Chapitre 4

Cohomologie, structures multiplicatives

4.1 Groupes de cohomologie et coefficients universels

4.1.1 Complexe de cochaînes

Définition 4.1.1. Un complexe de cochaînes $C = (C^n, \delta^n)$ est une suite de groupes abéliens C^n, $n \in \mathbb{Z}$, et une suite de morphismes $\delta^n : C^n \to C^{n+1}$, vérifiant pour tout n : $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$.

Etant donné un complexe de cochaînes (C^n, δ^n), on définit sa cohomologie :

$$H^n(C) = \frac{Z^n(C)}{B^n(C)} ,$$

où $Z^n(C) = \mathrm{Ker}(\delta^n)$ est le sous-groupe des cocycles, et $B^n(C) = \mathrm{Im}(\delta^{n-1})$ est le sous-groupe des cobords.

La dualité permet de construire un complexe de cochaînes à partir d'un complexe de chaînes. Plus généralement, si $C = (C_*, \partial_*)$ est un complexe de chaînes et G un groupe, alors les groupes $C^n = Hom(C_n, G)$ forment un complexe de cochaînes avec le cobord $\delta^n = (-1)^{n+1}\mathrm{Hom}(\partial_{n+1}, \mathrm{Id}_G)$.

La cohomologie singulière à coefficients dans le groupe abélien G est obtenue avec les complexes de cochaînes $C^*(X, A; G) = Hom(C_*(X, A), G))$ (sous-groupe de $C^*(X, G)$ formé des applications nulle sur $C_*(A)$).

4.1.2 Coefficients universels

On rappelle que tout sous-module d'un module libre sur un anneau principal est libre [1]. Il en résulte que tout module M sur un anneau principal a une présentation libre : il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{i} L \xrightarrow{p} M \longrightarrow 0\,,$$

avec L et R qui sont des modules libres.

Exercice 4.1.2. a) Montrer que la suite obtenue en appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}(\ .\ , G)$:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(M'', G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(M, G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(M', G)\ ,$$

est exacte.
b) Est-ce que le dernier morphisme est surjectif en général ?

Lemme 4.1.3. *Soient* $\mathbf{k}$ *un anneau principal,* M, M', G *des* $\mathbf{k}$*-modules,* $f : M \to M'$ *une application* $\mathbf{k}$*-linéaire, et des présentations libres :*

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{i} L \xrightarrow{p} M \longrightarrow 0\,,$$

$$0 \longrightarrow R' \xrightarrow{i'} L' \xrightarrow{p'} M' \longrightarrow 0\,,$$

il existe une application linéaire canonique entre les conoyaux :

$$\mathrm{coker}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(i', \mathrm{Id}_G)) \longrightarrow \mathrm{coker}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(i, \mathrm{Id}_G))\ ,$$

induite par l'application du foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\ .\ , G)$ *à la restriction à* R *d'un relèvement à* L' *de* $f \circ p$.

Théorème 4.1.4. *Avec les notations précédentes, le groupe*

$$\mathrm{Ext}_{\mathbf{k}}(M, G) = \mathrm{coker}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(i, \mathrm{Id}_G))$$

est canonique et $\mathrm{Ext}_{\mathbf{k}}$ *s'étend en un bifoncteur, contravariant dans la première variable et covariant dans la seconde. Dans le cas où l'anneau est* $\mathbb{Z}$ *(groupes abéliens) on note simplement* $\mathrm{Ext}(M, G)$.

Exercice 4.1.5. Montrer que si on a une suite exacte de $\mathbf{k}$-modules avec $\mathbf{k}$ un anneau principal :

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0\ ,$$

alors pour tout $\mathbf{k}$-module G il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M'', G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M', G) \longrightarrow\ ,$$

$$\mathrm{Ext}_{\mathbf{k}}(M'', G) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathbf{k}}(M, G) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathbf{k}}(M', G) \longrightarrow 0\ ,$$

1. Dans le cas général, la preuve utilise une récurrence transfinie. Voir par exemple le livre de Hungerford, *Algebra*, chIV.6.

