Chapitre 1

Compléments de topologie

Introduction

On suppose connues les notions de base de topologie (voir par exemple Bourbaki, Topologie générale I). Un espace compact est un espace topologique séparé qui vérifie la propriété de Borel-Lebesgue. Le cas échéant on dira quasi-compact pour un espace topologique non nécessairement séparé qui vérifie la propriété de Borel-Lebesgue. La topologie algébrique développe des outils (des invariants) pour étudier notamment le problème d'homéomorphisme. Etant donnés deux espaces topologiques, soit on peut construire un homéomorphisme, soit on calcule certains de leurs invariants en espérant les distinguer. On rappelle la proposition suivante, utile dans la construction d'homéomorphismes.

Proposition 1.0.1. *Toute application continue injective d'un espace quasi-compact dans un espace séparé est un plongement (un homéomorphisme avec son image munie de la topologie induite) ; en particulier toute application continue bijective d'un espace quasi-compact dans un espace séparé est un homéomorphisme.*

Exercice 1.0.2. a) Démontrer la proposition précédente.
b) Démontrer que toute application continue localement injective d'un espace localement compact dans un espace séparé est un homéomorphisme local.

1.1 Construction d'espaces quotients

On note X/A le quotient de l'espace topologique X par la relation d'équivalence qui identifie tous les points du sous-espace A.

Exercice 1.1.1. Montrer que si A est une partie compacte d'un espace X séparé, alors X/A est séparé.

Notation : $D^n \subset \mathbb{R}^n$ est la boule unité, $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ est la sphère unité.

Exercice 1.1.2. Montrer que D^n/S^{n-1} est homéomorphe à S^n.

Soient $A \subset X$, et $f : A \to Y$ une application continue. On note $Y \cup_f X$ le quotient de $Y \amalg X$ par la relation d'équivalence engendrée par les identifications de a avec $f(a)$, pour tout $a \in A$.

Exercice 1.1.3. Montrer que la sphère S^3 est homéomorphe à $D^2 \times S^1 \cup_{Id_{S^1 \times S^1}} S^1 \times D^2$.

Exercice 1.1.4. Montrer que si A est un fermé de X, et $f : A \to Y$ est une application continue, alors la projection canonique $Y \amalg X \to Z = Y \cup_f X$ induit un plongement fermé $Y \to Z$, et un plongement ouvert $(X - A) \to Z$.

Exercice 1.1.5 (Espaces projectifs). Voir l'énoncé du TD.

1.2 Complexes cellulaires

Définition 1.2.1. Soit X un espace topologique, on dit que X est obtenu à partir de $A \subset X$ par attachement de cellules de dimension n si et seulement s'il existe des applications

$$(\Phi_i, \phi_i) : (D^n, S^{n-1}) \to (X, A), \quad i \in I \ ,$$

telles que l'application induite par l'inclusion de A et $\amalg_i \Phi_i$:

$$A \cup_{\amalg_i \phi_i} (\amalg_i D^n_i) \to X \ ,$$

avec $\phi_i = \Phi_{i|S^{n-1}_i}$, est un homéomorphisme.

Définition 1.2.2. Un complexe cellulaire ou CW-complexe est un espace topologique X muni d'une filtration

$$X^0 \subset X^1 \subset X^2 \subset \dots$$

par des sous-espaces fermés de réunion X, telle que :

1. X^0 est un espace discret ;
2. Pour $n \geq 1$, X^n est obtenu à partir de X^{n-1} par attachement de cellules de dimension n ;
3. X a la topologie faible définie par les X^n : $F \subset X$ est fermé si et seulement si pour tout n, $F \cap X^n$ est fermé.

Le sous-espace X^n est le n-squelette. Les composantes connexes de $X^n - X^{n-1}$ sont les n-cellules ouvertes. Dans CW, W est pour *Weak* (weak topology = topologie faible), et le C est pour *Closure finite* : l'adhérence de chaque n-cellule ne rencontre qu'un nombre fini de cellules du squelette de dimension $n - 1$.

On définit l'homologie cellulaire avec le complexe de chaîne $(C^{\text{cell}}(K), \partial)$, où $C^{\text{cell}}(K)$ est le groupe abélien libre engendré par les cellules orientées, quotienté par changement de signe pour le changement d'orientation. La définition du bord en général utilisera la notion de degré.

1.3 Complexes simpliciaux

Définition 1.3.1. Un complexe simplicial $K = (V, S)$ consiste en un ensemble V de sommets et un ensemble $S \subset \mathcal{P}(V)$ de sous-ensembles finis non vides de V, appelés simplexes, tels que :
a) S contient tous les singletons ;
b) tout sous-ensemble non vide (face) d'un simplexe $\sigma \in S$ est dans S.

Si σ est un simplexe (un ensemble fini), alors sa réalisation géométrique $|\sigma|$ est *l'enveloppe convexe de ses sommets* : $|\sigma| = \{\sum_{v\in\sigma} t_v v\} \subset \mathbb{R}^\sigma$. La réalisation géométrique $|K|$ est l'espace quotient de $\amalg_\sigma |\sigma|$ par la relation d'équivalence associée à l'application qui étend l'inclusion de V dans $\mathbb{R}^V$ linéairement sur chaque simplexe. La réalisation d'un complexe simplicial a une ctructure de CW-complexe ; le complexe correspondant s'appelle le complexe simplicial. Nous démontrerons l'invariance topologique de l'homologie cellulaire, et donc de l'homologie simpliciale.

