TD d'algèbre et topologie – Feuille de TD 3 : Catégories et Foncteurs

Grégory Ginot

Exercice 1. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On note* $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ *le foncteur identité et* $\mathrm{End}(\mathrm{Id}_{\mathcal{C}})$ *l'ensemble des endormorphismes de foncteurs de* $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$. *Montrer que la loi de composition des morphismes se restreint á* $\mathrm{End}(\mathrm{Id}_{\mathcal{C}})$ *et est commutative.*

Exercice 2. *Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux commutatifs unitaires.*

(1) *Montrer que $(a, b) \mapsto f(a)b$ munit B d'une structure de A-module.*

(2) *Montrer que f induit un foncteur naturel $Rf : B - \mathbf{mod} \to A-\mathbf{mod}$ tel que $R_f(B) = B$ muni de la structure de A-module donnée par* **(1)**.

(3) *Montrer que le produit tensoriel par B au dessus de A, $N \mapsto B \otimes_A N$, définit un foncteur $A-\mathbf{mod} \to B-\mathbf{mod}$. Montrer que ce foncteur $B \otimes_A -$ est adjoint à gauche de R_f.*

Exercice 3. *(épimorphismes, monomorphismes et isomorphismes)*

(1) *Montrer que, dans la catégorie* **Set** *des ensembles, un morphisme est un monomorphisme (resp. épimorphisme) si et seulement si c'est une application injective (resp. surjective).*

(2) *Montrer que, dans la catégorie* **Ring** *des anneaux, le morphisme canonique $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ est un épimorphisme.*

(3) *Montrer que dans la catégorie* **Top** *des espaces topologiques, il existe des morphismes qui sont à la fois un épimorphisme et un monomorphisme mais pas un isomorphisme (indication : considérer $X \hookrightarrow Y$ un sous-ensemble dense de Y)*

Exercice 4. *(Catégorie et catégorie opposée)*

(1) *Montrer que la catégorie* **Set** *des ensembles n'est pas équivalente à sa catégorie opposée (indication : si F est une telle équivalence vérifier que $F(\emptyset) = \{pt\}$ et étudier $F(\emptyset \times \emptyset)$).*

(2) *Montrer que la catégorie* **Rel** *des relations (cf. Example 1.3.4.ii du cours) est équivalente à sa catégorie opposée.*

(3) *On va maintenant montrer que la catégorie des groupes abéliens finis est équivalente à sa catégorie opposée. On rappelle que tout groupe abélien fini est isomorphe à un unique groupe du type $\bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$ où les entiers strictement positifs n_i vérifient $n_1 \mid n_2 \mid \ldots \mid n_r$.*

i) Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$; montrer que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/\mathrm{pgcd}(n, p)\mathbb{Z}$; en déduire l'existence d'un isomorphisme de groupe $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ et le décrire explicitement.

ii) Soient $n, p, q \in \mathbb{N}^*$; montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \arrow[r, "\circ"] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r, "\circ"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

iii) *Soient G et H des groupes abéliens finis ; établir l'existence d'un isomorphisme de groupe* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G,H) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H,G)$.

iv) *Soient G, H et K des groupes abéliens finis ; montrer que le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G,H) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H,K) \arrow[r, "\circ"] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G,K) \arrow[d, "\wr"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K,H) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H,G) \arrow[r, "\circ"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K,G) \end{tikzcd}$$

v) *Montrer que la catégorie* $\mathbf{Ab^f}$ *des groupe abéliens finis est équivalente à la catégorie opposée* $\left(\mathbf{Ab^f}\right)^{op}$.

Exercice 5. *Soient $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $D : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ deux foncteurs.*

(1) *On suppose que G est adjoint à gauche de D. Montrer qu'il existe des morphismes de foncteurs $\varepsilon : Id_{\mathcal{C}} \to DG$ et $\eta : GD \longrightarrow Id_{\mathcal{D}}$ tels que les morphismes composés*

$$D(Y) \stackrel{\varepsilon(D(Y))}{\longrightarrow} DGD(Y) \stackrel{D(\eta(Y))}{\longrightarrow} D(Y) \quad et \quad G(X) \stackrel{G(\varepsilon(X))}{\longrightarrow} GDG(X) \stackrel{\eta(G(X))}{\longrightarrow} G(X)$$

soient des identités.

(2) *Réciproquement, montrer que s'il existe ε et η vérifiant les propriétés de la question (1) alors G est adjoint à gauche de D.*

(3) *Montrer que G est pleinement fidèle si et seulement si ε est un isomorphisme, et que D est pleinement fidèle si et seulement si η est un isomorphisme.*

Exercice 6 ((co)produits dans **Gp** et **Ab**)**.** *On note* **Gp** *la catégorie des groupes et* **Ab** *sa sous-catégorie des groupes abéliens.*

(1) *Monter que le produit et le coproduit existe dans* **Ab** *et qu'ils sont isomorphes.*

(2) *Montrer que le produit et le coproduit existent dans* **Gp** *et les déterminer explicitement. On vérifiera qu'ils sont non-isomorphes.*

(3) *En déduire que le produit de 2 groupes abéliens est le même si on le prend dans* **Ab** *ou* **Gp** *mais, qu'en revanche, le coproduit de 2 groupes abéliens diffère selon qu'on le prend dans* **Ab** *ou* **Gp**.

Exercice 7. *On note* **Ring** *la catégorie des anneaux commutatifs unitaires.*

(1) Montrer que $\mathbb{Z}$ est un objet initial dans **Ring** *et que $\{0\}$ est un objet final.*

(2) Montrer que le coproduit $A \coprod B$ existe dans la catégorie **Ring** *et est donné par $A \coprod B = A \otimes_{\mathbb{Z}} B$. Montrer que le produit $A \prod B$ existe dans* **Ring**.