circ i$ envoie tout élément de $\mathbb{Z}$ sur la classe $\overline{0}$ de 0 dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Il en est de même du morphisme $2i$. π n'est donc pas un monomorphisme dans **Grp**.

Bien sûr, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sont divisibles. Soit G un groupe divisible, et $u, v : G \to \mathbb{Q}$ deux morphismes de groupes tels que $\pi \circ u = \pi \circ v$, c'est-à-dire $\pi \circ h = 0$ après qu'on ait posé $h = u - v$. Il s'agit de montrer que $h = 0$. Pour tout $x \in G$, on a $\pi(h(x)) = 0$, donc $h(x) \in \mathbb{Z}$. Posons $h(x) = \varepsilon n$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon = \pm 1$. Si n était différent de 0, comme G est divisible, il existerait $y \in G$ tel que $x = 2ny$. On aurait alors $\varepsilon n = h(x) = h(2ny) = 2nh(y)$, donc $h(y) = \pm 1/2$, et $\pi(h(y))$ ne serait pas 0, ce qui ne se peut pas.

III.

Soit $\mathcal{C}$ une petite catégorie. Le plongement de Yoneda $\mathcal{Y} : \mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{C}}$, qui est plein et fidèle, montre que $\mathcal{C}$ est isomorphe à une sous-catégorie pleine du topos de préfaisceaux $\widehat{\mathcal{C}}$. Il suffit alors de mettre sur $\mathcal{C}$ la topologie de Grothendieck discrète D (seuls les cribles maximaux sont couvrants) pour que $\widehat{\mathcal{C}}$ puisse être vue comme le topos des faisceaux sur le site $(\mathcal{C}, D)$.

IV.

(a) Soit Z un objet quelconque de $\mathcal{T}$, $\varphi : Z \to \Omega$ et $\psi : Z \to J$ deux flèches telles que $\Delta \circ \varphi = (i \times \top) \circ \langle \psi, \langle\rangle \rangle$. Comme il n'y a pas d'autre flèche de Z vers $\mathbf{1}$ que la flèche $\langle\rangle$, il suffit de montrer que $\top = \top \circ \langle\rangle = \varphi$ et $\lambda \circ \langle\rangle = \psi$. Comme $\Delta = \langle 1_\Omega, 1_\Omega \rangle$, on a $\langle \varphi, \varphi \rangle = \langle i \circ \psi, \top \rangle$, donc $\varphi = \top$, puis $i \circ \psi = \top$. Comme $i \circ \lambda = \top : \mathbf{1} \to \Omega$, on a $i \circ \lambda \circ \langle\rangle = \top : Z \to \Omega$, et comme i est un monomorphisme, on a $\lambda \circ \langle\rangle = \psi : Z \to J$.

(b) Notons $i : J \to \Omega$ un pullback de $\top$ le long de j. Noter que $j \circ \top = \top$ entraîne que $\top$ se relève le long de i. On a les trois carrés cartésiens suivants :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "\langle \lambda, \langle\rangle \rangle"] \arrow[d, "\top"'] & J \times \mathbf{1} \arrow[r] \arrow[d, "i \times \top"] & \mathbf{1} \times \mathbf{1} \arrow[r] \arrow[d, "\top \times \top"] & \mathbf{1} \arrow[d, "\top"] \\
\Omega \arrow[r, "\Delta"'] & \Omega \times \Omega \arrow[r, "j \times 1_\Omega"'] & \Omega \times \Omega \arrow[r, "\wedge"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

le premier d'après la question **(a)**, le second comme produit de deux carrés cartésiens, le dernier par définition de la conjonction interne. On en déduit immédiatement que $\wedge \circ \langle j, 1_\Omega \rangle = \wedge \circ (j \times 1_\Omega) \circ \Delta = 1_\Omega$.

V.

Soit $d : \mathcal{I} \to \mathcal{C}/A$ un diagramme dans $\mathcal{C}/A$, tel que $U \circ d$ ait un cocône colimite $\gamma : U \circ d \to \Delta(X)$ dans $\mathcal{C}$. Les objets $d(i) = \langle p_i \rangle$ (où i est un objet quelconque de $\mathcal{I}$) sont des flèches de $\mathcal{C}$ qui forment un cocône sur le diagramme $U \circ d$, ce qui fait qu'il existe une unique flèche $p : X \to A$ telle que $p \circ \gamma_i = p_i$ pour tout i. Les flèches $[\gamma_i]$ forment donc dans $\mathcal{C}/A$ un cocône de sommet $\langle p \rangle$ sur le diagramme d.

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[rr, dotted, "\psi"] \arrow[dd, bend right=80, "p"'] & & Y \arrow[dll, bend left=40, "q"] \\
U(d(i)) \arrow[ur, "\gamma_i"] \arrow[urrr, "\alpha_i"] \arrow[rr, "U(d(\varphi))"'] \arrow[dr, "p_i"'] & & U(d(j)) \arrow[ul, "\gamma_j"'] \arrow[ur, "\alpha_j"'] \arrow[dl, "p_j"] & \\
& A & &
\end{tikzcd}$$

L'unicité de la flèche p montre que c'est le seul cocône sur d dont l'image par U soit γ. Il reste à démontrer que c'est un cocône colimite. Pour cela, considérons un autre cocône sur d de sommet $\langle q \rangle_Y$ dans $\mathcal{C}/A$, d'arêtes $[\alpha_i]$. Comme les γ_i forment un cocône colimite dans $\mathcal{C}$, on a une unique flèche $\psi : X \to Y$ telle que $\psi \circ \gamma_i = \alpha_i$ pour tout i. Mais alors, $q \circ \psi \circ \gamma_i = q \circ \alpha_i = p_i$, et la propriété d'unicité de p montre que $q \circ \psi = p$. Ainsi, U crée les colimites.

VI.

(a) Un système dynamique discret n'est rien d'autre qu'un préfaisceau sur le monoïde $(\mathbb{N}, +, 0)$ vu comme une catégorie à un seul objet.([22]) En effet, un tel préfaisceau consiste en la donnée d'un ensemble X, et pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$ d'une application $\varphi_n : X \to X$, de telle sorte que $\varphi_0 = 1_X$ et $\varphi_{n+m} = \varphi_n \circ \varphi_m$, pour tous entiers n et m. Un tel préfaisceau étant donné, le couple (X, φ_1) est un système dynamique discret. Réciproquement, si (X, φ) est un système dynamique discret, le foncteur qui associe l'application φ^n à chaque entier n est un foncteur $\mathbb{N}^{op} \to \mathbf{Ens}$. Ces deux constructions sont clairement réciproques l'une de l'autre. Les morphismes du préfaisceau associé à (X, φ) vers le préfaisceau associé à (Y, φ), sont les applications $f : X \to Y$ telles que pour tout entier n, on ait $\varphi^n \circ f = f \circ \varphi^n$. Cette condition est clairement équivalente (par récurrence sur n) à

22. On notera que les catégories $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^{op}$ sont isomorphes (via l'application identique de $\mathbb{N}$) car l'addition de $\mathbb{N}$ est commutative.

$\varphi \circ f = f \circ \varphi$, par associativité de la composition. La catégorie des systèmes dynamiques discrets est donc un topos de préfaisceaux.

(b) Un sous-système dynamique (sous-préfaisceau) de (X, φ) est juste une partie A de X stable par φ. On sait que Ω doit contenir un élément pour chaque statut possible d'un élément x de X par rapport à A. Les possibilités sont les suivantes : (1) il existe un plus petit entier n tel que $\varphi^n(x) \in A$, (2) pour tout entier n, $\varphi^n(x) \notin A$. Les éléments de Ω sont donc les entiers, plus un élément qu'on notera ∞ correspondant au cas (2). La dynamique $\varphi : \Omega \to \Omega$ est définie par $\varphi(0) = 0$, car si $x \in A$, $\varphi(x) \in A$, $\varphi(n+1) = n$ et $\varphi(\infty) = \infty$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop left] & 1 \arrow[l, mapsto] & 2 \arrow[l, mapsto] & 3 \arrow[l, mapsto] & \cdots \arrow[l, mapsto] & & \infty \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

Le système dynamique $\mathbf{1}$ (objet final) est bien entendu un ensemble à un élément qui est fixe par la dynamique. On peut bien sûr réinterpréter les éléments de Ω comme des cribles sur l'unique élément de la catégorie $\mathbb{N}$. L'élément 0 est le crible maximal, et l'élément ∞ est le crible vide. La valeur « vrai » est donc le sous-système dynamique $\top = \{0\}$ et la valeur « faux » le sous-système dynamique $\perp = \{\infty\}$. Un morphisme de $\mathbf{1}$ vers un système dynamique (X, φ) (élément « global » de (X, φ)) est déterminé par l'image de l'unique élément de $\mathbf{1}$, qui doit être un point de X fixe par φ. On voit donc qu'il n'y a pas dans Ω d'autres éléments globaux que $\top$ et $\perp$. Le topos $\mathcal{D}$ est donc bivalué.

(c) Le système dynamique X en question ne peut être que le suivant :

$$\begin{tikzcd} a \arrow[loop left] & b \arrow[l, mapsto] \end{tikzcd}$$

où a est l'élément global. Les sous-systèmes dynamiques sont $\emptyset$, $\{a\}$ et X. L'algèbre de Heyting externe $\mathbf{Sub}(X)$ a trois éléments et ne peut donc pas être une algèbre de Boole.

(d) La conjonction $\wedge$ de l'algèbre de Heyting $\mathbf{Sub}(X)$ est tout simplement l'intersection $\cap$ (démontré en cours pour les catégories de préfaisceaux en général). Il en résulte que dans l'algèbre de Heyting $\mathbf{Sub}(X)$, l'implication est caractérisée par $A \cap B \subset C \Leftrightarrow A \subset B \Rightarrow C$. $B \Rightarrow C$ ne peut donc être que le plus grand sous-système dynamique de X dont l'intersection avec B est contenue dans C (c'est-à-dire la réunion de tous les sous-systèmes ayant cette propriété). Le plus petit élément de $\mathbf{Sub}(X)$, c'est-à-dire $\perp$, est bien sûr $\emptyset$. En conséquence, la négation de B, c'est-à-dire $B \Rightarrow \perp$, est le plus grand sous-système dynamique de X dont l'intersection avec B soit contenue dans $\emptyset$, c'est-à-dire soit disjoint de B.