Exercice 4.1.6. Montrer que pour $n > 0$: $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, G) \cong G/nG$ et que $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}, G)$ est nul.

Exercice 4.1.7. Montrer que pour G fixé, $\mathrm{Ext}_{\mathbf{k}}(\oplus_i M_i, G) \cong \prod_i \mathrm{Ext}_{\mathbf{k}}(M_i, G)$.

Théorème 4.1.8 (Coefficients universels). *Etant donné un complexe de chaînes libre $C = (C_*, \partial_*)$, pour tout groupe abélien G il existe une suite exacte naturelle*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}(H_{n-1}(C), G) \longrightarrow H^n(\mathrm{Hom}(C, G)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_n(C), G) \longrightarrow 0 \ .$$

De plus la suite est scindée, mais ne l'est pas naturellement.

Exercice 4.1.9. Calculer $H^*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et $H^*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z})$.

4.1.3 Cohomologie singulière

La construction précédente permet de définir la cohomologie singulière d'une paire d'espaces à coefficients dans un groupe abélien G : $H^*(X, Y; G)$. Les propriétés d'exactitude, homotopie et excision valent pour la cohomologie. Pour les CW-complexes, l'isomorphisme naturel avec l'homologie cellulaire vaut également pour la cohomologie.

Une suite exacte de coefficients donne lieu à une suite exacte des complexes de cochaînes, donc à une suite exacte longue dite de Bockstein. Pour la cohomologie des paires d'espaces :

Théorème 4.1.10. *Etant donné une suite exacte de groupes abéliens :*

$$0 \longrightarrow G' \longrightarrow G \longrightarrow G'' \longrightarrow 0 \ ,$$

il existe une suite exacte longue naturelle pour les paires d'espaces :

$$\longrightarrow H^n(X, Y; G') \longrightarrow H^n(X, Y; G) \longrightarrow H^n(X, Y; G'') \xrightarrow{\beta} H^{n+1}(X, Y; G') \longrightarrow$$

Exercice 4.1.11. Expliciter le connectant β (Bockstein).

4.2 Homologie avec coefficients

L'homologie singulière à coefficients dans le groupe abélien G est obtenue avec les complexes de chaînes $C_*(X, A; G) = C_*(X, A) \otimes G$.

Coefficients universels

Lemme 4.2.1. *Soient* $\mathbf{k}$ *un anneau principal,* M*,* M'*,* G *des* $\mathbf{k}$*-modules,* $f : M \to M'$ *une application* $\mathbf{k}$*-linéaire, et des présentations libres :*

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\ i\ } L \xrightarrow{\ p\ } M \longrightarrow 0\ ,$$

$$0 \longrightarrow R' \xrightarrow{\ i'\ } L' \xrightarrow{\ p'\ } M' \longrightarrow 0\ .$$

Il existe une application linéaire canonique entre les noyaux :

$$\ker(p \otimes \mathrm{Id}_G) \longrightarrow \ker(p' \otimes \mathrm{Id}_G)\ ,$$

obtenu par l'application du foncteur $\ .\otimes G$ *à la restriction à* R *d'un relèvement de* $f \circ p$ *à* L'*.*

Théorème 4.2.2. *Avec les notations précédentes, le groupe*

$$\mathrm{Tor}^{\mathbf{k}}(M, G) = \ker(p \otimes \mathrm{Id}_G))$$

est canonique et $\mathrm{Tor}^{\mathbf{k}}$ *s'étend en un bifoncteur covariant dans les 2 variables.*

Dans le cas de l'anneau $\mathbb{Z}$, on note simplement $\mathrm{Tor}(M, G)$.

