Chapitre 4

Caractérisation axiomatique de l'homologie

4.1 Axiomes D'Eilenberg-Steenrod

Une théorie d'homologie (H, ∂) consiste en :
a) un foncteur covariant H de la catégorie $Top(2)$ des paires d'espaces vers la catégorie $\mathbb{Z} - \text{gMod}$ des groupes abéliens $\mathbb{Z}$-gradués,
b) des morphismes naturels de degré -1

$$\partial_{(X,Y)} : H(X,Y) \to H(Y) = H(Y, \emptyset) \ ,$$

qui vérifient les axiomes énoncés ci-dessous : exactitude, homotopie et excision.

La condition de naturalité signifie compatibilité avec les morphismes induits par les applications continues entre paires d'espaces.

Exactitude : Pour toute paire (X, Y), on a une suite exacte longue :

$$\ldots \longrightarrow H_n(Y) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(X,Y) \overset{\partial_{(X,Y)}}{\longrightarrow} H_{n-1}(Y) \longrightarrow \ldots$$

où les deux premiers morphismes sont induits par les inclusions

Homotopie : Des applications continues homotopes induisent des isomorphismes en homologie.

Excision : Soit (X, Y) une paire d'espace. Si l'adhérence d'un ouvert $U \subset X$ est contenue dans l'intérieur de Y, alors l'inclusion de $(X - U, Y - U) \subset (X, Y)$ induit un isomorphisme en homologie.

Une théorie d'homologie H est dite **ordinaire** si et seulement si l'homologie du point est isomorphe à l'homologie singulière du point.

Une théorie d'homologie H est dite **additive** si et seulement si l'homologie d'une réunion disjointe est isomorphe à la somme directe des homologies.

Une théorie d'homologie H est dite **à support compact** si et seulement si pour tout $z \in H(X,Y)$, il existe une inclusion d'une paire compacte $i : (K,L) \hookrightarrow (X,Y)$ et $y \in H(K,L)$ tels que $H(i)(y) = z$.

Exercice 4.1.1. Toute théorie d'homologie à support compact est additive.

4.2 Conséquences des axiomes

Théorème 4.2.1 (Suite exacte longue pour une triade)**.** *Pour $A \subset B \subset X$, on a une suite exacte longue :*

$$\ldots \longrightarrow H_n(B,A) \longrightarrow H_n(X,A) \longrightarrow H_n(X,B) \stackrel{\partial_{(X,B,A)}}{\longrightarrow} H_{n-1}(B,A) \longrightarrow \ldots$$

où les deux premiers morphismes sont induits par les inclusions, et $\partial_{(X,B,A)}$ est obtenu en composant $\partial_{(X,B)}$ avec le morphisme d'inclusion.

Définition 4.2.2. Une application continue entre paires : $f : (X,A) \to (Y,B)$ est un homéomorphisme relatif si et seulement si elle induit un homéomorphisme entre $X - A$ et $Y - B$.

Théorème 4.2.3 (Excision forte, Spanier 4.8.9)**.** *Soient X un espace séparé et A un fermé dans X. On suppose que A admet un voisinage fermé F tel qu'il existe une retraction par déformation forte de F sur X. Alors tout homéomorphisme relatif $f : (X,A) \to (Y,B)$, avec B fermé dans l'espace séparé Y, induit un isomorphisme en homologie.*

Support compact et limite inductive

Un ensemble ordonné $(\mathcal{E}, \preceq)$ peut être considéré comme une catégorie, avec un morphisme de x à y si $x \preceq y$ et pas de morphisme x à y sinon.

Définition 4.2.4. a) Dans une catégorie $\mathcal{C}$, un système inductif indexé par $(\mathcal{E}, \preceq)$ est un foncteur covariant h de $(\mathcal{E}, \preceq)$ vers $\mathcal{C}$:

pour chaque élément $E \in \mathcal{E}$ il y a un objet $h(E)$,
pour chaque relation $E \preceq F$, il y a un morphisme $h(E \preceq F) = \phi_E^F : h(E) \to h(G)$,
pour toute composition $E \preceq F \preceq G$, $\phi_E^G = \phi_F^G \circ \phi_E^F$.

Définition 4.2.5. Soit (h, ϕ) un système inductif indexé par $(\mathcal{E}, \preceq)$ dans $\mathcal{C}$.
a) Une donnée compatible est un objet L de $\mathcal{C}$ et pour chaque $E \in \mathcal{E}$ un morphisme :ψ_E :

$h(E) \to L$, ces morphismes étant compatibles avec les ϕ_E^F tous les triangles commutent.
b) Une limite inductive est une donnée compatible (L, ψ) qui est universelle : toute autre donnée compatible factorise de façon unique par l'objet L.