(e) Supposons d'abord que $\mathbf{Sub}(X)$ soit une algèbre de Boole. On a alors $A \vee \neg A = X$ pour tout sous-système dynamique A de X. On sait (vu en cours) que la disjonction $\vee$ est la réunion $\cup$. Autrement-dit, dans le cas présent, $\neg A$ est juste le complémentaire de A au sens ordinaire. Soit x un élément de A. L'ensemble $A = \{\varphi(x), \varphi^2(x), \dots\}$ est un sous-système dynamique de X. Son complémentaire est donc un sous-système dynamique, et doit donc être stable par φ. x ne peut pas être dans ce complémentaire, car $\varphi(x) \in A$. On a donc $x \in A$ et il existe alors un entier non nul k tel que $\varphi^k(x) = x$.

Réciproquement, supposons que tout élément de X soit périodique. Soit A un sous-système dynamique de X. Soit $x \notin A$. Comme x est périodique, on a $x = \varphi^k(x) = \varphi^{pk}(x)$ pour un certain $k > 0$ et pour tout entier p. Il en résulte que $\varphi^{pk}(x) \notin A$. Comme p est arbitraire, il ne peut pas exister d'entier n tel que $\varphi^n(x) \in A$. Il en résulte que le sous-système dynamique $\{x, \varphi(x), \varphi^2(x), \dots\}$ est disjoint de A, donc contenu dans $\neg A$. Comme x est un point quelconque du complémentaire de A, on voit que $A \cup \neg A = X$, donc que $\mathbf{Sub}(X)$ est une algèbre de Boole.

(f) La topologie (de lawvere-Tierney) de la double négation est la même que la topologie (de Grothendieck) dense. Or, pour cette dernière, les cribles couvrants sont les γ tels que pour toute flèche f, il y ait une flèche g telle que $f \circ g \in \gamma$. Le crible vide n'est donc pas couvrant, mais tous les autres cribles le sont. En effet, en notant φ la dynamique de Ω, une flèche f ne peut être que de la forme φ^n pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Tout crible couvrant doit donc contenir une flèche φ^p avec $p \geq n$. Autrement-dit, pour être couvrant, un crible doit contenir un φ^p pour p aussi grand qu'on veut. Tous les cribles non vides sur le monoïde $\mathbb{N}$ ont cette propriété, car ils sont tous de la forme $\{\varphi^n, \varphi^{n+1}, \dots\}$. En conséquence, tous les cribles non vides sont envoyés par $\neg\neg$ sur le crible maximal. Quant au crible vide, qui est un élément global de Ω, comme $\neg\neg$ est un morphisme, il ne peut être envoyé que sur un élément global. Cet élément ne pouvant pas être le crible maximal puisque $\emptyset$ n'est pas couvrant, ce ne peut être que $\emptyset$. On a donc $\neg\neg(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\neg\neg(\infty) = \infty$.

(g) Un préfaisceau ζ (système dynamique discret) est un $\neg\neg$-faisceau si et seulement si tout crible couvrant (c'est-à-dire non vide d'après la question **(f)**) est envoyé par ζ sur un cône limite. Or le crible $n = \{\varphi^n, \varphi^{n+1}, \dots\}$, vu comme un cocône, a pour image par $\zeta = (X, \varphi)$ le cône $\zeta(n)$ ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\varphi^n"'] \arrow[dr, "\varphi^{n+1}"] \arrow[drr, "\varphi^{n+2}"] & & & \\
X \arrow[r, "\varphi"'] & X \arrow[r, "\varphi"'] & X \arrow[r, "\varphi"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Un tel cône ne peut être un cône limite que si φ est une bijection. En effet, un cône de sommet Y sur la base du cône $\zeta(n)$ est déterminé par la donnée d'une flèche $f : Y \to X$, les autres flèches étant $\varphi \circ f, \varphi^2 \circ f$, etc... Si le cône $\zeta(n)$ est un cône limite, f se relève de manière unique le long de φ^n, et tout relèvement sera un morphisme de cônes. φ^n doit donc être une bijection. Il en est alors de même de φ. Réciproquement, si φ est une bijection, le diagramme ci-dessus n'est composé que de bijections est c'est alors clairement un cône limite.

Autre démonstration : On peut utiliser le fait que $\zeta = (X, \varphi)$ est un $\neg\neg$-faisceau si et seulement si tout morphisme du préfaisceau n vers ζ se prolonge de manière unique en un morphisme de 0 vers ζ. Rappelons que les cribles sont tous des sous-préfaisceaux du préfaisceau standard, lequel est ici le crible maximal 0 vu comme un préfaisceau. Ce préfaisceau standard est en fait l'ensemble $\mathbb{N}$ avec la fonction successeur $s = (x \mapsto x + 1)$ comme dynamique, et le sous-préfaisceau n est le sous-ensemble (sous-système dynamique) $\{n, n + 1, \dots\}$ de $\mathbb{N}$. La propriété de prolongement unique dans le cas $n = 1$ implique que tout élément $x \in X$ est de la forme $\varphi(y)$ d'une unique façon, autrement-dit que φ est bijective. Réciproquement, si φ est bijective, l'unique prolongement de $f : n \to X$ est $\varphi^{-n} \circ f \circ s^n : 0 \to X$.([23])

(h) Il s'agit de trouver un objet non projectif dans le topos $\mathbf{Sh}_{\neg\neg}(\mathcal{D})$. En fait, l'objet final $\mathbf{1}$ (qui est un faisceau) fait l'affaire. En effet, considérons n'importe quel système dynamique (X, φ) non vide n'ayant aucun point fixe et dont la dynamique est une bijection (il en existe, comme par exemple $(\mathbb{Z}, \varphi)$, avec $\varphi(x) = x + 1$). Il est immédiat que l'unique morphisme $X \to \mathbf{1}$ est un épimorphisme (dans $\mathbf{Sh}_{\neg\neg}(\mathcal{D})$). Cet épimorphisme n'a pas de section, car X n'a pas d'élément global. L'objet $\mathbf{1}$ n'est donc pas projectif (dans $\mathbf{Sh}_{\neg\neg}(\mathcal{D})$).([24])

(i) La faute vient de ce qu'on a confondu $\mathbf{Sub}_{\mathcal{D}}((\mathbb{Z}, \varphi))$ avec $\mathbf{Sub}_{\mathbf{Sh}_{\neg\neg}(\mathcal{D})}((\mathbb{Z}, \varphi))$. Les éléments de ce second ensemble ne sont pas tous les sous-systèmes dynamiques de $(\mathbb{Z}, \varphi)$ (il y en a une infinité) mais seulement ceux qui sont $\neg\neg$-clos (il n'y en a que deux : le sous-système vide et le sous-système plein).

23. Interprétation « dynamique » : les systèmes dynamiques discrets qui sont des $\neg\neg$-faisceaux sont ceux pour lesquels on peut remonter indéfiniment dans le temps d'une manière déterministe.

24. Il ne l'est pas non plus dans $\mathcal{D}$.

Problème 6

I.

(a) S'il existait une transformation naturelle $\theta : \mathcal{P} \to \mathcal{I}$, on aurait une application $\mathcal{P}(\emptyset) \to \emptyset$, ce qui est impossible.

(b) Soit $\theta : \mathcal{I} \to \mathcal{P}$ une transformation naturelle. Soit $\mathbf{1} = \{*\}$ un ensemble à un élément, et soit $f : \mathbf{1} \to X$ une application, et posons $x = f(*)$. On a le carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r, "\theta_{\mathbf{1}}"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{P}(\mathbf{1}) \arrow[d, "\mathcal{P}(f)"] \\ X \arrow[r, "\theta_X"'] & \mathcal{P}(X) \end{tikzcd}$$

où $\mathcal{P}(f) = f_\flat$ est l'application image directe existentielle. Comme $\mathcal{P}(\mathbf{1}) = \{\emptyset, \mathbf{1}\}$ n'a que deux éléments, on a nécessairement soit $\theta_{\mathbf{1}}(*) = \emptyset$ ou $\theta_{\mathbf{1}}(*) = \mathbf{1} = \{*\}$. Dans le premier cas, on a $\theta_X(x) = \mathcal{P}(f)(\emptyset) = \emptyset$ et dans le deuxième cas, $\theta_X(x) = \mathcal{P}(f)\{*\} = \{x\}$. Il n'y a donc que deux candidats possibles pour θ, d'une part l'application $X \to \mathcal{P}(X)$ qui envoie tout x sur $\emptyset$ et d'autre part l'application qui envoie x sur $\{x\}$. Il s'agit bien sûr de deux transformations naturelles. C'est évident pour la première, et cela résulte du fait que $\mathcal{P}(f)(\{x\}) = \{f(x)\}$ pour toute application $f : X \to Y$, pour la seconde.

(c) Les choses marchent de la même façon que dans **(b)**, sauf que l'image directe universelle $f_\sharp : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ n'envoie pas $\emptyset$ sur $\emptyset$, mais envoie X sur Y. De même, elle n'envoie pas $\{x\}$ sur $\{f(x)\}$, mais le complémentaire de $\{x\}$ sur le complémentaire de $\{f(x)\}$. Il y a à nouveau deux transformations naturelles, celle qui envoie $x \in X$ sur la partie pleine de X, et celle qui envoie x sur le complémentaire de $\{x\}$ dans X.

II.