1.4 Variétés

Définition 1.4.1. Une variété topologique de dimension n à bord est un espace séparé dénombrable à l'infini (réunion dénombrable de compacts) dans lequel tout point a un voisinage homéomorphe à un ouvert de $]-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1}$; un tel homéomorphisme est appelé une carte.

On montrera que la dimension est bien définie : une variété de dimension n n'est pas homéomorphe à une variété de dimension $m \neq n$.

On définit le bord ∂M d'une variété M comme l'ensemble des points x qui n'ont pas de voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}^n$. On montrera qu'un point d'une variété de dimension n appartient au bord si et seulement s'il correspond par une carte à un point de $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Le bord d'une variété de dimension n est une variété de dimension $n-1$.

Exercice 1.4.2. Montrer que toute variété compacte se plonge dans un espace euclidien de dimension finie $\mathbb{R}^N$.

Etant donné deux variétés à bord M_1 et M_2 de dimension n, et $f : \partial M_2 \to \partial M_1$ un homéomorphisme, on définit le recollement $M = M_1 \cup_f M_2$ comme l'espace topologique quotient de l'union disjointe $M_1 \amalg M_2$ par la relation d'équivalence engendrée par $x_2 \sim f(x_2)$ pour tout $x_2 \in \partial M_2$.

Théorème 1.4.3. *Le recollement $M = M_1 \cup_f M_2$ de deux variété topologiques de dimension n le long de leur bord est une variété topologique de dimension n.*

1.5 Homotopie

Définition 1.5.1. Une homotopie entre deux applications continues $f, g : X \to Y$ est une application continue

$$\begin{array}{rrcl} h : & [0,1] \times X & \to & Y \\ & (t,x) & \mapsto & h(t,x) = h_t(x) \end{array}$$

telle que : $h_0 = f$ et $h_1 = g$.

L'existence d'une homotopie est une relation d'équivalence et la composition est bien définie sur les classes d'homotopie.

Définition 1.5.2. Une équivalence d'homotopie entre deux espaces est une application continue qui est inversible comme classe d'homotopie ; les deux espaces sont dits homotopiquement équivalents.
Une espace est contractile si et seulement s'il est homotopiquement équivalent à un point.

Définition 1.5.3. Une rétraction par déformation d'un espace X sur un sous-espace A est une homotopie h entre l'identité de X et une rétraction de X sur A :
$\forall x \in X \; h(0,x) = x$,
$\forall x \in X \; h(1,x) \in A$,
$\forall a \in A \; h(1,a) = a$.

Dans le cas où la dernière condition est vrai pour tout (t,a) :
$\forall t \in [0,1]$, $\forall a \in A \; h(t,a) = a$, on parle de rétraction par déformation forte.

Les groupes d'homologie que nous allons étudier, comme les groupes d'homotopie sont invariants par équivalence d'homotopie. Utiliser de façon pertinente les rétractions par déformation sera très utile pour le calcul.

1.6 Catégories

Définition 1.6.1. Une catégorie $\mathcal{C}$ est une structure algébrique formée par :
a) une *classe* d'objets,
b) pour chaque couple d'objets X et Y, un ensemble de morphismes $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ (ou simplement $\mathcal{C}(X,Y)$, c) pour chaque triplet d'objets X, Y, Z, une composition

$$Hom_{\mathcal{C}}(Y,Z) \times Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) \to Hom_{\mathcal{C}}(X,Z) \; ,$$

vérifiant l'associativité de la composition et l'existence d'un morphisme identité $1_X \in Hom_{\mathcal{C}}(X,X) = End_{\mathcal{C}}(X)$, pour tout objet X.

Un isomorphisme est un morphisme inversible à gauche et à droite.

Exemple 1.6.2.
1. Les espaces topologiques avec les applications continues forment une catégorie notée Top.
2. Les espaces topologiques avec les classes d'homotopie d'applications continues forment une catégorie notée hTop.
3. Les groupes, les groupes abéliens, les groupes abéliens gradués ... avec leurs morphismes forment des catégories.

Définition 1.6.3. Un foncteur covariant F (resp. contravariant) de la catégorie $\mathcal{C}$ vers la catégorie $\mathcal{C}'$ associe à chaque objet X de $\mathcal{C}$ un objet $F(X)$ de $\mathcal{C}'$, et à chaque morphisme $g \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ un morphisme $F(g) \in Hom_{\mathcal{C}}(F(X), F(Y)$ (resp. $F(g) \in Hom_{\mathcal{C}}(F(Y), F(X)$ compatible avec la composition et respectant les morphismes identités.

L'homologie que nous allons étudier est un foncteur H de la catégorie Top (en fait hTop) vers la catégorie des groupes abéliens $\mathbb{Z}$-gradués. Il associe à chaque espace topologique X un groupe abélien gradué $H(X) = \oplus_n H_n(X)$, et à chaque application continue un morphisme de groupes abéliens gradués (homogène de degré 0). Les groupes sont triviaux en degré $n < 0$.

Donnons un exemple d'utilisation : Pour $m \geq 1$, $H_n(D^{m+1})$ est trivial pour $n > 0$, et $H_m(S^m) \approx \mathbb{Z}$. On déduit qu'il n'existe pas de rétraction de D^{m+1} sur S^m.