Si la limite inductive existe, alors elle est unique à un isomrphisme canonique près. Dans la catégorie $\mathbb{Z} - \mathrm{Mod}$ des groupes abéliens (resp. $\mathbb{Z} - \mathrm{gMod}$ des groupes abéliens gradués ou $\mathbb{Z} - \mathrm{dgMod}$ des complexes de chaines) tout système inductif admet une limite inductive : $\lim_{E \in \mathcal{E}} h(E)$ est le quotient de la somme directe des $h(E)$ par le sous-module engendré par les $y - x$, $x \in h(E)$, $y \in h(F)$, pour tous les couples E,F qui ont un majorant commun.

Théorème 4.2.6. *Soit h une théorie d'homologie à support compact, et $\mathcal{E}$ un ensemble de paires de sous-espaces de (X, Y) tel que toute paire compacte $(K, L) \subset (X, Y)$ est incluse dans une paire de $\mathcal{E}$, alors on a un isomorphisme canonique :*

$$\lim_{E \in \mathcal{E}} h(A, B) \cong h(X, Y) \ .$$

Le résulat ci-dessus vaut en particulier pour l'ensemble de toutes les paires compactes contenues dans (X, Y)

4.3 L'homologie singulière

Théorème 4.3.1. *L'homologie singulière est une théorie d'homologie ordinaire à support compact.*

L'axiome d'homotopie et l'axiome d'excision demandent un peu de travail.

Définition 4.3.2. Une homotopie algébriques entre deux morphismes de chaînes $f, g : C \to C'$ est une application de degré 1, $D : C_* \to C_{*+1}$ telle que : $g - f = D \circ \partial + \partial' \circ D$.

Proposition 4.3.3. *Des morphismes algébriquement homotopes induisent la même application en homologie.*

Théorème 4.3.4. *Des applications continues homotopes induisent des morphismes des complexes des chaînes singulières algébriquement homotopes.*

L'axiome d'homotopie pour l'homologie singulière en résulte.

Lemme 4.3.5. *Pour $j \in \{0, 1\}$, soit Soit $i_j : X \to [0, 1] \times X$ l'application $x \mapsto (j, x)$. Les morphismes $C(i_0)$ et $C(i_1)$ entre les complexes des chaînes singulières $C(X)$ et $C([0, 1] \times X)$ sont algébriquement homotopes.*

Pour prouver ce lemme, on peut s'appuyer sur le théorème des modèles acycliques qui sera aussi utile plus tard.

Définition 4.3.6. Un foncteur F d'une catégorie $\mathcal{C}$ vers la catégorie $\mathbb{Z}-$Mod des groupes abéliens (resp. $\mathbb{Z}-$gMod des groupes abéliens gradués ou $\mathbb{Z}-$dgMod des complexes de chaînes) est libre de base les $g_j \in F(M_j)$, $j \in J$, si et seulement si pour tout objet X de $\mathcal{C}$, $F(X)$ est le groupe abélien libre de base les $F(\sigma)(g_j)$, $j \in J$, $\sigma \in Hom_{\mathcal{C}}(M_j, X)$. On dit que F est libre à modèles dans $\mathcal{M}$ s'il a une base $g_j \in F(M_j)$, $j \in J$, avec $M_j \in \mathcal{M}$ pour tout $j \in J$.

Théorème 4.3.7. *Soient F et G deux foncteurs de la catégorie $\mathcal{C}$ vers la catégorie des complexes de chaîne. On suppose que F_n et G_n sont nuls pour $n < 0$, que F est libre à modèles dans $\mathcal{M}$ et que G est acyclique sur les modèles : pour tout modèle $M \in \mathcal{M}$ et tout $n > 0$, $H_n(G(M))$ est nul.*
a) Toute famille naturelle de morphismes $\mu_X : H_0(F(X)) \to H_0(G(X))$, X objet de $\mathcal{C}$, est induite par des morphismes naturels

$$\nu_X : F(X) \to G(X) \ .$$

b) Deux familles naturelles de morphismes $\nu_X, \nu'_X : F(X) \to G(X)$ qui induisent les mêmes morphismes en H_0 : $H_0(\nu_X) = H_0(\nu'_X)$, sont naturellement homotopes.

Ce théorème est corollaire des deux théorèmes suivants :

Théorème 4.3.8 (Enoncé A)**.** *Soient F et G deux foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathbb{Z}-$dgMod.*
Si, pour un entier n, F_n est libre à modèles dans $\mathcal{M}_n$,
si on a pour $k < n$ des morphismes naturels qui commutent avec le bord :

$$\nu_k(X) : F_k(X) \to G_k(X) \ ,$$

et si $H_{n-1}(G(M))$ est nul pour tout modèle $M \in \mathcal{M}_n$,
alors ν s'étend en degré n.

On démontre ce théorème en définissant d'abord $\nu_n(M_j)(g_j)$ pour un élément de la base de F_n : $g_j \in F(M_j)$. La naturalité donne une unique extension, et celle-ci satisfait l'énoncé.