(a) Soit $d : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ un diagramme dans $\mathcal{C}$. Les objets $d(i)$ de ce diagramme sont de la forme (X_i, p_i), et ses flèches $\varphi : (X_i, p_i) \to (X_j, p_j)$ sont telles que $p_j \circ \varphi = \varphi \circ p_i$. Supposons qu'il existe un cône limite $(\pi_i)_i$ de sommet L sur le diagramme $\mathcal{U} \circ d$ dont les objets sont les X_i et les flèches les mêmes que celles du diagramme d :

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "\pi_i"'] \arrow[d, "\pi_j"] \\ X_i \arrow[r, "\varphi"'] & X_j \end{tikzcd}$$

Un objet de $\mathcal{C}$ dont l'image par $\mathcal{U}$ est L ne peut être que de la forme (L, p). Or la famille des p_i forme un morphisme (transformation naturelle) du diagramme d vers lui-même (puisque $p_j \circ \varphi = \varphi \circ p_i$ pour toute flèche φ du diagramme). Il existe donc une unique flèche $p : L \to L$ telle que $\pi_i \circ p = p_i \circ \pi_i$. De plus, on a $\pi_i \circ p \circ p = p_i \circ \pi_i \circ p = p_i \circ p_i \circ \pi_i = p_i \circ \pi_i = \pi_i \circ p$. Comme ceci est vrai pour tout i, on a $p \circ p = p$, et (L, p) est un objet de $\mathcal{C}$ de même que les π_i sont des flèches de $\mathcal{C}$. On a donc construit l'unique cône sur d dont l'image par $\mathcal{U}$ soit le cône $(\pi_i)_i$ donné dans **Ens**.

Il reste à vérifier que ce cône est un cône limite dans $\mathcal{C}$. Soit donc $(\lambda_i : (Y, q) \to (X_i, p_i))_i$ un cône quelconque sur d dans $\mathcal{C}$. On a $\varphi \circ \lambda_i = \lambda_j$ pour toute flèche $\varphi : (X_i, p_i) \to (X_j, p_j)$ du diagramme et on a $p_i \circ \lambda_i = \lambda_i \circ q$. Comme le cône de sommet L est un cône limite dans **Ens**, il existe une unique flèche $\psi : Y \to L$ telle que $\pi_i \circ \psi = \lambda_i$. Il reste juste à prouver que $p \circ \psi = \psi \circ q$. On a $\pi_i \circ p \circ \psi = p_i \circ \pi_i \circ \psi = p_i \circ \lambda_i = \lambda_i \circ q = \pi_i \circ \psi \circ q$.

III.

(a) En fait, σ est un objet initial dans C/I, comme le montre le diagramme :

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "f"] & \\ S \arrow[rr, "f"'] & & X \end{tikzcd}$$

Il en résulte immédiatement que $\sigma + \sigma$ est isomorphe à σ.

(b) Si $\mathcal{V}$ préservait les colimites, $\mathcal{V}(\sigma) + \mathcal{V}(\sigma)$ serait isomorphe à $\mathcal{V}(\sigma)$ dans **Ens**, ce qui n'est pas le cas car $\mathcal{V}(\sigma) = S$ et $S + S$ a deux éléments alors que S n'en a qu'un seul. S'il créait les colimites, il créerait en particulier les petites colimites. Comme **Ens** a toutes les petites colimites, c'est impossible.([25])

(c) Posons $S = \{*\}$, et notons aussi $*$ l'élément $f(*) \in X$ pour tout objet $\langle f \rangle_X^S$ de C/I. Soit d un diagramme dans C/I. Soit un cocône de sommet L sur ce diagramme dans C/I, qui est un cocône colimite quand il est vu dans **Ens**. Soit un autre cocône sur d de sommet Z dans C/I. Dans **Ens**, il y a une seule flèche $f : L \to Z$ qui fait commuter le tout. Si le diagramme d a au moins un objet X, alors $*$ de X va sur $*$ aussi bien dans L que dans Z. La commutativité entraîne alors que $f(*) = *$, et on a aussi une colimite dans C/I. Si le diagramme d est vide, sa colimite dans **Ens** est l'ensemble vide qui n'est l'image d'aucun objet de C/I.

IV.

(a) Il s'agit de voir que f envoie $F((X,p))$ dans $F((Y,q))$, or $q(f(x)) = f(p(x)) = f(x)$.

(b) Il s'agit de trouver un objet (Γ,γ) de $\mathcal{C}$ et un élément élément ι de $F((\Gamma,\gamma))$, tels que l'application :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}((\Gamma,\gamma),(X,p)) \arrow[r, "\theta"] & F((X,p)) \\ \varphi \arrow[r, mapsto] & F(\varphi)(\iota) \end{tikzcd}$$

soit bijective (car $\mathcal{C}^{op}((X,p),(\Gamma,\gamma)) = \mathcal{C}((\Gamma,\gamma),(X,p))$). Il suffit de prendre $\Gamma = \{*\}$, avec bien sûr, $\gamma(*) = *$ et $\iota = *$. Soit x un élément de $F((X,p))$, c'est-à-dire un élément de X tel que $p(x) = x$. L'application $\varphi : \Gamma \to X$ qui envoie $*$ sur x est une flèche de $\mathcal{C}$, puisque $p(\varphi(*)) = p(x) = x = \varphi(*) = \varphi(\gamma(*))$, et c'est la seule qui vérifie $x = F(\varphi)(\iota)$, car $F(\varphi)(\iota) = \varphi(*)$ par définition de F. L'application θ est donc bijective.

V.

(a) Si F est représentable, son classifiant est soit $(X,*)$, soit $(Y,*)$. Si c'est $(X,*)$, on a une bijection $\mathcal{C}(Z,X) \to S = F(Z)$, pour tout objet Z de $\mathcal{C}$. Or $\mathcal{C}(Y,X)$ a zéro élément alors que $F(Y) = S$ en a un. Si c'est $(Y,*)$, on a une bijection $\mathcal{C}(Z,Y) \to S$ pour tout Z. Or, $\mathcal{C}(X,Y)$ a deux éléments alors que $F(X) = S$ n'en a qu'un. F n'est donc pas représentable.

VI.

(a) Le coégaliseur en question est le quotient de $\mathbb{Z}$ par la relation d'équivalence engendrée par les équations $x \simeq x + a \simeq x + b$. Ceci entraîne $x \simeq x + an$ pour tout entier relatif n. Soit d le PGCD de a et b. L'équation $x \simeq x + d$ est conséquence des précédentes, car d'après le théorème de Bézout, il existe de entiers u et v tels que $au + bv = d$. On a donc $x + d \simeq x + au + bv \simeq x + au \simeq x$. Réciproquement, l'équation $x \simeq x + d$ entraîne $x \simeq x + a \simeq x + b$, puisque a et b sont des multiples de d. Le coégaliseur est donc le quotient de $\mathbb{Z}$ par la relation engendrée par $x \simeq x + d$. Il est en bijection avec $\mathbb{Z}$ si $d = 0$ (c'est-à-dire si $a = b = 0$) et a d élements sinon.

25. Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ qui crée les $\mathcal{I}$-limites les préserve dès que $\mathcal{D}$ a toutes les $\mathcal{I}$-limites.

Problème 7

I.

On a $\pi_6 \circ f_6 \circ \pi_1 = \pi_3 \circ \pi_5 \circ f_5 = \pi_3 \circ \pi_5 \circ g_5 = \pi_6 \circ g_6 \circ \pi_1$, donc $\pi_6 \circ f_6 = \pi_6 \circ g_6$ car π_1 est un épimorphisme. Soit $\varphi : H \to Z$ telle que $\varphi \circ f_6 = \varphi \circ g_6$. Il s'agit de montrer qu'il existe une unique flèche $\psi : K \to Z$ telle que $\psi \circ \pi_6 = \varphi$.

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[rr, "\pi_4"] \arrow[d, shift right, bend right, "f_2"'] \arrow[d, shift left, bend left, "g_2"] & & C \arrow[d, shift right, bend right, "f_3"'] \arrow[d, shift left, bend left, "g_3"] \\
D \arrow[r, bend left, "f_5"] \arrow[r, bend right, "g_5"'] \arrow[dd, "\pi_1"'] & E \arrow[rr, "\pi_5"] \arrow[dd, "\pi_2"] & & F \arrow[dl, "\theta"] \arrow[dd, "\pi_3"] \\
 & & Z & \\
G \arrow[r, bend left, "f_6"] \arrow[r, bend right, "g_6"'] & H \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "\pi_6"'] & & K \arrow[ul, dotted, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

Comme $\varphi \circ \pi_2 \circ f_5 = \varphi \circ f_6 \circ \pi_1 = \varphi \circ g_6 \circ \pi_1 = \varphi \circ \pi_2 \circ g_5$, il existe une flèche $\theta : F \to Z$, telle que $\theta \circ \pi_5 = \varphi \circ \pi_2$. Mais alors $\theta \circ f_3 \circ \pi_4 = \theta \circ \pi_5 \circ f_2 = \varphi \circ \pi_2 \circ f_2 = \varphi \circ \pi_2 \circ g_2 = \theta \circ \pi_5 \circ g_2 = \theta \circ g_3 \circ \pi_4$, donc $\theta \circ f_3 = \theta \circ g_3$, car π_4 est un épimorphisme. Il existe donc une flèche $\psi : K \to Z$ telle que $\psi \circ \pi_3 = \theta$. On a alors $\psi \circ \pi_6 \circ \pi_2 = \psi \circ \pi_3 \circ \pi_5 = \theta \circ \pi_5 = \varphi \circ \pi_2$. Comme π_2 est un épimorphisme on a $\psi \circ \pi_6 = \varphi$. Si $\psi' : K \to Z$ est telle que $\psi' \circ \pi_6 = \varphi$, on a $\psi \circ \pi_3 \circ \pi_5 = \psi \circ \pi_6 \circ \pi_2 = \varphi \circ \pi_2 = \psi' \circ \pi_3 \circ \pi_5$. Comme π_3 et π_5 sont des épimorphismes, on voit que $\psi = \psi'$.

II.

