Chapitre 3

Homologie : calcul et applications

Homologie réduite

Le complexe singulier réduit $\widetilde{C}(X)$ est défini par :
$\widetilde{C}_n(X) = C_n(X)$ pour $n \neq -1$, $\widetilde{C}_{-1}(X) = \mathbb{Z}$, $\widetilde{\partial}_n = \partial_n$ pour $n > 0$, et
$\widetilde{\partial}_0 : \widetilde{C}_0(X) = C_0(X) \to \widetilde{C}_{-1}(X) = \mathbb{Z} \approx C_0(pt)$ est l'augmentation (induite par l'application constante).

3.1 Homologie des sphères

Proposition 3.1.1. *Pour $n \geq 1$:*
a) Le bord induit un isomorphisme canonique :

$$H_*(D^n, S^{n-1}) \cong \widetilde{H}_{*-1}(S^{n-1}) \ .$$

b) Pour $x \in S^n$ il existe un isomorphisme

$$H_*(S^n, S^n - x) \simeq H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \ .$$

On obtient par récurrence :

Théorème 3.1.2. *Pour $n \geq 1$:*
a) $H_k(D^n, S^{n-1}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = n\,; \\ \{0\} & \text{sinon.} \end{cases}$
b) $H_k(S^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0 \text{ ou } k = n\,; \\ \{0\} & \text{sinon.} \end{cases}$

Théorème 3.1.3. *Pour $n \geq 2$, les groupes isomorphes $H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n)$ et $H_{n-1}(\partial\Delta_n)$ sont engendrés respectivement par la classe de l'identité de Δ_n : $[i_n]$ et par son bord $[\partial i_n]$.*

Exercice 3.1.4. Soit $\pi \in \mathcal{S}_{n+1}$ une permutation, et L_π l'action linéaire correspondante sur Δ_n. Déterminer l'action $(L_\pi)_*$ sur $H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n)$.

Pour $n \geq 2$, un homéomorphisme entre S^{n-1} et $\partial\Delta_n$ fixe le choix d'un générateur de $H_{n-1}(S^{n-1})$. On peut aussi fixer ce choix via un générateur de l'homologie *locale*

$$H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \approx H_n(D^n, S^{n-1}) \approx H_{n-1}(S^{n-1}) \ .$$

Par translation, ce choix fixe aussi un générateur de $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{a\})$ pour tout a.

Nous allons fixer ce choix : le bord du simplexe formé avec l'origine et la base canonique de $\mathbb{R}^n$: $(0, e_1, \ldots, e_n)$ représente le générateur préféré de l'homologie locale en un point intérieur à ce simplexe.

Au besoin on notera $[D^n] \in H_n(D^n, S^{n-1})$ et $[S^{n-1}] \in H_{n-1}(S^{n-1})$ les *classes fondamentales* (générateurs préférés) ainsi fixés. Ici le vocabulaire et la notation anticipent sur ce qui sera fait plus généralement avec l'orientation des variétés.

Exercice 3.1.5. Déterminer l'action sur l'homologie locale $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$ d'un élément $L \in GL_n(\mathbb{R})$.

3.2 Premières applications

Théorème 3.2.1 (Invariance de la dimension)**.** *Pour $n \neq m$, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ ne sont pas homéomorphes.*

Proposition 3.2.2 (Caractérisation du bord)**.** *Soient M une variété à bord de dimension n et x un point de M, alors :*
$x \in M - \partial M \iff H_n(M, M - x) \simeq \mathbb{Z}$,
$x \in \partial M \iff H_n(M, M - x) \simeq \{0\}$.

Corollaire 3.2.3. *Si on a une carte locale en x :*

$$\phi : (U, x) \to (V, \phi(x)),\ V \subset] - \infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1} \ ,$$

alors x est dans le bord de M si et seulement si $\phi(x)$ appartient à $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Théorie du degré

Définition 3.2.4. Soit $n \geq 1$. Une application continue $f : S^n \to S^n$ induit un endomorphisme f_* de $H_n(S^n) \approx \mathbb{Z}$. Le degré de f est défini par :

$$\forall z \in H_n(S^n) \ , \ f_*(z) = \deg(f)\ z \ .$$

Proposition 3.2.5. *Le degré d'une isométrie $f \in O_n(\mathbb{R})$ est égal à son déterminant.*

Corollaire 3.2.6. *Pour n pair, l'application antipode, $-Id_{S^n}$, n'est pas homotope à l'identité.*

Corollaire 3.2.7. *Pour toute application continue $f : S^n \to S^n$, n pair, il existe $x \in S^n$ tel que $f(x) = \pm x$.*

Corollaire 3.2.8. *Pour $n > 0$ pair, il n'existe pas de champ de vecteurs tangents non nuls sur la sphère S^n, c'est à dire il n'existe pas d'application continue $X = [x \to X_x]$ de S^n dans $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ avec X_x orthogonal à x pour tout x.*

Définition 3.2.9. a) L'application $f : S^n \to S^n$ est un homéomorphisme local en x si et seulement si sa restriction à un voisinage de x est un homéomorphisme sur son image. b) On dit que x est un point (topologiquement) régulier (ou que f est régulière en x) si et seulement si f est un homéomorphisme local en x, et que y est une valeur régulière si et seulement si tout antécédent de y est un point régulier.

