Chapitre 2

L'homologie singulière

2.1 Les groupes d'homologie d'un espace topologique

Le simplexe standard Δ_n est l'enveloppe convexe de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\Delta_n = \{(t_0, \ldots, t_n),\ \forall i\ t_i \geq 0,\ \sum_i t_i = 1\}\ .$$

Définition 2.1.1. Un simplexe singulier de dimension n dans l'espace topologique X est une application continue $\sigma : \Delta_n \to X$.

Pour $0 \leq i \leq n$, la face d'indice i, F_i^n, de Δ_n est le simplexe singulier de dimension $n-1$ défini par :

$$F_i^n(t_0, \ldots, t_{n-1}) = (t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{n-1})\ .$$

On notera au besoin ce simplexe par la suite ordonnée de ses sommets : $(e_0, \ldots, \widehat{e_i}, \ldots, e_n)$. Ici $(e_0, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$, et le chapeau signifie que e_i est enlevé de la suite. Cette notation pourra être utilisée pour les simplexes singuliers linéaires.

Avec cette notation, on a :

$$\forall i < j,\ F_j^{n+1} \circ F_i^n = (e_0, \ldots, \widehat{e_i}, \ldots, \widehat{e_j}, \ldots, e_{n+1}) = F_i^{n+1} \circ F_{j-1}^n\ .$$

Soit X une espace topologique. Pour $n \geq 0$, le groupe des chaînes singulières de dimension n est le groupe abélien libre $C_n(X)$ de base les simplexes singuliers de dimension n à valeur dans X. On définit pour $n \geq 1$, une *application bord* :

$$\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)\ ,$$

en étendant linéairement la formule donnée pour un simplexe σ de dimension $n \geq 1$ par :

$$\partial_n \sigma = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma \circ F_i^n \ .$$

Pour $n = 0$, $\partial_0 : C_0(X) \to C_{-1}(X) = \{0\}$ est l'application nulle.

Proposition 2.1.2. *Pour tout $n \geq 0$, $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$.*

Démonstration. Soit $\sigma : \Delta_{n+1} \to X$ un $n+1$-simplexe.

$$\begin{array}{rcl} (\partial_n \circ \partial_{n+1})\,\sigma & = & \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{n} (-1)^{i+j} \sigma \circ F_i \circ F_j \\ & = & \sum_{0 \leq j < i \leq n+1} (-1)^{i+j} \sigma \circ F_i \circ F_j + \sum_{0 \leq i < j \leq n+1} (-1)^{i+j-1} \sigma \circ F_i \circ F_{j-1} \\ & = & 0 \end{array}$$

□

Définition 2.1.3. a) Une famille de groupes abéliens indexée par les entiers (ou la somme directe de ceux-ci) est appelée *un groupe abélien gradué*; l'indice est appelé *degré*.
b) Un complexe de chaînes $C = (C_n, \partial_n)$ est un groupe abélien gradué (C_n) et une famille de morphismes $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ vérifiant pour tout n, $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ (∂ est appelé le bord).

Définition 2.1.4. Un morphisme de chaînes entre les complexes de chaînes (C_n, ∂_n) et (C'_n, ∂'_n) est une famille $g_n : C_n \to C'_n$ de morphismes de groupes abéliens qui commutent avec les bords :

$$\forall n \ , \ g_{n-1} \circ \partial_n = \partial'_n \circ g_n \ .$$

Avec les morphismes de chaînes, les complexes de chaînes forment une catégorie. On étend l'indexation des groupes de chaînes singulières au groupe $\mathbb{Z}$ en considérant des groupes nuls en degré négatif. On obtient un foncteur, $X \mapsto (C_n(X), \partial_n)$, $f \mapsto (C_n(f))$ de la catégorie topologique vers la catégorie des complexes de chaînes.

Etant donné un complexe de chaîne $C = (C_n, \partial_n)$, on définit son homologie :

$$H_n(C) = \frac{Z_n(C)}{B_n(C)} \ ,$$

où $Z_n(C) = \mathrm{Ker}(\partial_n)$ est le sous-groupe des cycles, et $B_n(C) = \mathrm{Im}(\partial_{n+1})$ est le sous-groupe des bords.

Définition 2.1.5. L'homologie singulière d'un espace topologique X est l'homologie du complexe des chaînes singulières :

$$H_n(X) = \frac{Z_n(X)}{B_n(X)} \ .$$

Exercice 2.1.6. Calculer l'homologie d'un point, d'un espace discret.