Considérons les flèches $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définies par $f(x) = x$ et $g(x) = x + 1$. Dans un coégaliseur de f et g, les éléments x et $x + 1$ sont identifiés, et ce coégaliseur est donc un singleton. Dans un coégaliseur de $f \times f$ et $g \times g$, les paires de la forme (x, y) sont identifiées avec les paires de la forme $(x+1, y+1)$. Deux éléments (x, y) et (u, v) sont donc identifiés dans le coégaliseur si et seulement si $y - x = v - u$. Le coégaliseur de $f \times f$ et $g \times g$ a donc une infinité d'éléments (puisque la différence $y - x$ peut prendre toute valeur dans $\mathbb{Z}$) et il n'est pas le produit de deux singletons.

Autre exemple : Notons $\mathbf{1}$ et $\mathbf{2}$ des ensembles ayant respectivement un et deux éléments. Soient $f, g : \mathbf{1} \to \mathbf{2}$ les deux application (distinctes) de $\mathbf{1}$ vers $\mathbf{2}$. Le coégaliseur de f et g est un singleton, puisqu'on identifie les deux éléments de $\mathbf{2}$. Les flèches $f \times f$ et $g \times g$ sont des flèches de $\mathbf{1} \times \mathbf{1}$ vers $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$ qui a quatre éléments. Comme $\mathbf{1} \times \mathbf{1} \simeq \mathbf{1}$, seuls deux éléments de $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$ sont identifiés, ce qui fait que le coégaliseur de $f \times f$ et $g \times g$ a trois éléments et ne peut pas être le carré d'un singleton.([26])

26. On peut prouver que si f et g ont une section commune (on dit alors que (f, g) est une paire reflexive), alors $\pi \times \pi$ est un coégaliseur de $f \times f$ et $g \times g$. Comme $f \times f$ et $g \times g$ ont encore une section commune, on voit que les coégaliseurs reflexifs sont préservés par les produits. Ceci est un cas particulier du problème plus général de la commutation des limites avec les colimites.

III.

(a) Supposons que $f(x) = \neg f(x)$. Il s'agit de prouver $\perp$. D'après l'hypothèse, on a $f(x) \Rightarrow (f(x) \Rightarrow \perp)$, donc $f(x) \wedge f(x) \Rightarrow \perp$, ou encore $f(x) \Rightarrow \perp$. On a donc prouvé $\neg f(x)$. Comme $f(x) = \neg f(x)$, on a aussi prouvé $f(x)$. Mais alors on a prouvé $(f(x) \Rightarrow \perp) \wedge f(x)$, donc $\perp$ par modus ponens.

(b) Soit $f : X \to \Omega$ un cône limite sur le diagramme en question. On a $\neg \circ f = f$, donc l'énoncé $\neg f(x) = f(x)$ est vrai dans le contexte $(x \in X)$. Comme on a prouvé en **(a)** que cet énoncé entraîne $\perp$, on a prouvé $\perp$ dans le contexte $(x \in X)$, ce qui prouve que X est initial (sémantique de Kripke-Joyal).

IV.

On a au moins les cinq flèches suivantes dans $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[loop above, "1_E"] \arrow[loop below, "r\circ s"] \arrow[r, bend left, "s"] & B \arrow[l, bend left, "r"] \arrow[loop right, "1_B"]
\end{tikzcd}$$

qui sont distinctes, car on a $r \circ s \neq 1_E$ (sinon $\mathcal{C}$ ne serait pas <u>librement</u> engendrée par les conditions données). Cet ensemble de flèches comprend les deux identités et est stable par composition puisque $(r \circ s) \circ r = r \circ (s \circ r) = r$, et de même $s \circ (r \circ s) = s$. Il n'y a donc pas d'autre flèche dans $\mathcal{C}$. Remarquer que $r \circ s$ est idempotent.([27])

(b) L'objet final $\mathbf{1}$ est un préfaisceau ayant un élément de chaque sorte. L'objet final est donc :

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[d, bend left, mapsto] \\
\bullet \arrow[u, bend left, mapsto]
\end{tikzcd}$$

Comme $s \circ r = 1_B$, on voit que tout crible sur B qui contient la flèche s contient aussi la flèche 1_B. Il n'y a donc que deux cribles sur B, à savoir le crible maximal $\{1_B, s\}$ et le crible vide. Si un crible sur E contient r, il contient $r \circ s$, et il n'y a pas d'autre contrainte puisque les seules flèches de cible B (source de r) sont s et 1_B, et que toute composition de la forme $s \circ f$ redonne soit 1_B, soit s. On a donc trois cribles sur E, qui sont le crible maximal $\{1_E, r, r \circ s\}$, le crible $\{r, r \circ s\}$ et le crible vide. Rappelons que la flèche $\Omega(r)$ est définie, pour tout crible γ sur E, par $\Omega(r)(\gamma) = \{f : \bullet \to B \mid r \circ f \in \gamma\}$. On voit donc que $\Omega(r)(\{r, r \circ s\}) = \{1_B, s\}$. Par ailleurs, les cribles maximaux vont sur les cribles maximaux et les cribles vides vont sur les cribles vides. Ω est donc le préfaiscau suivant :

$$\begin{tikzcd}
\{1_E, r, r \circ s\} \arrow[dr, bend left, mapsto] & & \{r, r \circ s\} \arrow[dl, mapsto] & \emptyset \arrow[d, bend left, mapsto] \\
& \{1_B, s\} \arrow[ul, bend left, mapsto] & & \emptyset \arrow[u, bend left, mapsto]
\end{tikzcd}$$

Bien sûr la flèche $\top : \mathbf{1} \to \Omega$ envoie les deux éléments de $\mathbf{1}$ sur les deux cribles maximaux en respectant les sortes.

(c) Pour tout objet X de $\mathcal{C}$, le préfaisceau standard $\hat{X}$ est composé d'un élément universel de sorte X (qui n'est autre que $1_X \in \hat{X}(X) = \mathcal{C}(X, X)$) et de tous ses attributs (dont lui-même). $\hat{B}$ n'a donc pas d'autres éléments que 1_B (de sorte B) et s (de sorte E), et $\hat{B}$ est donc isomorphe à $\mathbf{1}$. L'élément universel de $\hat{E}$ est 1_E et ses attributs sont 1_E (de sorte E), r (de sorte B) et $r \circ s$ (de sorte E). $\hat{E}$ est donc :

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[dr, bend left, mapsto] & & \bullet \arrow[dl, mapsto] \\
& \bullet \arrow[ul, bend left, mapsto] &
\end{tikzcd}$$

27. Un idempotent de cette sorte est dit « scindé ».

Comme par ailleurs, dans toute catégorie de foncteurs, les sommes se calculent au dessus de chaque objet, et comme la somme dans **Ens** est l'union disjointe, on voit (directement sur les dessins) que Ω est isomorphe à $\hat{E} + \hat{B}$.

(d) On a bien sûr la topologie minimale (seuls les cribles maximaux sont couvrants) et la topologie maximale (tous les cribles sont couvrants). La topologie dense est distinctes des deux précédentes. En effet, $\{r, r \circ s\}$ couvre E pour la topologie dense, puisque si f est de cible E, on peut toujours obtenir soit r soit $r \circ s$ en composant f à droite : $1_E \circ r = r$, $r \circ 1_B = r$ et $r \circ s \circ 1_E = r \circ s$. Bien entendu, un crible vide n'est jamais couvrant pour la topologie dense. On a donc au moins les trois topologies minimale, dense et maximale. Il n'y en a pas d'autre. En effet, on sait que tout crible plus fin (ayant plus de flèches) qu'un crible couvrant doit être couvrant. La seule possibilité consisterait donc à ajouter à la topologie dense l'un des deux cribles vides et pas l'autre. Toutefois, si le crible vide sur B devient couvrant, alors le crible vide sur E doit aussi être couvrant, à cause de la présence de la flèche s (une topologie doit être un sous-préfaisceau de Ω). La réciproque est aussi vraie à cause de la flèche r. Il n'y a donc que trois topologies de Grothendieck sur $\mathcal{C}$.

(e) Soit ζ un préfaisceau. Les cribles maximaux étant toujours transformés en cône limites par ζ, il suffit de chercher à quelle condition le crible $\{r, r \circ s\}$ est transformé en cône limite, autrement-dit à quelle condition le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \zeta(E) \arrow[dl, "\zeta(r\circ s)"'] \arrow[dr, "\zeta(r)"] & \\ \zeta(E) & & \zeta(B) \arrow[ll, "\zeta(s)"] \end{tikzcd}$$

est un cône limite de sommet $\zeta(E)$ sur le diagramme $\zeta(E) \xleftarrow{\zeta(s)} \zeta(B)$. Comme le cône

$$\begin{tikzcd} & \zeta(B) \arrow[dl, "\zeta(s)"'] \arrow[dr, "1"] & \\ \zeta(E) & & \zeta(B) \arrow[ll, "\zeta(s)"] \end{tikzcd}$$

est clairement un cône limite sur ce même diagramme, on voit que $\zeta(r)$ doit être une bijection, ce qui est équivalent à dire que $\zeta(s)$ est une bijection, puisque $\zeta(r) \circ \zeta(s) = 1_{\zeta(B)}$.

V.

(a) Intuitivement, A est l'ensemble des parties de Y qui sont stables par la relation $\sim$ définie par $y \sim y'$ si et seulement si il existe $x \in X$ tel que $y = f(x)$ et $y' = g(x)$.

Soit $\varphi : Z \to \mathcal{P}(Y)$ une flèche telle que $\mathcal{P}(f) \circ \varphi = \mathcal{P}(g) \circ \varphi$. L'énoncé $\mathcal{P}(f)(\varphi(z)) = \mathcal{P}(g)(\varphi(z))$ est alors vrai dans le contexte $(z \in Z)$. Par ailleurs, l'énoncé $x \in \mathcal{P}(f)(\varphi(z))$ est équivalent à $f(x) \in \varphi(z)$. On voit donc que l'énoncé $E[\varphi(z)/S]$ est vrai dans le contexte $(z \in Z)$. Mais ceci implique que φ se relève le long de j, de manière bien sûr unique puisque j est un monomorphisme.

