Master TAAR

Topologie Algèbrique et Application à la Robotique

Faculté des Sciences Ain Chock

Université Hassan II, Casablanca

Cotrôle S1 : Topologie Algèbrique

22 décembre 2014, Durée : 2h

Documents et calculatrices interdits.
Les exercices sont indéependants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

---

1 Question de cours (6 points)

Rappeler les définitions des notions suivantes, en donnant un exemple :

1. Topologie initial, finale, produit ;
2. Espace topologique séparables ;
3. Espace topologique de Hausdorff (dit aussi séparé) ;
4. Catégorie, foncteur ;
5. Objet initial, final dans une catégorie ;
6. Catégorie opposée.

2 Exercice Category Theory (4 points)

Exercice 1

1. Montrer que $\mathcal{O} : \text{Top} \longrightarrow \text{Set}$ qui à chaque espace topologique X associe $\mathcal{O}(X)$ l'ensemble de ses ouverts, et à chaque application continue $f : X \longrightarrow Y$ associe l'application image réciproque $\mathcal{O}(f) := f^{-1} : \mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$ est un foncteur, est il variant ou contravariant ?
2. Montrer que $\mathcal{S} : \text{Gr}_{\text{Ab}}^{op} \longrightarrow \text{Set}$ qui à chaque groupe abélien G associé $\mathcal{S}(G)$ l'ensemble de ses sous-groupes et à chaque isomorphisme de groupe abélien $f : G \longrightarrow H$ lui associe l'application image réciproque $\mathcal{S}(f) := f^{-1} : \mathcal{O}(H) \longrightarrow \mathcal{O}(G)$ est un foncteur, est il variant ou contravariant ?
3. Montrer qu'on définiti bien une catégorie $\mathcal{C}$, si on considère les objets sont les paires (X, p), où X est un ensemble et $p : X \longrightarrow X$ une application telle que $p \circ p = p$, et les morphisme $f : (X, p) \longrightarrow (Y, q)$ sont les application f : $X \longrightarrow Y$ telle que $q \circ f = f \circ p$. Montrer que $F : \text{Ens} \longrightarrow \mathcal{C}$ défini par $F(X) = (X, id_X)$ et $F(f) = f$ est un foncteur, est il variant ou contravariant ?

3 Exercices de topologie (10 points)

Exercice 2 On dit qu'un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est *localement connexe* si pour tout $x \in X$ et tout voisinage V de x, il existe un voisinage U de x contenu dans V et connexe.

1. Montrer les assertions suivantes :
   a) Tout espace vectoriel normé est localement connexe.
   b) Tout ouvert d'un espace topologique localement connexe est localement connexe.
   c) Les composantes connexes d'un espace topologique localement connexe sont ouvertes.
2. On considère dans $\mathbb{R}^2$ (muni de la distance euclidienne) la partie $X = A \cup B$, où

$$A = (]0,1] \times \{0\}) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (\{\frac{1}{n}\} \times [-1,1]) \qquad \text{et} \qquad B = \{0\} \times [1/2, 1]\,.$$

La partie X (munie de la topologie induite) est-elle connexe par arcs ? connexe ? localement connexe ?

Exercice 3 Soit E un ensemble infini. On note

$$\mathcal{O} = \{A \subset E \text{ tel que } A^c \text{ est fini}\} \cup \{\emptyset\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{O}$ est une topologie non-séparée sur E (on l'appelle topologie cofinie, ou bien topologie de Zariski sur E).
2. Montrer que E muni de la topologie cofinie est connexe et localement connexe[1].
3. On munit $\mathbb{N}$ de la topologie cofinie. On note $\mathcal{O}_p$ la topologie produit sur $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Soit $\mathcal{O}$ la topologie cofinie sur $\mathbb{N}^2$.
   a) Un singleton $\{(a,b)\}$ est-il fermé, ouvert, pour la topologie $\mathcal{O}_p$? Et pour $\mathcal{O}$?
   b) En déduire l'inclusion $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_p$. Est ce une égalité ?

Bonne Chance