Théorème 4.3.9 (Enoncé B)**.** *Soient F et G deux foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathbb{Z}-$dgMod.*
Si on a pour $k \leq n$ des morphismes naturels qui commutent avec le bord,
si pour un entier n, F_n est libre à modèles dans $\mathcal{M}_n$,
si on a des morphismes naturels qui commutent avec le bord

$$\nu_k(X), \nu'_k : F_k(X) \to G_k(X) \ ,$$

et une homotopie naturelle partielle *entre ν_k et ν'_k*

$$h_k(X) : F_k(X) \to G_{k+1}(X) \ , \ k < n \ ,$$

et si $H_n(G(M))$ est nul pour tout modèle $M \in \mathcal{M}_n$,
alors h s'étend en degré n.

Ici aussi on définit d'abord $h_n(M_j)(g_j)$ pour un élément de la base de $F_n : g_j \in F(M_j)$.

On peut également établir l'excision en s'appuyant sur les modèles acycliques : voir l'article de Egil Heistad *Excision in singular theory*, Math. Scand. 20 (1967) 61-64.

4.4 Homologie des complexes cellulaires

On considère ici une théorie d'homologie ordinaire H à support compact.

1. Comme pour l'homologie singulière, on obtient un isomorphisme
$$H_k(D^n, S^{n-1}) \simeq \widetilde{H}_{k-1}(S^{n-1}) \ ,$$
le groupe étant nul pour $k \neq n$ et libre de rang 1 pour $k = n$.
2. L'axiome du support compact entraîne l'additivité. On en déduit le calcul de l'homologie d'un espace discret et le calcul de $H_0(X)$.
3. Comme pour l'homologie singulière on choisit des générateurs compatibles des groupes isomorphes
$$H_n(D^n, S^{n-1}) \simeq \widetilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \simeq H_{n-1}(D^{n-1}/S^{n-2}, *) \simeq H_{n-1}(D^{n-1}, S^{n-2}) \ , n > 1 \ .$$

Proposition 4.4.1. *a) Soit H une théorie d'homologie ordinaire à support compact et $(X; X^n, n \geq 0)$ un complexe cellulaire, alors pour tout $n \geq 0$, $H_k(X^n, X^{n-1})$ est nul pour k distinct de n, et $H_n(X^n, X^{n-1})$ est un groupe libre de base indexée par les cellules de dimension n.*
b) Si on a une famille d'applications d'attachement des cellules :
$$(\Phi_j, \phi_j) : (D^n, S^{n-1}) \to (X^n, S^{n-1}), \ j \in J_n \ ,$$
alors les $(\Phi_j)_*([D^n])$, $j \in J_n$, forment une base de $H_n(X^n, X^{n-1})$, de plus un reparamétrage de la cellule change ce générateur par un signe qui est le degré du reparamétrage (positif pour un reparamétrage orienté, négatif sinon).

Une orientation d'une cellule est une application d'attachement à reparamétrage orienté près.

Définition 4.4.2. Le complexe cellulaire $C^{\text{cell}}(X)$ est le groupe abélien libre de base les cellules orientée quotienté par le changement de signe pour l'orientation contraire, avec la graduation donnée par la dimension (le groupe $C_n^{\text{cell}}(X)$ est isomorphe à $H_n(X^n, X^{n-1})$).

Le bord $\partial^{\text{cell}} : C_n^{\text{cell}}(X) \approx H_n(X^n, X^{n-1}) \to H_n(X^{n-1}, X^{n-2}) \approx C_{n-1}^{\text{cell}}(X)$ est obtenu en composant le bord de la paire (X^n, X^{n-1}) avec le morphisme d'inclusion.

Théorème 4.4.3. *Soit H une théorie d'homologie ordinaire à support compact. Alors pour tout complexe cellulaire $(X; X^n, n \geq 0)$ on a un isomorphisme gradué*
$$H^{\text{cell}}(X) \xrightarrow{\sim} H(X) \ .$$

Lemme 4.4.4. *a) Pour tout $k > n$, $H_k(X^n)$ est nul.*
b) Pour $k < n$, l'inclusion induit un isomorphisme $H_k(X^n) \to H_k(X^{n+1})$.
c) Pour tout n, l'inclusion induit un morphisme injectif $H_n(X^n) \to C_n^{\mathrm{cell}}(X)$ d'image le sous-groupe des cycles cellulaires : $Z_n^{\mathrm{cell}}(X)$.
d) Pour tout n, l'inclusion induit un morphisme surjectif

$$Z_n^{\mathrm{cell}}(X) \approx H_n(X^n) \to H_n(X^{n+1})$$

de noyau le sous-groupe des bords cellulaires : $B_n^{\mathrm{cell}}(X)$.

On obtient a) avec l'exactitude et une récurrence fini sur n, b) avec l'exactitude, c) et d) en chassant dans le bon diagramme. On prouve ensuite le théorème en utilisant d) et b), puis la limite inductive si le complexe cellulaire a des cellules dont les dimensions ne sont pas bornées.