(b) Le foncteur $\mathcal{P} : \mathcal{T}^{op} \to \mathcal{T}$ étant un adjoint à droite, il préserve les limites et en particulier les égaliseurs. Or si π est un coégaliseur de f et g dans $\mathcal{T}$, c'est un égaliseur de f et g dans $\mathcal{T}^{op}$. En conséquence son image par $\mathcal{P}$ est un égaliseur dans $\mathcal{T}$. Il en résulte que $\mathcal{P}(\pi)$ est un monomorphime et qu'il est équivalent à j puisque tous deux sont des égaliseurs de $\mathcal{P}(f)$ et $\mathcal{P}(g)$.

Il en résulte que A et $\mathcal{P}(Q)$ sont isomorphes, donc que A peut être vu comme l'ensemble des parties de Q. Intuitivement, Q est l'ensemble des classes d'équivalences pour la relation d'équivalence $\simeq$ sur Y engendrée par $\sim$, donc $\mathcal{P}(Q)$ peut s'identifier à l'ensemble des réunions quelconque de ces classes d'équivalences. Ces réunions sont précisément les sous-ensembles de Y stables par la relation $\sim$ (ou, ce qui revient au même, stables par la relation $\simeq$).

(c) $\gamma(y)$ est intuitivement l'intersection de toutes les parties S de Y qui sont stables par $\simeq$ et qui contiennent y. $\gamma(y)$ est donc la classe d'équivalence de y pour la relation d'équivalence $\simeq$.

Il suffit de montrer que $E[\gamma(y)/S]$ est vrai dans le contexte $(y \in Y)$, c'est-à-dire que pour tout $x \in X$, $f(x) \in \gamma(y)$ est équivalent à $g(x) \in \gamma(y)$. Or, $f(x) \in \gamma(y)$ s'écrit aussi $\forall_{S\in\mathcal{P}(Y)}\ (E \wedge (y \in S)) \Rightarrow f(x) \in S$. Supposons que ce dernier énoncé soit vrai. Il s'agit de montrer $\forall_{S\in\mathcal{P}(Y)}\ (E \wedge (y \in S)) \Rightarrow g(x) \in S$. Soit donc $S \in \mathcal{P}(Y)$, tel que E et $y \in S$. On a alors $f(x) \in S$ par hypothèse. Comme on a E, $f(x) \in S$ est équivalent à $g(x) \in S$. On a donc $g(x) \in S$. La réciproque (en échangeant les rôles de f et g) se traite de même.

(d) $k(y_0)$ est bien entendu l'ensemble des éléments de Y qui ont même image que y_0 par φ. C'est la classe d'équivalence de y_0 pour la relation d'équivalence « avoir la même image par φ ».

L'énoncé $E[k(y_0)/S]$ est $\forall_{x\in X}\ f(x) \in k(y_0) \Leftrightarrow g(x) \in k(y_0)$. Soit donc $x \in X$ tel que $f(x) \in k(y_0)$. On a $\varphi(f(x)) = \varphi(y_0)$, donc $\varphi(g(x)) = \varphi(y_0)$, donc $g(x) \in k(y_0)$. De même, en échangeant les rôles de f et g.

(e) D'après la question précédente, la flèche $k : Y \to \mathcal{P}(Y)$ se relève le long de j en une flèche $\mu : Y \to A$, et on a $j(\mu(y_0)) = k(y_0)$ dans le contexte $(y_0 \in Y)$. Soit maintenant $y \in Y$, tel que $y \in \gamma(y_0) = \{y' \in Y \mid \forall_{S\in\mathcal{P}(Y)}\ (E \wedge (y_0 \in S)) \Rightarrow y' \in S\}$. On a donc $\forall_{S\in\mathcal{P}(Y)}\ (E \wedge (y_0 \in S)) \Rightarrow y \in S$. En particulier, en faisant $S = k(y_0)$ on a $(E[k(y_0)/S] \wedge (y_0 \in k(y_0))) \Rightarrow y \in k(y_0)$. Comme il est clair que $y_0 \in k(y_0)$, et comme on a déjà prouvé $E[k(y_0)/S]$, on voit que $y \in k(y_0)$.

Ce résultat dit que toute classe d'équivalence pour $\simeq$ est incluse dans l'une des classes d'équivalences pour la relation « avoir la même image par φ ». C'est pour cette raison que φ va passer au quotient dans la question suivante.

(f) Il suffit de montrer que φ se factorise à travers ρ, factorisation qui sera nécessairement unique puisque ρ est un épimorphisme. D'après le principe de description, il suffit de montrer que $\forall_{u\in\mathrm{Im}(\theta)}\ \exists!_{z\in Z}\ \forall_{y\in Y}\ \rho(y) = u \Rightarrow \varphi(y) = z$. On aura alors en effet une flèche $\lambda : \mathrm{Im}(\theta) \to Z$ telle que $\forall_{u\in\mathrm{Im}(\theta)}\ \forall_{y\in Y}\ \rho(y) = u \Rightarrow \varphi(y) = \lambda(u)$. Or ce dernier énoncé entraîne $\forall_{y\in Y}\ \varphi(y) = \lambda(\rho(y))$, c'est-à-dire $\lambda \circ \rho = \varphi$.

Soit donc $u \in \mathrm{Im}(\theta)$. Comme ρ est un épimorphisme, il existe $y_0 \in Y$ tel que $\rho(y_0) = u$. Posons $z = \varphi(y_0)$. On va commencer par montrer que $\forall_{y\in Y}\ \rho(y) = u \Rightarrow \varphi(y) = z$. Soit $y \in Y$ tel que $\rho(y) = u$. Pour montrer $\varphi(y) = z$, il suffit de montrer $\varphi(y) = \varphi(y_0)$, c'est-à-dire $y \in k(y_0)$, et pour cela, il suffit, d'après la question précédente, de montrer que $y \in j(\theta(y_0))$. Comme $\rho(y) = u = \rho(y_0)$, on a $\theta(y) = \theta(y_0)$, et il suffit donc de montrer que $y \in j(\theta(y))$, c'est-à-dire $y \in \gamma(y)$, ce qui est conséquence immédiate de la définition de γ.

On a donc montré $\exists_{z\in Z}\ \forall_{y\in Y}\ \rho(y) = u \Rightarrow \varphi(y) = z$ dans le contexte $(u \in \mathrm{Im}(\theta))$. Il reste à montrer l'unicité d'un tel z. Supposons donc qu'on ait un $z' \in Z$ tel que $\forall_{y\in Y}\ \rho(y) = u \Rightarrow \varphi(y) = z'$. Comme ρ est un épimorphisme, il existe $y_0 \in Y$ tel que $\rho(y_0) = u$. On obtient alors $z = \varphi(y_0) = z'$.

Problème 8

I

(a) Il s'agit de trouver une bijection $\theta : \mathcal{V}^{^{op}}(D^{^{op}}(X), Y) \to \mathcal{V}(X, D(Y))$ naturelle en X et en Y. Une flèche $f : D^{^{op}}(X) \to Y$ dans $\mathcal{V}^{^{op}}$ est une application linéaire $f : Y \to X^*$, où X^* est le dual de X. À une telle application linéaire, on peut associer l'application $\theta(f) : X \to Y^*$ définie par

$$\theta(f)(x) = (y \mapsto f(y)(x))$$

pour $x \in X$ et $y \in Y$. Pour tout $x \in X$, l'application $\theta(f)(x) : Y \to \mathbb{R}$ est linéaire, car la linéarité de f entraîne que

$$\theta(f)(x)(y + \lambda y') = f(y + \lambda y')(x) = f(y)(x) + \lambda f(y')(x) = \theta(f)(x)(y) + \lambda\theta(f)(x)(y')$$

On a donc $\theta(f)(x) \in Y^*$. De plus, $\theta(f) : X \to Y^*$ est linéaire, car, par linéarité de $f(y) \in X^*$, on a

$$\theta(f)(x + \lambda x') = (y \mapsto f(y)(x + \lambda x')) = (y \mapsto f(y)(x)) + (y \mapsto \lambda f(y)(x')) = \theta(f)(x) + \lambda\theta(f)(x')$$

θ est donc bien définie, et a pour inverse l'application $\chi : \mathcal{V}(X, D(Y)) \to \mathcal{V}^{^{op}}(D^{^{op}}(X), Y)$ définie (symétriquement) par $\chi(g)(y) = (x \mapsto g(x)(y))$. En effet, $\chi(\theta(f))(y)(x) = (x \mapsto \theta(f)(x)(y))(x) = \theta(f)(x)(y) = f(y)(x)$, et de même pour l'autre composition.

Il reste donc à montrer la naturalité de θ en X et en Y. Soient $\varphi : X' \to X$ et $\psi : Y' \to Y$ des applications linéaires. On a donc les flèches :

$$Y' \xrightarrow{\psi} Y \xrightarrow{f} X^* \xrightarrow{\varphi^*} X'^*$$

et on doit montrer que $D(\psi) \circ \theta(f) \circ \varphi = \theta(\psi \circ f \circ D^{^{op}}(\varphi))$. Noter que les deux membres de cette égalité appartiennent à $\mathcal{V}(X, Y^*)$, et qu'en les appliquant successivement à un $x \in X$, puis à un $y \in Y$, on obtient des scalaires. Or, pour $x \in X$ et $y \in Y$, on a

$$\begin{array}{rrcl} & (D(\psi) \circ \theta(f) \circ \varphi)(x)(y) & = & (\psi^*(\theta(f)(\varphi(x))))(y) \\ & & = & \theta(f)(\varphi(x))(\psi(y)) \\ & & = & f(\psi(y))(\varphi(x)) \\ \text{et} & \theta(\psi \circ f \circ D^{^{op}}(\varphi))(x)(y) & = & (\varphi^*(f(\psi(y))))(x) \\ & & & \text{(car la composition du membre de gauche est dans } \mathcal{V}^{^{op}}\text{)} \\ & & = & f(\psi(y))(\varphi(x)) \end{array}$$

(b) L'unité de l'adjonction est $\eta_X = \theta(1_{D^{op}(X)}) : X \to DD^{^{op}}(X)$. On a donc, pour $x \in X$, $\eta_X(x) = \theta(1_{D^{op}(X)})(x) = (l \mapsto 1_{D^{op}(X)}(l)(x)) = (l \mapsto l(x))$ (avec $l \in X^*$). η_X est donc l'application canonique $x \mapsto (l \mapsto l(x))$ de X dans son bidual X^{**}. La co-unité de l'adjonction $\varepsilon_X : D^{^{op}}D(X) \to X$ est cette même application. En effet, $\varepsilon_X(x) = \chi(1_{D(X)})(x) = (l \mapsto 1_{D(X)}(l)(x)) = (l \mapsto l(x))$.