Le groupe $C_0(X)$ s'identifie au groupe abélien libre de base X.

Proposition 2.1.7. *Si X est connexe par arc , alors $H_0(X) \approx \mathbb{Z}$.*

2.2 Propriétés de l'homologie singulière

2.2.1 Fonctorialité

A une application continue $f : X \to Y$, on associe la suite $C = (C_n(f))$ de morphismes :

$$\begin{array}{rccc} C_n(f): & C_n(X) & \to & C_n(Y) \\ & \sigma & \mapsto & f \circ \sigma \end{array}$$

Proposition 2.2.1. *Pour tout application continue f, $C(f)$ est un morphisme de complexes de chaînes et on obtient ainsi un foncteur de la catégorie des espaces topologiques vers la catégorie des complexes de chaînes.*

Corollaire 2.2.2. *L'homologie singulière définit un foncteur de la catégorie des espaces topologiques vers la catégorie des groupes abéliens gradués.*

Pour une application continue $f : X \to Y$, on note généralement $f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$ l'application induite en homologie. Un homéomorphisme induit un isomorphisme en homologie : les groupes d'homologie sont des *invariants topologiques.*

2.2.2 Exactitude

On étend le foncteur homologie singulière à la catégorie $Top(2)$ des paires d'espaces (X, Y), $Y \subset X$, les morphismes étant des applications continues dont la restriction est bien définie. Un espace topologique $X = (X, \emptyset)$ peut être considéré comme une paire, i.e. un objet de $Top(2)$.

$$C(X,Y) = \frac{C(X)}{C(Y)} \,, H(X,Y) = H(C(X,Y)) \,.$$

Théorème 2.2.3. *Le bord induit une application bien définie $\partial_n : H_n(X,Y) \to H_{n-1}(Y)$. Ce morphisme est naturel (i.e. commute avec les morphismes induits par les applications continues) et donne lieu à une suite exacte longue :*

$$\cdots \to H_n(Y) \to H_n(X) \to H_n(X,Y) \to H_{n-1}(Y) \to \dots$$

où les deux premiers morphismes sont induits par les inclusions.

2.2.3 Homotopie

Théorème 2.2.4. *Des applications continues homotopes (entre espaces ou paires d'espaces) induisent des isomorphismes en homologie.*

Corollaire 2.2.5. *Une équivalence d'homotopie entre espaces (resp. entre paires d'espaces) induit un isomorphisme en homologie.*

2.2.4 Excision

Théorème 2.2.6. *Soit (X, Y) une paire d'espace. Si l'adhérence de U est contenue dans l'intérieur de Y, alors l'inclusion de $(X - U, Y - U) \subset (X, Y)$ induit un isomorphisme en homologie.*

2.3 Homotopie et excision : les preuves

2.3.1 Homotopie algébrique

Définition 2.3.1. Etant donnés deux morphismes de chaînes f, g entre les complexes de chaînes $C = (C_n, \partial_n)$ et $C' = (C'_n, \partial'_n)$, une homotopie D entre f et g est une famille de morphismes de groupes abéliens :

$$D_n : C_n \to C'_{n+1} \ ,$$

telle que pour tout n :

$$g_n - f_n = \partial'_{n+1} \circ D_n + D_{n-1} \circ \partial_n \ .$$

Les morphismes de chaînes f et g sont homotopes si et seulement s'il existe une homotopie entre f et g.

Proposition 2.3.2. *Des morphismes de chaînes homotopes induisent les mêmes applications en homologie.*

Exemple 2.3.3 (Espace étoilé). Soit X une partie d'un espace affine réel étoilée en a. L'application qui est nulle en degré différent de zéro et qui est constante de valeur a sur les 0-simplexes est homotope à $Id_{C(X)}$. On utilise le cône $a * \sigma$ d'un n-simplexe σ :

$$(t_0, \ldots, t_{n+1}) \longmapsto t_0 a + (1 - t_0)\sigma\left(\frac{1}{1 - t_0}(t_1, \ldots, t_{n+1})\right) \ .$$

Proposition 2.3.4. *Si une partie X d'un espace affine réel est étoilée en a, alors l'inclusion de $\{a\}$ dans X induit un isomorphisme en homologie.*

Corollaire 2.3.5. *Les simplexes standards ont même homologie que le point :* $H_k(\Delta_n)$ *est nul pour* $k > 0$.