Lorsque x est un point régulier de f d'image y, alors une restriction $f_| : U \to U'$ qui est un homéomorphisme local définit, en composant avec l'excision, un homomorphisme $H_n(S^n, S^n - \{x\}) \to H_n(S^n, S^n - \{y\})$, qui est indépendant de U. En prenant comme générateurs des homologies locales $\mu_x \in H_n(S^n, S^n - \{x\})$ et $\mu_y \in H_n(S^n, S^n - \{y\})$, *restriction* du générateur choisi $\mu \in H_n(S^n)$, appelés générateurs orientés, on obtient la multiplication par un entier.

Définition 3.2.10. Le degré local en un point régulier de f est défini par : $f_*(\mu_x) = \deg_x(f)\mu_y$, où $\mu_x \in H_n(U, U - x) \cong H_n(S^n, S^n - \{x\})$ et $\mu_y \in H_n(U', U' - y) \cong H_n(S^n, S^n - \{y\})$ sont les générateurs orientés.

Théorème 3.2.11. *Si y est une valeur régulière de $f : S^n \to S^n$, alors y a un nombre fini d'antécédents, et :*

$$\deg(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \deg_x(f) \ .$$

Proposition 3.2.12. *S'il existe des cartes locales*

$$\phi : (U, x) \to (V, 0) \ , \psi : (U', x) \to (V', 0) \ ,$$

compatibles avec les générateurs orientés dans lesquelles l'expression de $f : S^n \to S^n$ est un difféomorphisme, alors le degré local est donné par le signe du déterminant jacobien.

3.3 Homologie des complexes cellulaires

Proposition 3.3.1. *a) Soit $(X; X^n, n \geq 0)$ un complexe cellulaire, alors pour tout $n \geq 0$, $H_k(X^n, X^{n-1})$ est nul pour k distinct de n, et $H_n(X^n, X^{n-1})$ est un groupe libre de base indexée par les cellules de dimension n.*
b) Si on a une famille d'applications d'attachement des cellules :

$$(\Phi_j, \phi_j) : (D^n, S^{n-1}) \to (X^n, S^{n-1}),\ j \in J_n\ ,$$

alors les $(\Phi_j)_*([D^n])$, $j \in J_n$, forment une base de $H_n(X^n, X^{n-1})$, de plus un reparamétrage de la cellule change ce générateur par un signe qui est le degré du reparamétrage (positif pour un reparamétrage orienté, négatif sinon).

Une orientation d'une cellule est une application d'attachement à reparamétrage orienté près.

Définition 3.3.2. Le complexe cellulaire $C^{\text{cell}}(X)$ est le groupe abélien libre de base les cellules orientées quotienté par le changement de signe pour l'orientation contraire, avec la graduation donnée par la dimension. Le groupe $C_n^{\text{cell}}(X)$ est canoniquement isomorphe à $H_n(X^n, X^{n-1})$.

Le bord $\partial^{\text{cell}} : C_n^{\text{cell}}(X) \approx H_n(X^n, X^{n-1}) \to H_n(X^{n-1}, X^{n-2}) \approx C_{n-1}^{\text{cell}}(X)$ est obtenu en composant le bord de la paire (X^n, X^{n-1}) avec le morphisme d'inclusion.

Théorème 3.3.3. *Sur la catégorie des CW-complexes avec les applications continues* filtrées, *les foncteurs H_* et H_*^{cell} sont naturellement isomorphes.*

Corollaire 3.3.4. *L'homologie cellulaire est un invariant topologique.*

Remarque 3.3.5. Les espaces simpliciaux sont des CW-complexes particuliers. Dans ce cas l'homologie cellulaire devient l'homologie simpliciale. Le résultat précédent contient l'invariance topologique de l'homologie simpliciale.

Remarque 3.3.6. Dans le théorème précédent on pourrait remplacer l'homologie singulière H par une *théorie d'homologie ordinaire à support compact* (axiomes d'Eilenberg-Steenrod ci-dessous).