(c) Bien sûr, le dual d'un espace de dimension finie est lui-même de dimension finie, et tout ce qui a été fait dans les questions **(a)** et **(b)** reste valable quand on remplace $\mathcal{V}$ par $\mathcal{V}_f$, puisque l'hypothèse de la dimension finie n'a jamais été utilisée. Comme les espaces sont maintenant de dimension finie, l'unité et la co-unité de l'adjonction $D^{^{op}} \dashv D$ sont des isomorphismes (car l'existence d'une base dans chaque espace vectoriel implique que $x \mapsto (l \mapsto l(x))$ est injective, et on conclut en utilisant le fait que X et X^* ont la même dimension finie, à cause de l'existence de la base duale), et D est alors une équivalence de catégories d'inverse $D^{^{op}}$.

II

(a) Montrer que la relation est bien définie sur les cardinaux revient à montrer qu'elle est indépendante du choix des représentants dans les classes d'isomorphisme, ce qui est immédiat puisque la composition d'un monomorphisme avec un isomorphisme, à gauche comme à droite, est encore un monomorphisme. La reflexivité vient du fait que l'identité d'un objet est un monomorphisme, et la transtivité vient du fait que la composition de deux monomorphismes est un monomorphisme.

(b) Le topos $\hat{\mathbf{2}}$ est bien sûr le topos canin, et on va donc utiliser le vocabulaire canin. Considérons l'ensemble canin $\mathbb{N}$ qui a une infinité dénombrable de maîtres $m_0, m_1, m_2, \dots$, et où m_n a un et un seul chien c_n. Considérons l'ensemble canin $\mathbb{N}'$ qui est le sous-ensemble de $\mathbb{N}$ obtenu en supprimant le chien c_0. Alors l'inclusion de $\mathbb{N}'$ dans $\mathbb{N}$ est un monomorphisme et on a donc $|\mathbb{N}'| \leq |\mathbb{N}|$. Par ailleurs, l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}'$ définie par $f(m_n) = m_{n+1}$ et $f(c_n) = c_{n+1}$ est bien définie (car elle évite l'absent c_0) et est un monomorphisme. On a donc $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{N}'|$. Toutefois, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}'$ ne sont pas isomorphes. En effet, m_0 ne peut appartenir à l'image d'aucun isomorphisme $\mathbb{N}' \to \mathbb{N}$, car il n'a pas de chien pour servir d'image à un chien de son antécédent.

(c) L'ensemble canin $\mathbf{n}$ est la somme (union disjonte) de n exemplaires de $\mathbf{1}$, qui a lui-même un maître unique avec un seul chien. $\mathbf{n}$ contient donc n maîtres avec chacun un chien. Le cardinal α du sous-ensemble A de $\mathbf{n+1}$ obtenu en enlevant un seul chien est clairement tel que $n < \alpha < n+1$. Soit B un ensemble canin tel que $n < |B| < n+1$. Comme on a un monomorphisme $B \to \mathbf{n+1}$, on voit que B a au plus $n+1$ maîtres et que chaque maître de B a au plus un chien. Comme on a aussi un monomorphisme $\mathbf{n} \to B$, B doit avoir au moins n maîtres ayant chacun un chien. La seule possibilité pour B (qui ne doit être isomorphe ni à $\mathbf{n}$ ni à $\mathbf{n+1}$) est qu'il ait $n+1$ maîtres dont n ont un seul chien et un seul aucun chien. Un tel ensemble est isomorphe à A, et on a $|B| = \alpha$.

(d) Le topos canin $\hat{\mathbf{2}}$ n'étant pas booléen, il faut en trouver un autre. Une solution simple est $\mathbf{Ens} \times \mathbf{Ens}$, qui est booléen (mais pas bivalué). L'objet $\mathbf{1}$ est la paire de singletons $(\{*\}, \{*\})$, qui a quatre sous-objets : $(\{*\}, \{*\}), (\{\}, \{*\}), (\{*\}, \{\}), (\{\}, \{\})$. Le deuxième et le troisième ont des cardinaux strictement compris entre 0 et 1.

(e) Soient $m : X \to \mathbf{1}$ et $n : Y \to \mathbf{1}$ deux monomorphismes. Dire que les deux sous-objets représentés par m et n sont isomorphes est dire que les objets X et Y sont isomorphes. On a donc le diagramme :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "m"] \arrow[dd, "\simeq"'] & \\ & \mathbf{1} \\ Y \arrow[ur, "n"'] & \end{tikzcd}$$

qui est nécessairement commutatif puisque $\mathbf{1}$ est l'objet final. Les sous-objets représentés par m et n sont donc égaux.

(f) Soit A un objet tel que $\alpha = |A|$. A est un sous-objet de $\mathbf{1}$, car $|A| < 1$ implique qu'il y a un monomorphisme $A \to \mathbf{1}$. Comme A est distinct de $\mathbf{0}$ et de $\mathbf{1}$ comme sous-objet de $\mathbf{1}$ (car non isomorphe à l'un d'eux), l'algèbre de Heyting $\mathbf{Sub}(\mathbf{1})$ a au moins trois éléments. Comme le topos est booléen et qu'il n'existe pas d'algèbre de Boole à trois éléments, $\mathbf{Sub}(\mathbf{1})$ a au moins quatre éléments, et comme la question **(e)** montre que deux sous-objets de $\mathbf{1}$ de même cardinal sont égaux, on voit qu'il y a au moins deux cardinaux distincts compris strictement entre 0 et 1.

III

(a) Comme $\hat{\mathcal{C}}$ est une catégorie de foncteurs, il faut d'abord vérifier que pour tout objet X de $\mathcal{D}$, $S(X)$ est un foncteur contravariant de $\mathcal{C}$ vers $\mathbf{Ens}$. La première égalité montre que $S(X)$ envoie tout objet A de $\mathcal{C}$ sur un ensemble, à savoir $\mathcal{D}(F(A), X)$. Si $\sigma : A \to B$ est une flèche de $\mathcal{C}$, $S(X)(\sigma) : \mathcal{D}(F(B), X) \to \mathcal{D}(F(A), X)$ est une application de $S(X)(B)$ vers $S(X)(A)$. L'identité $1_A : A \to A$ est envoyée sur $F(1_A)^* = 1_{\mathcal{D}(F(A),X)}$.

Soient enfin $\sigma : A \to B$ et $\tau : B \to C$ deux flèches composables de $\mathcal{C}$, alors $\tau \circ \sigma$ est envoyée sur $F(\tau \circ \sigma)^* = (F(\tau) \circ F(\sigma))^* = F(\sigma)^* \circ F(\tau)^*$. Ainsi, $S(X)$ est un foncteur contravariant de $\mathcal{C}$ vers **Ens**.

Pour terminer, il suffit de prouver que pour toute flèche $f : X \to Y$, $S(f)$ est une transformation naturelle de $S(X)$ vers $S(Y)$. Or ceci résulte de la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}(F(A), X) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "F(\sigma)^*"'] & \mathcal{D}(F(A), Y) \arrow[d, "F(\sigma)^*"] \\ \mathcal{D}(F(B), X) \arrow[r, "f_*"'] & \mathcal{D}(F(B), Y) \end{tikzcd}$$

qui est claire, puisque pour tout $\varphi : F(A) \to X$, on a $F(\sigma)^*(f_*(\varphi)) = f \circ \varphi \circ F(\sigma) = f_*(F(\sigma)^*(\varphi))$.

Autre façon de faire : Le foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ donne le foncteur $F^{op} : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}^{op}$ qui induit lui même $\hat{F} = \mathbf{Ens}^{F^{op}} : \hat{\mathcal{D}} \to \hat{\mathcal{C}}$. On a donc le foncteur composé $\hat{F} \circ \mathcal{Y} : \mathcal{D} \to \hat{\mathcal{C}}$. On vérifie facilement que ce foncteur a les propriétés de l'énoncé, et qu'il n'est donc autre que S.

(b) $(\theta_B)_A(\sigma)$ est la flèche (de $\mathcal{D}$) $F(\sigma) : F(A) \to F(B)$. Ainsi, $(\theta_B)_A$ est une application de $\mathcal{C}(A, B)$ vers $\mathcal{D}(F(A), F(B))$, donc une application de $\hat{B}(A)$ vers $S(F(B))(A)$, par définition de $\mathcal{Y}$ et de S. θ_B est donc une transformation de $\hat{B}$ vers $S(F(B))$. Dire qu'elle est naturelle est dire que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(A, B) \arrow[r, "(\theta_B)_A"] \arrow[d, "\psi^*"'] & \mathcal{D}(F(A), F(B)) \arrow[d, "F(\psi)^*"] \\ \mathcal{C}(A', B) \arrow[r, "(\theta_B)_{A'}"'] & \mathcal{D}(F(A'), F(B)) \end{tikzcd}$$

est commutatif pour toute flèche $\psi : A' \to A$, ce qui est le cas, puisque pour tout $\sigma : A \to B$, on a $(\theta_B)_{A'}(\psi^*(\sigma)) = F(\sigma \circ \psi) = F(\sigma) \circ F(\psi) = F(\psi)^*((\theta_B)_A(\sigma))$.