Exercice 4.2.3. Montrer que si on a une suite exacte de $\mathbf{k}$-modules avec $\mathbf{k}$ un anneau principal :

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0\ ,$$

alors pour tout $\mathbf{k}$-module G il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}^{\mathbf{k}}(M', G) \longrightarrow \mathrm{Tor}^{\mathbf{k}}(M, G) \longrightarrow \mathrm{Tor}^{\mathbf{k}}(M'', G) \longrightarrow\ ,$$

$$M' \otimes G \longrightarrow M \otimes G \longrightarrow M'' \otimes G \longrightarrow 0\ ,$$

Proposition 4.2.4. *Soit* $\mathbf{k}$ *un anneau principal et* G *un* $\mathbf{k}$*-module.*
a) $\mathrm{Tor}^{\mathbf{k}}(\mathbf{k}, G)$ *est nul.*
b) Pour $a \in \mathbf{k} - \{0\}$ *:* $\mathrm{Tor}^{\mathbf{k}}(\mathbf{k}/a\mathbf{k}, G) \cong \{x \in G,\ ax = 0\}$*.*
c) Pour une famille M_i*,* $i \in I$*, de* $\mathbf{k}$*-modules :*

$$\mathrm{Tor}^{\mathbf{k}}(\oplus_i M_i, G) \cong \oplus_i \mathrm{Tor}^{\mathbf{k}}(M_i, G)\ .$$

Théorème 4.2.5 (Coefficients universels)**.** *Etant donné un complexe de chaînes libre sur* $\mathbf{k}$*,* $C = (C_*, \partial_*)$*, pour tout* $\mathbf{k}$*-module* G *il existe une suite exacte naturelle*

$$0 \longrightarrow H_n(C) \otimes G \longrightarrow H_n(C \otimes G) \longrightarrow \mathrm{Tor}^{\mathbf{k}}(H_{n-1}(C), G) \longrightarrow 0\ .$$

De plus la suite est scindée, mais ne l'est pas naturellement.

Exemple 4.2.6. $H_k(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } 0 \leq k \leq n\,; \\ \{0\} & \text{sinon.} \end{cases}$

4.2.1 Homologie singulière avec coefficients

La construction précédente permet de définir l'homologie singulière d'une paire d'espaces à coefficients dans un groupe abélien G : $H_*(X, Y; G)$. Les propriétés d'exactitude, homotopie et excision valent encore, ainsi que l'isomorphisme naturel avec l'homologie cellulaire pour les CW-complexes.

Une suite exacte de coefficients donne aussi lieu à une suite exacte de Bockstein. Pour l'homologie des paires d'espaces :

Théorème 4.2.7. *Etant donné une suite exacte de groupes abéliens :*

$$0 \longrightarrow G' \longrightarrow G \longrightarrow G'' \longrightarrow 0 \ ,$$

il existe une suite exacte longue naturelle pour les paires d'espaces :

$$\longrightarrow H_n(X, Y; G') \longrightarrow H_n(X, Y; G) \longrightarrow H_n(X, Y; G'') \xrightarrow{\beta} H_{n-1}(X, Y; G') \longrightarrow \cdot$$

Exercice 4.2.8. Dans le cas de la suite exacte de coefficients :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \ ,$$

montrer que l'image du connectant de Bockstein β est égale à la torsion de $H_{n-1}(X, Y; \mathbb{Z})$.

4.3 Homologie des produits

4.3.1 Produit tensoriel de complexes

Etant donnés deux complexes $C = (C_*, \partial_*)$ et $C' = (C'_*, \partial'_*)$, leur produit tensoriel est le groupe abélien gradué

$$(C \otimes C')_n = \sum_{p+q=n} C_p \otimes C_q \ ,$$

muni du bord défini par $\partial(x \otimes x') = \partial x \otimes x' + (-1)^{\deg(x)} x \otimes \partial x'$.

Théorème 4.3.1 (Kunneth algébrique)**.** *Si C et C' sont des complexes libres, alors il existe une suite exacte naturelle :*

$$0 \longrightarrow (H_*(C) \otimes H_*(C'))_n \longrightarrow H_n(C \otimes C') \longrightarrow \mathrm{Tor}(H_*(C), H_*(C'))_{n-1} \longrightarrow 0 \ ,$$

et cette suite est scindée.