Proposition 3.3.7. *a) Pour tout $k > n$, $H_k(X^n)$ est nul.*
b) Pour tout n, l'inclusion induit un morphisme injectif $H_n(X^n) \to C_n^{\text{cell}}(X)$ d'image le sous-groupe des cycles cellulaires : $Z_n^{\text{cell}}(X)$.
c) Pour tout n, l'inclusion induit un morphisme surjectif

$$Z_n^{\text{cell}}(X) \approx H_n(X^n) \to H_n(X^{n+1})$$

de noyau le sous-groupe des bords cellulaires : $B_n^{\text{cell}}(X)$.
d) Pour $n < k$, $H_k(X^n) \cong H_{n+1}(X^n) \cong H_{n+1}^{cell}(X)$.

Cette proposition prouve le théorème dans le cas d'un CW-complexe de dimension finie. Le cas général résulte de la proposition ci-dessous :

Proposition 3.3.8. *L'hologie d'un CW-complexe est limite inductive des homologies des squelettes.*

Lemme 3.3.9. *Tout compact d'un CW-complexe est contenu dans un sous-complexe fini.*

cf Bredon Topology and Geometry, p195.

Le bord cellulaire

Proposition 3.3.10. *Soient* $(X,(X^n))$ *un CW-complexe et* $(\Phi_i,\phi_i) : (D^n,S^{n-1}) \to (X^n,X^{n-1})$, $i \in I_n$, $n \geq 0$, *des applications caractéristiques des* n*-cellules. En notant* e_i *la cellule orientée par* Φ_i, *on a pour* $i \in I_n$, $n \geq 1$,

$$\partial^{cell} e_i = \sum_{j \in I_{n-1}} n_{ij} e_j \ ,$$

avec $n_{ij} = \deg((\overline{\Phi}_j)^{-1} \circ \mathrm{PROJ} \circ \phi_i)$ *;*
$\mathrm{PROJ} : X^{n-1} \to X^{n-1}/\left(X^{n-1} - \Phi_j(B^{n-1})\right)$ *est la projection,*
et $\overline{\Phi}_j : S^{n-1} \cong D^{n-1}/S^{n-2} \simeq X^{n-1}/\left(X^{n-1} - \Phi_j(B^{n-1})\right)$ *est l'homéomorphisme induit.*

Remarque 3.3.11. Si le centre $a_j = \Phi_j(0)$ de la $(n-1)$-cellule est une valeur régulière de ϕ_i, alors $n_{ij} = \sum_{x \in \phi_i^{-1}(a_j)} \deg_x(\phi_i)$.

Homologie des espaces projectifs

Les espaces projectifs $\mathbb{C}P^n$ ont une structure de CW-complexe avec une cellule de dimension $2k$ pour $0 \leq k \leq n$.

Proposition 3.3.12. $H_m(\mathbb{C}P^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \textit{si } m = 2k,\ 0 \leq k \leq n\ ; \\ \{0\} & \textit{sinon.} \end{cases}$

Les espaces projectifs $\mathbb{R}P^n$ ont une structure de CW-complexe avec une cellule de dimension k pour $0 \leq k \leq n$. Le bord du complexe cellulaire est nul en dimension impaire et multiplie par ± 2 (le signe dépend de l'orientation des cellules) en dimension paire $2k$, $0 < 2k \leq n$.

Proposition 3.3.13. *a) Pour* n *pair,* $\widetilde{H}_m(\mathbb{R}P^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \textit{si } m = 2k,\ 0 < 2k \leq n\ ; \\ \{0\} & \textit{sinon.} \end{cases}$

a) Pour n *impair,* $\widetilde{H}_m(\mathbb{R}P^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \textit{si } m = 2k,\ 0 < 2k \leq n\ ; \\ \mathbb{Z} & \textit{si } m = n\ ; \\ \{0\} & \textit{sinon.} \end{cases}$

Axiomes D'Eilenberg-Steenrod

Une théorie d'homologie (H, ∂) consiste en :
a) un foncteur covariant H de la catégorie $Top(2)$ des paires d'espaces vers la catégorie $\mathbb{Z} - \mathrm{gMod}$ des groupes abéliens $\mathbb{Z}$-gradués,
b) des morphismes naturels de degré -1

$$\partial_{(X,Y)} : H(X,Y) \to H(Y) = H(Y, \emptyset) \ ,$$

qui vérifient les axiomes énoncés ci-dessous : exactitude, homotopie et excision.

La condition de naturalité signifie compatibilité avec les morphismes induits par les applications continues entre paires d'espaces.

Exactitude : Pour toute paire (X,Y), on a une suite exacte longue :

$$\ldots \longrightarrow H_n(Y) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(X,Y) \stackrel{\partial_{(X,Y)}}{\longrightarrow} H_{n-1}(Y) \longrightarrow \ldots$$

où les deux premiers morphismes sont induits par les inclusions

Homotopie : Des applications continues homotopes induisent des isomorphismes en homologie.