θ_B est donc un morphisme de $\hat{B}$ vers $S(F(B))$ dans $\hat{\mathcal{C}}$, et θ est donc une transformation de $\mathcal{Y}$ vers $S \circ F$. Sa naturalité résulte de la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd} \hat{B} \arrow[r, "\theta_B"] \arrow[d, "\psi_*"'] & S(F(B)) \arrow[d, "S(F(\psi))"] \\ \hat{B}' \arrow[r, "\theta_{B'}"'] & S(F(B')) \end{tikzcd}$$

où $\psi : B \to B'$ est une flèche arbitraire. Pour montrer que les deux morphismes de $\hat{\mathcal{C}}$, $S(F(\psi)) \circ \theta_B$ et $\theta_{B'} \circ \psi_*$ sont égaux, il suffit de les évaluer sur un objet A de $\mathcal{C}$. La commutativité du diagramme ci-dessus se résume alors à celle de :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(A, B) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\psi_*"'] & \mathcal{D}(F(A), F(B)) \arrow[d, "F(\psi)_*"] \\ \mathcal{C}(A, B') \arrow[r, "F"'] & \mathcal{D}(F(A), F(B')) \end{tikzcd}$$

Or, pour tout $\sigma : A \to B$, on a $F(\psi)_*(F(\sigma)) = F(\psi) \circ F(\sigma) = F(\psi \circ \sigma) = F(\psi_*(\sigma))$.

(c) Il suffit de construire R sur les objets et de produire pour tout objet ζ de $\hat{\mathcal{C}}$, une bijection

$$\mathcal{D}(R(\zeta), X) \xrightarrow{\Theta} \hat{\mathcal{C}}(\zeta, S(X))$$

naturelle en X, car le théorème de fonctorialité dit qu'alors R se prolonge en un unique foncteur tel que cette bijection soit naturelle en ζ. Dans le cas où ζ est de la forme $\hat{A}$, on aura les bijections

$$\mathcal{D}(R(\hat{A}), X) \xrightarrow{\simeq} \hat{\mathcal{C}}(\hat{A}, S(X)) \xrightarrow{\simeq} S(X)(A) = \mathcal{D}(F(A), X)$$

toutes naturelles en X et en A, ce qui impose que $R(\hat{A})$ soit isomorphe à $F(A)$, naturellement en A, autrement-dit que les foncteurs $R \circ \mathcal{Y}$ et F soient isomorphes. Comme R doit préserver les colimites (comme adjoint à gauche), et comme ζ est la colimite d'un diagramme (son éclatement) de la forme $\mathcal{Y} \circ d_\zeta : I_\zeta \to \hat{\mathcal{C}}$, avec $d_\zeta : I_\zeta \to \mathcal{C}$, on doit avoir

$$R(\zeta) = R(\mathbf{colim}(\mathcal{Y} \circ d_\zeta)) \simeq \mathbf{colim}(R \circ \mathcal{Y} \circ d_\zeta) \simeq \mathbf{colim}(F \circ d_\zeta)$$

On pose donc $R(\zeta) = \mathbf{colim}(F \circ d_\zeta)$. On va maintenant construire la bijection Θ (qui doit être naturelle en X). Remarquons d'abord qu'on a une bijection (naturelle en ζ et en X)

$$\mathcal{D}(R(\zeta), X) = \mathcal{D}(\mathbf{colim}(F \circ d_\zeta), X) \xrightarrow{\simeq} \hat{\mathcal{C}}^{I_\zeta}(F \circ d_\zeta, \Delta(X)) = \mathbf{Nat}(F \circ d_\zeta, \Delta(X))$$

puisque $\mathbf{colim}$ est adjoint à gauche du foncteur Δ (qui envoie tout objet i de I_ζ sur X, et toute flèche de I_ζ sur 1_X). Pour la même raison ($\zeta = \mathbf{colim}(\mathcal{Y} \circ d_\zeta)$), on a une bijection (naturelle en ζ et en X)

$$\hat{\mathcal{C}}(\zeta, S(X)) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{Nat}(\mathcal{Y} \circ d_\zeta, \Delta S(X))$$

Il y a donc juste à construire une bijection naturelle en X :

$$\mathbf{Nat}(F \circ d_\zeta, \Delta(X)) \xrightarrow{\Theta'} \mathbf{Nat}(\mathcal{Y} \circ d_\zeta, \Delta S(X))$$

Soit $\varphi : F \circ d_\zeta \to \Delta(X)$ une transformation naturelle. C'est juste une famille de flèches $\varphi_i : F(d_\zeta(i)) \to X$ telle que pour tout $\lambda : i \to j$, le triangle

$$\begin{tikzcd} F(d_\zeta(i)) \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "F(d_\zeta(\lambda))"'] & X \\ F(d_\zeta(j)) \arrow[ur, "\varphi_j"'] & \end{tikzcd}$$

soit commutatif. C'est la même chose qu'une famille $(\varphi_i)_i$, où $\varphi_i \in \mathcal{D}(F(d_\zeta(i)), X)$, telle que pour tout $\lambda : i \to j$, on ait $F(d_\zeta(\lambda))^*(\varphi_j) = \varphi_i$. Mais par définition de S, c'est encore la même chose qu'une famille $(\varphi_i)_i$, où $\varphi_i \in S(X)(d_\zeta(i))$ est telle que pour tout $\lambda : i \to j$, on ait $S(X)(d_\zeta(\lambda))(\varphi_j) = \varphi_i$. Par le lemme de Yoneda, chaque $\varphi_i \in S(X)(d_\zeta(i))$ correspond a un unique atome $\alpha_i : \widehat{d_\zeta(i)} \to S(X)$, où les α_i sont tels que pour tout $\lambda : i \to j$, on ait $d_\zeta(\lambda)_*(\alpha_j) = \alpha_i$. La famille $(\alpha_i)_i$ est bien sûr un élément de $\mathbf{Nat}(\mathcal{Y} \circ d_\zeta, \Delta S(X))$, ce qui définit la bijection Θ'. En fait, on vient juste de composer les bijections suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D}(R(\zeta), X) & = & \mathcal{D}(\mathbf{colim}(F \circ d_\zeta), X) \\ & \simeq & \mathbf{lim}(i \mapsto \mathcal{D}(F d_\zeta(i), X)) \\ & = & \mathbf{lim}(i \mapsto S(X)(d_\zeta(i))) \\ & \simeq & \mathbf{lim}(i \mapsto \hat{\mathcal{C}}(\widehat{d_\zeta(i)}, S(X))) \\ & \simeq & \hat{\mathcal{C}}(\zeta, S(X)) \end{array}$$

où toutes les $\mathbf{lim}$ sont prises dans $\mathbf{Ens}$, et où les notation $i \mapsto \dots$ sont évidemment un peu ambiguës pour des foncteurs définis sur I_ζ puisqu'elles ne concernent que les objets et non pas les flèches. Toutes ces bijections sont bien sûr naturelles en X, y compris l'avant dernière qui n'est autre que $\mathbf{lim}(y)$ où $y : S(X)(d_\zeta(i)) \to \hat{\mathcal{C}}(\widehat{d_\zeta(i)}, S(X))$ est la bijection (naturelle en X et en i) donnée par le lemme de Yoneda.

(d) Par naturalité de α et par définition de S, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \hat{A}(B) \arrow[r, "\alpha_B"] & S(X)(B) \arrow[r, equal] & \mathcal{D}(F(B),X) \\ \hat{A}(A) \arrow[u, "\sigma^*"] \arrow[r, "\alpha_A"'] & S(X)(A) \arrow[u, "S(X)(\sigma)"'] \arrow[r, equal] & \mathcal{D}(F(A),X) \arrow[u, "F(\sigma)^*"'] \end{tikzcd}$$

En suivant les parcours de $1_A \in \hat{A}(A) = \mathcal{C}(A,A)$, on obtient l'égalité demandée.

(e) On a d'abord $SR(\theta_A) \circ \eta_{\hat{A}} = \eta_{SF(A)} \circ \theta_A$ par naturalité de η, puis $S(\varepsilon_{F(A)}) \circ \eta_{SF(A)} = 1_{F(A)}$ (relation unité/co-unité). Il reste donc à montrer que $S(\alpha_A(1_A)) \circ \theta_A = \alpha$, et pour cela il suffit de montrer que pour tout objet B de $\mathcal{C}$, on a $S(\alpha_A(1_A))(B) \circ (\theta_A)_B = \alpha_B$.

Mais, par définition de S, $S(\alpha_A(1_A))(B) : SF(A)(B) \to S(X)(B)$ n'est autre que $\alpha_A(1_A)_* : \mathcal{D}(F(B),F(A)) \to \mathcal{D}(F(B),X)$, et, par définition de θ, $(\theta_A)_B : \hat{A}(B) \to SF(A)(B)$ n'est autre que $F : \mathcal{C}(B,A) \to \mathcal{D}(F(B),F(A))$. On a donc le résultat par la question **(d)**.