Exemple 2.3.6 (Subdivision barycentrique). On note i_n l'identité du simplexe standard Δ_n. Le cône sur i_n, de sommet le centre de gravité g_n de Δ_n, forme une chaîne de dimension $n+1$: $g_n * \partial i_n$. La subdivision barycentrique $sd : C(X) \to C(X)$ est définie par récurrence. En degré 0, c'est l'identité et en degré $n > 0$ elle associe associe à un simplexe σ la chaîne $C(\sigma)(g_n * \partial sd(i_n))$. L'application sd est un morphisme de chaîne homotope à l'identité. On définit une homotopie D par récurrence ; D_0 est nulle et D_n étend naturellement

$$i_n \mapsto g_n * (i_n - sd(i_n) - D_{n-1}(\partial i_n)) \ .$$

2.3.2 Modèles acycliques

La méthode des modèles acycliques consiste à montrer qu'on peut construire par récurrence, sous certaines hypothèses, des morphismes de chaînes naturels entre deux foncteurs ou des homotopies naturelles entre deux tels morphismes.

Définition 2.3.7. Un foncteur F d'une catégorie $\mathcal{C}$ vers une catégorie de modules $\mathcal{C}'$ est libres de base les $b_i \in F(M_i)$, $M_i \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, $i \in I$, si et seulement si pour tout objet X de $\mathcal{C}$, $F(X)$ est libre de base les $F(\sigma)(b_i)$, $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M_i, X)$, $i \in I$.

Définition 2.3.8. a) Un morphisme de chaînes naturel T entre deux foncteurs F et G d'une catégorie $\mathcal{C}$ vers la catégorie des complexes de chaînes est une famille indexée par les objets X de $\mathcal{C}$ de morphismes de chaînes : $T(X) : F(X) \to G(X)$ *compatible* avec les morphismes de $\mathcal{C}$ (commutation de carrés).
b) Un morphisme de chaînes naturel T, partiel en degré $< q$, entre deux foncteurs F et G d'une catégorie $\mathcal{C}$ vers la catégorie des complexes de chaînes est une famille indexée par les objets X de $\mathcal{C}$ et les entiers $k < q$ de morphismes : $T_k(X) : F_k(X) \to G_k(X)$ qui commutent avec les bords et sont compatibles avec les morphismes de $\mathcal{C}$.

On définit de façon analogue une homotopie naturelle (resp. homotopie naturelle partielle) entre deux tels morphismes.

Théorème 2.3.9 (Modèles acycliques Ia). *Soient* F *et* G *deux foncteurs d'une catégorie* $\mathcal{C}$ *vers la catégorie des complexes de chaînes, et* $T_k(X) : F_k(X) \mapsto G_(X)$, $k < q$, *un morphisme de chaînes naturel partiel. Si* F_q *est libre à modèles dans* $\mathcal{M}$, *et si les* $H(G(M))_{q-1}$ *sont nuls pour* $M \in \mathcal{M}$, *alors* T *s'étend en degré* q.

Théorème 2.3.10 (Modèles acycliques Ib). *Soient* F *et* G *deux foncteurs d'une catégorie* $\mathcal{C}$ *vers la catégorie des complexes de chaînes,* $T(X), T'(X) : F(X) \mapsto G(X)$ *deux morphisme de chaînes naturels et* $D_k(X) : F_k(X) \to G_{k+1}(X)$, $k < q$, *une homotopie naturelle partielle entre* $F(X)$ *et* $G(X)$. *Si* F_q *est libre à modèles dans* $\mathcal{M}$, *et si les* $H(G(M))_q$ *sont nuls pour* $M \in \mathcal{M}$, *alors* D *s'étend en degré* q.