Remarque 4.3.2. Cet énoncé vaut pour des complexes libres sur un anneau principal $\mathbf{k}$ (avec des produits tensoriels de $\mathbf{k}$-modules).

4.3.2 Equivalence d'Eilenberg-Zilber

Pour étudier l'homologie d'un produit : $H_*(X \times Y)$, il est utile de comparer les deux complexes : $C_*(X \times Y)$ et $C_*(X) \otimes C_*(Y)$. Ceux-ci définissent deux bifoncteurs sur la catégorie des espaces topologiques (deux foncteurs sur la catégorie des couples d'espaces topologiques). Ces deux foncteurs sont libres et acycliques avec modèles les produits $\Delta_p \times \Delta_q$. Il en résulte que l'application canonique en degré zéro s'étend en une équivalence d'homotopie entre ces deux complexes, unique à homotopie près.

Théorème 4.3.3. *Il existe des morphismes naturels uniques à homotopie près :*

$$\times : C_*(X) \otimes C_*(Y) \to C_*(X \times Y) \ ,$$

et

$$EZ : C_*(X \times Y) \to C_*(X) \otimes C_*(Y) \ ,$$

qui étendent l'application canonique en degré zéro. Ces morphismes de chaînes sont inverses à homotopie près.

4.3.3 Théorème de Kunneth géométrique

Théorème 4.3.4 (Kunneth géométrique)**.** *Il existe une suite exacte naturelle :*

$$0 \longrightarrow (H_*(X) \otimes H_*(Y))_n \longrightarrow H_n(X \times Y) \longrightarrow \mathrm{Tor}(H_*(X), H_*(Y))_{n-1} \longrightarrow 0 \ ,$$

et cette suite est scindée.

Plus généralement :

Théorème 4.3.5 (Kunneth géométrique, cas relatif)**.** *Pour A ouvert de X et B ouvert de Y, il existe une suite exacte naturelle :*

$$\begin{array}{cccc} 0 \longrightarrow & (H_*(X,A) \otimes H_*(Y,B))_n & \longrightarrow & H_n(X \times Y, X \times B \cup A \times Y) \\ \longrightarrow & \mathrm{Tor}(H_*(X,A), H_*(Y,B))_{n-1} & \longrightarrow & 0 \qquad , \end{array}$$

et cette suite est scindée.

Remarque 4.3.6. Le théorème de Kunneth est valide avec coefficients dans un anneau principal.

4.4 Produit extérieur en cohomologie

Soit $\mathbf{k}$ un anneau. Le produit tensoriel de deux cochaînes $f \in C^p(X, \mathbf{k})$, $g \in C^q(Y, \mathbf{k})$ est l'élément de $\mathrm{Hom}(C_p(X) \otimes C_q(Y), \mathbf{k})$ défini par

$$< f \otimes g, x \otimes y >= (-1)^{pq} < f, x >< g, y > \ .$$

Le produit extérieur des cochaînes :

$$\times : C^p(X, \mathbf{k}) \otimes C^q(Y, \mathbf{k}) \to C^{p+q}(X \times Y, \mathbf{k})$$

est défini par :

$$< f \times g, c >=< f \otimes g, EZ(c) >,$$

où EZ est une équivalence d'homotopie d'Eilenberg-Zilber.