(f) Il s'agit de montrer que pour tout objet A de $\mathcal{C}$, $\varepsilon_{F(A)} \circ R(\theta_A) : R(\hat{A}) \to F(A)$ est un isomorphisme. Pour tout objet X de $\mathcal{D}$, on a les applications :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}(R(\hat{A}),X) \arrow[d, "\Psi", "\simeq"'] & \mathcal{D}(RSF(A),X) \arrow[l, "R(\theta_A)^*"'] \\ \hat{\mathcal{C}}(\hat{A},S(X)) \arrow[r, "y"'] & \mathcal{D}(F(A),X) \arrow[u, "\varepsilon^*_{F(A)}"'] \end{tikzcd}$$

où la bijection Ψ est donnée par l'adjonction $R \dashv S$, et où y est la bijection donnée par le lemme de Yoneda (ce qui a un sens car $\mathcal{D}(F(A),X) = S(X)(A)$). Toutes ces applications sont naturelles en X. Soit maintenant $\alpha \in \hat{\mathcal{C}}(\hat{A},S(X))$. On a $y(\alpha) = \alpha_A(1_A)$ (lemme de Yoneda). Par ailleurs, Ψ est donnée par $\Psi(u) = S(u) \circ \eta_{\hat{A}}$. On voit donc qu'en suivant le parcours de α autour de ce carré, on retrouve α après avoir fait le tour complet, d'après la question **(e)** :

$$\begin{tikzcd} \alpha \arrow[r, mapsto, "y"] & \alpha_A(1_A) \arrow[r, mapsto, "\varepsilon^*_{F(A)}"] & \alpha_A(1_A) \circ \varepsilon_{F(A)} \arrow[r, mapsto, "R(\theta_A)^*"] & \alpha_A(1_A) \circ \varepsilon_{F(A)} \circ R(\theta_A) \arrow[d, mapsto, "\Psi"] \\ & & & S(\alpha_A(1_A)) \circ S(\varepsilon_{F(A)}) \circ SR(\theta_A) \circ \eta_{\hat{A}} = \alpha \end{tikzcd}$$

Le composé de ces quatre applications (en partant de $\hat{\mathcal{C}}(\hat{A},S(X))$) est donc l'identité de $\hat{\mathcal{C}}(\hat{A},S(X))$. Comme Ψ et y sont des bijections, il en résulte que $(\varepsilon_{F(A)} \circ R(\theta_A))^*$ est une bijection. Comme elle est naturelle en X, on en déduit que $\varepsilon_{F(A)} \circ R(\theta_A)$ est un isomorphisme.([28])

IV

(a) On sait que la flèche caractéristique d'un monomorphisme $m : A \to B$ est l'interprétation de l'énoncé $\exists_{a\in A}\ b = m(a)$ dans le contexte $(b \in B)$. On a donc dans le cas présent :

$$r = \lfloor \exists_{c\in C}\ (x,y) = (\alpha(c),\beta(c)) \rfloor_{(x\in X)(y\in X)}$$

28. La situation particulière qui a été la source d'inspiration pour cet exercice est la suivante. $\mathcal{C}$ est la catégorie simpliciale Δ, $\mathcal{D}$ la catégorie des espaces topologiques, et F le foncteur qui envoie l'objet $[n]$ de Δ sur le simplexe topologique standard de dimension n, Δ_n, c'est-à-dire l'espace qui est l'enveloppe convexe de $n+1$ points affinement indépendants (choisis une fois pour toutes) dans un espace enclidien. Le foncteur S est le foncteur « singulier » (d'où son nom S), qui envoie tout espace topologique sur l'ensemble simplicial formé par ses simplexes singuliers, et le foncteur R est le foncteur de « réalisation géométrique » (d'où son nom R), adjoint à gauche du foncteur singulier. La dernière question affirme que si on réalise géométriquement l'ensemble simplicial associé à Δ_n, on obtient un espace topologique homéomorphe à Δ_n, et l'homéomorphisme est donné par la formule $\varepsilon_{F([n])} \circ R(\theta_{[n]})$, qu'on peut bien sûr écrire d'une manière plus « topologique ».

Or, l'énoncé $(x, y) = (\alpha(c), \beta(c))$ est équivalent à $\alpha(c) = x \wedge \beta(c) = y$. On a donc l'équivalence des deux premiers points. Par ailleurs, le troisième point entraîne trivialement le second. Il reste donc à montrer que le second entraîne le troisième. Comme $\langle \alpha, \beta \rangle$ est un monomorphisme, on a :

$$\forall_{c \in C}\ \forall_{c' \in C}\ (\alpha(c), \beta(c)) = (\alpha(c'), \beta(c')) \Rightarrow c = c'$$

dans le contexte vide. En combinant cet énoncé avec le deuxième point, on obtient le troisième point par définition de $\exists!$.

(b) Supposons que $\alpha \circ \sigma = \beta \circ \sigma = 1_X$. Alors les énoncés $\alpha(\sigma(x)) = x$ et $\beta(\sigma(x)) = x$ sont vrais dans le contexte $(x \in X)$. L'énoncé $\exists_{c \in C}\ \alpha(c) = x \wedge \beta(c) = y$ en découle (dans le contexte $(x \in X)$) puisqu'il suffit de prendre $c = \sigma(x)$. On a donc d'après **(a)** et la sémantique de Kripke-Joyal pour $\forall$, $\forall_{x \in X}\ r(x, x)$ dans le contexte vide.

Réciproquement, si $\forall_{x \in X}\ r(x, x)$ est vrai dans le contexte vide, alors $r(x, x)$ est vrai dans le contexte $(x \in X)$ et d'après **(a)**, $\exists!_{c \in C}\ \alpha(c) = x \wedge \beta(c) = x$ est vrai dans le contexte $(x \in X)$. Le principe de description nous donne donc une flèche $\sigma : X \to C$ telle que $\alpha \circ \sigma = \beta \circ \sigma = 1_X$.

(c) Supposons qu'il existe une flèche $\varphi : C \to C$ telle que $\alpha \circ \varphi = \beta$ et $\beta \circ \varphi = \alpha$. Alors les énoncés $\alpha(\varphi(c)) = \beta(c)$ et $\beta(\varphi(c)) = \alpha(c)$ sont vrais dans le contexte $(c \in C)$. Soient $x \in X$ et $y \in X$ tels que $r(x, y)$. On doit prouver $r(y, x)$. On a, d'après **(a)**, $\exists_{c \in C}\ \alpha(c) = x \wedge \beta(c) = y$. Soit donc $c \in C$ tel que $\alpha(c) = x$ et $\beta(c) = y$. On a $\alpha(\varphi(c)) = \beta(c) = y$ et de même $\beta(\varphi(c)) = x$. Ainsi, l'énoncé $\exists_{c \in C}\ \alpha(c) = y \wedge \beta(c) = x$ est vrai dans le contexte $(x \in X)(y \in X)$ et on a donc $r(y, x)$ par **(a)**.

Réciproquement, supposons $\forall_{x \in X}\ \forall_{y \in X}\ r(x, y) \Rightarrow r(y, x)$ vrai dans le contexte vide. On va démontrer l'énoncé $\forall_{c \in C}\ r(\alpha(c), \beta(c)) \Rightarrow r(\beta(c), \alpha(c))$ (dans le contexte vide). Soit $c \in C$, tel que $r(\alpha(c), \beta(c))$. En particularisant l'hypothèse à $x = \alpha(c)$ et $y = \beta(c)$, on obtient $r(\beta(c), \alpha(c))$. On voit donc d'après **(a)**, en prenant $x = \beta(c)$ et $y = \alpha(c)$, qu'on a prouvé $\exists!_{c' \in C}\ \alpha(c') = \beta(c) \wedge \beta(c') = \alpha(c)$ dans le contexte $(c \in C)$. Le principe de description nous donne donc une flèche $\varphi : C \to C$ (d'ailleurs unique) telle que $\langle \beta, \alpha \rangle \circ \varphi = \langle \alpha, \beta \rangle$, qui répond donc à la question.

(d) Supposons l'existence d'une flèche $\psi : K \to C$ telle que $\alpha \circ \psi = \alpha \circ v$ et $\beta \circ \psi = \beta \circ u$. Les énoncés $\alpha(\psi(k)) = \alpha(v(k))$ et $\beta(\psi(k)) = \beta(u(k))$ sont alors vrais dans le contexte $(k \in K)$ (c'est-à-dire pour tout $k \in K$). Soient $x \in X$, $y \in X$ et $z \in X$ tels que $r(x, y)$ et $r(y, z)$. D'après **(a)**, on peut supposer qu'il existe $c \in C$ et $c' \in C$ tels que $\alpha(c) = x$, $\beta(c) = y$, $\alpha(c') = y$ et $\beta(c') = z$. Les carrés cartésiens se caractérisant dans le langage interne comme dans le cas des ensembles, c'est-à-dire que dans le cas présent, on a pour chaque paire (c, c') d'éléments de C tels que $\beta(c) = \alpha(c')$, un unique élément k dans K tel que $u(k) = c'$ et $v(k) = c$. Comme on a $\beta(c) = y = \alpha(c')$, on a donc ce k vérifiant les égalités ci-dessus. On a alors $\alpha(\psi(k)) = \alpha(v(k)) = \alpha(c) = x$ et $\beta(\psi(k)) = \beta(u(k)) = \beta(c') = z$. On a donc prouvé l'énoncé $\exists_{c'' \in C}\ \alpha(c'') = x \wedge \beta(c'') = z$, puisque $\psi(k)$ peut jouer le rôle de c''. On en déduit $r(x, z)$ par **(a)**.

Réciproquement, supposons que $\forall_{x \in X}\ \forall_{y \in X}\ \forall_{z \in X}\ (r(x, y) \wedge r(y, z)) \Rightarrow r(x, z)$ soit vrai dans le contexte vide. On va prouver l'énoncé $\forall_{k \in K}\ \exists!_{c'' \in C}\ \alpha(c'') = \alpha(v(k)) \wedge \beta(c'') = \beta(u(k))$, ce qui entrainera la conclusion souhaitée par le principe de description. Soit donc $k \in K$. Posons $c' = u(k)$ et $c = v(k)$. On a $\alpha(c') = \beta(c)$ (commutativité du carré de l'énoncé). Si on pose $x = \alpha(c)$ et $y = \beta(c)$, on a $r(x, y)$ d'après **(a)**. D'après ce qui précède, on a $y = \alpha(c')$ et si on pose $z = \beta(c')$, on a $r(y, z)$ d'après **(a)**. L'hypothèse prouve donc $r(x, z)$, et il existe donc, toujours d'après **(a)**, un unique c'' tel que $\alpha(c'') = x$ et $\beta(c'') = z$, ce qui est exactement ce qu'on voulait.