Théorème 2.3.11 (Modèles acycliques II)**.** *Soient F et G deux foncteurs d'une catégorie $\mathcal{C}$ vers la catégorie des complexes de chaînes nuls en degré < 0, $\eta_X : H_0(F(X)) \to H_0(G(X))$ un morphisme naturel. Si F est libre à modèles dans $\mathcal{M}$, et si les $H_k(G(M))$ sont nuls pour $M \in \mathcal{M}$ et $k > 0$, alors η est induite par un morphisme naturel $\mu(X) : F(X) \to G(X)$ et deux tels morphismes sont naturellement homotopes.*

2.3.3 Homotopie

Théorème 2.3.12. *Si $f, g : X \to Y$ sont des applications contines homotopes, alors $C(f), C(g) : C(X) \to C(Y)$ sont homotopes et donc $f_* = g_* : H_*(X) \to H_*(Y)$.*

Démonstration. En utilisant l'exactitude on se ramène au cas d'un espace X. On démontre avec les modèles acycliques que les foncteurs $C(i_0), C(i_1) : C(X) \to C([0,1] \times X$ associés aux deux inclusions aux extrémités sont homotopes. □

Corollaire 2.3.13. *Une équivalence d'homotopie entre espaces (resp. entre paires d'espaces) induit un isomorphisme en homologie.*

2.3.4 Excision

On forme une catégorie notée Top^{sub} avec comme objets les espaces topologiques X muni d'une famille de parties dont les intérieurs recouvrent X : $(X, \mathcal{U})$, $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}$. On définit le complexe des chaînes subordonnées (ou petites chaînes) : $C^{sub}(X, \mathcal{U}$ librement engendré par les simplexes singuliers dont l'image est contenue dans un élément de $\mathcal{U}$.

La catégorie $Top^{sub}(2)$ a pour objets les paires (X, Y), $Y \subset X$, d'espaces topologiques avec une famille de parties dont les intérieurs recouvrent X : $(X, Y, \mathcal{U})$, $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}$. On définit comme dans le cas habituel le complexe quotient $C^{sub}(X, Y, \mathcal{U})$.

Théorème 2.3.14. *Sur la catégorie Top^{sub} le morphisme naturel donné par l'inclusion du foncteur C^{sub} vers le foncteur C est une équivalence d'homotopie naturelle (est un isomorphisme à homotopie naturelle près).*

Pour une preuve de ce théorème utilisant les modèles acycliques, voir :
Egil Heistad, *Excision in singular theory*, Math. Scand. 20 (1967) 61-64.

Corollaire 2.3.15. *On a des isomorphismes naturels $H^{sub}(X, \mathcal{U}) \approx H^{sub}(X)$, $H^{sub}(X, Y, \mathcal{U}) \approx H^{sub}(X, Y)$.*

Théorème 2.3.16 (Excision)**.** *Soit (X, Y) une paire d'espace. Si l'adhérence de U est contenue dans l'intérieur de Y, alors l'inclusion $(X - U, Y - U) \subset (X, Y)$ induit un isomorphisme en homologie.*

Théorème 2.3.17 (Mayer-Vietoris). *On suppose que l'espace topologique X est la réunion des intérieurs des sous-espaces A et B. Il existe une suite exacte longue :*

$$\cdots \to H_n(A\cap B)) \xrightarrow{(i_A)_*\oplus-(i_B)_*} H_n(A)\oplus H_n(B) \xrightarrow{(j_A)_*+(j_B)_*} H_n(X) \xrightarrow{d_*} H_{n-1}(A\cap B) \to \dots ,$$

où les premières applications sont induites par les inclusions, et $d_*(x)$ est défini en représentant x par un cycle $c_A + c_B$, $c_A \in C_n(A)$, $c_B \in C_n(B)$, par $d_*(x) = [\partial c_A]$.

Remarque 2.3.18. Le connectant d_* est la composition de l'application d'inclusion $H_n(X) \to H_n(X, B)$, de l'isomorphisme d'excision $H_n(X, B) \simeq H_n(A, A \cap B)$ et du bord $H_n(A, A \cap B) \to H_{n-1}(A \cap B)$.

2.4 Autres propriétés

Théorème 2.4.1. *a) L'homologie d'un espace est égale à la somme directe des homologies de ses composantes connexes par arcs.*
b) L'homologie est additive pour les unions disjointes.

L'homologie est à support quasicompact : pour toute classe $x \in H_n(X, Y)$, il existe une paire quasicompacte $(K, L) \subset (X, Y)$, et $\tilde{x} \in H_n(K, L)$ tels que $i_*(\tilde{x}) = x$ (i étant l'inclusion).

Théorème 2.4.2. *Pour toute paire (X, Y), $H_*(X, Y)$ est limite inductive des $H_*(K, L)$ pour toute les paires quasicompactes (K, L) incluses dans (X, Y).*