Excision : Soit (X,Y) une paire d'espace. Si l'adhérence d'un ouvert $U \subset X$ est contenue dans l'intérieur de Y, alors l'inclusion de $(X-U, Y-U) \subset (X,Y)$ induit un isomorphisme en homologie.

Une théorie d'homologie H est dite **ordinaire** si et seulement si l'homologie du point est isomorphe à l'homologie singulière du point.

Une théorie d'homologie H est dite **à support compact** si et seulement si pour tout $z \in H(X,Y)$, il existe une inclusion d'une paire compacte $i : (K,L) \hookrightarrow (X,Y)$ et $y \in H(K,L)$ tels que $H(i)(y) = z$.

3.4 Homologie des variétés et orientation

Définition 3.4.1. Une orientation d'une variété topologique M est une famille *continue* de générateurs de l'homologie locale : $\mu_x \in H_n(M, M - x)$, $x \in M - \partial M$.

Ici *continue* signifie que pour tout $x \in M - \partial M$, il existe un voisinage V et $\mu_V \in H_n(M, M - V)$ tels que, pour tout $y \in V$, $\rho_y(\mu_V) = \mu_y$. Ici le morphisme *de restriction* ρ_y est induit par l'inclusion $(M, M - V) \to (M, M - x)$.

Exercice 3.4.2. Définir sur l'ensemble des générateurs des homologies $H_n(M, M - x)$, $x \in M - \partial M$ une topologie qui en fait un revêtement double $P \to M - \partial M$ et montrer que la condition précédente définit une section continue de ce revêtement.

Exemples 3.4.3.
1. Pour tout n, l'espace $\mathbb{R}^n$ est orienté avec la famille μ_x obtenue en utilisant la translation $t_x : \mu_x = (t_x)(\mu_0)$.
2. Pour tout $n > 0$, la sphère S^n est orientée par $\mu_x = \rho_x(\mu)$, où μ est générateur de $H_n(S^n)$, et ρ_x est induit par l'inclusion.

Proposition 3.4.4. *Une variété M est orientable si et seulement s'il existe un* atlas*, c'est dire un ensemble de cartes dont les domaines recouvrent M, dont les changements de carte respectent l'orientation de $\mathbb{R}^n$.*

Théorème 3.4.5. *Pour toute variété topologique de dimension n, M, et tout compact $K \subset M - \partial M$,*
a) $H_k(M, M - K)$ est nul pour tout $k > n$;
b) $z \in H_n(M, M - K)$ est nulle si et seulement si, pour tout $x \in K$, $\rho_x(z) = 0$.

Remarque 3.4.6. Dans b), la nullité de $\rho_x(z)$ est localement constante, il suffit donc de tester un point x pour chaque composante connexe de K.

Théorème 3.4.7. *Soit (M, μ) une variété orientée. Pour tout compact $K \subset M - \partial M$, il existe $\mu_k \in H_n(M, M - K)$ tel que : $\forall x \in K$, $\rho_x(\mu_K) = \mu_x$.*

Pour K variété compacte sans bord, la classe $\mu_M = [M]$ est appelée la classe fondamentale de M.

Théorème 3.4.8. *Soit M est une variété compacte connexe sans bord.*
a) M est orientable si et seulement si $H_n(M)$ est non nul.
b) Dans le cas orientable $H_n(M)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, et la classe fondamentale donne une bijection entre les orientatons de M et les générateurs de $H_n(M)$.

Remarque 3.4.9. Pour les applications continues entre variétés compactes connexes orientées de même dimension, il y a une notion de degré. Si on a une valeur régulière, ce degré s'exprime en fonction des degrés locaux comme dans le cas de la sphère.

Cas à bord

Proposition 3.4.10. *Soit (M, μ) une variété compacte orientée à bord, alors il existe $[M] \in H_n(M, \partial M)$ tel que, pour tout $x \in M - \partial M$, $\rho_x([M]) = \mu_x$.*

Pour K variété compacte à bord, la classe $\mu_M = [M] \in H_n(M, \partial M)$ est aussi appelée la classe fondamentale de M.

Théorème 3.4.11. *Soit M est une variété compacte connexe à bord.*
a) M est orientable si et seulement si $H_n(M, \partial M)$ est non nul. b) Dans le cas orientable $H_n(M, \partial M)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, et la classe fondamentale donne une bijection entre les orientatons de M et les générateurs de $H_n(M)$.

On utilise le théorème suivant (Morton Brown, 1962) :

Théorème 3.4.12. *Dans toute variété compacte M, le bord admet un collier : il existe un plongement $c :]-\infty, 0] \times \partial M \to M$ qui prolonge l'inclusion du bord.*

Exercice 3.4.13. Montrer que si M est une variété compacte orientée à bord de classe fondamentale $[M]$, alors $\partial[M] \in H_{n-1}(\partial M)$ définit une orientation de ∂M.