Proposition 4.4.1. *a) Le produit extérieur est un morphisme de cochaînes :*

$$\delta(f \times g) = \delta f \times g + (-1)^{\deg(f)} f \times \delta g \ .$$

b) Il induit une application naturelle en cohomologie :

$$\times : H^p(X, \mathbf{k}) \otimes H^q(Y, \mathbf{k}) \to H^{p+q}(X \times Y, \mathbf{k}) \ .$$

c) Pour A ouvert de X et B ouvert de Y, le produit extérieur induit une application naturelle en cohomologie relative :

$$\times : H^p(X, A; \mathbf{k}) \otimes H^q(Y, B; \mathbf{k}) \to H^{p+q}(X \times Y, A \times Y \cup X \times B; \mathbf{k}) \ .$$

Proposition 4.4.2. *a) Le produit extérieur en cohomologie est associatif.*
b) Si $1_X \in H^0(X, \mathbf{k})$ note la classe de cohomologie de l'augmentation et $\pi_Y : X \times Y \to Y$ est la projection, on a :

$$\forall \beta \in H^q(Y, \mathbf{k}) \ 1_X \times \beta = \pi_Y^*(\beta) \ .$$

c) Soit $P : X \times Y \to Y \times X$ la permutation des deux facteurs.

$$\forall \alpha \in H^p(X, \mathbf{k}) \ , \forall \beta \in H^q(Y, \mathbf{k}) \ : \ P^*(\beta \times \alpha) = (-1)^{pq} \alpha \times \beta \ .$$

d) Pour $\alpha \in H^p(X, \mathbf{k})$, $\beta \in H^q(Y, \mathbf{k})$, $x \in H_p(X, \mathbf{k})$, $y \in H_q(Y, \mathbf{k})$,

$$< \alpha \times \beta, x \times y >= (-1)^{pq} < \alpha, x >< \beta, y > \ .$$

4.5 Algèbre de cohomologie

4.5.1 Définition du produit cup

Définition 4.5.1. Une *diagonale* est un morphisme de chaînes naturel

$$\mathrm{diag} : C_*(X) \to C_*(X) \otimes C_*(X) \ ,$$

qui étend l'inclusion diagonale des 0-simplexes : $x \mapsto x \otimes x$.

Les modèles acycliques justifient l'existence et l'unicité à homotopie près d'une diagonale. On obtient une diagonale en composant l'application $C_*(d)$, où $d : X \to X \times X$ est l'inclusion diagonale, avec un morphisme d'Eilenberg-Zilber. Une diagonale explicite (Alexander-Whitney) est donnée pour un n-simplexe σ par la formule :

$$\sigma \mapsto \sum_{p+q=n} {}_p\sigma \otimes \sigma_q \ ,$$

où ${}_p\sigma$ est la p-face avant : ${}_p\sigma(t_0, \dots, t_p) = \sigma(t_0, \dots, t_p, 0, \dots, 0)$ et σ_q est la q-face arrière : $\sigma_q(t_0, \dots, t_q) = \sigma(0, \dots, 0, t_0, \dots, t_q)$.

On définit le produit *cup* des cochaînes à coefficients dans un anneau $\mathbf{k}$ en dualisant la diagonale :

$$\text{Pour } u \in C^p(X, \mathbf{k}),\ v \in C^q(X, \mathbf{k}) \ \ < u \cup v, x >=< u \otimes v, \mathrm{diag}(x) > \ .$$

Remarque 4.5.2. Pour la diagonale d'Alexander-Whitney, l'évaluation sur un simplexe est donnée par la formule :

$$\text{Pour } u \in C^p(X, \mathbf{k}),\ v \in C^q(X, \mathbf{k}) \ \ < u \cup v, \sigma >= (-1)^{pq} < u, {}_p\sigma >< v, \sigma_q > \ .$$

Théorème 4.5.3. *a) Le produit cup est un morphisme naturel de complexes de cochaînes : $\delta(u \cup v) = \delta u \cup v + (-1)^{\deg(u)} u \cup \delta v$.*
b) Il induit sur la cohomologie une opération bien définie (indépendante de la diagonale choisie), qui munit $H^*(X, \mathbf{k})$ d'une structure naturelle d'anneau.
c) Si A et B sont deux ouverts de X, alors le produit cup est bien défini et naturel :

$$\cup : H^p(X, A; \mathbf{k}) \otimes H^q(X, B; \mathbf{k}) \to H^{p+q}(X, A \cup B; \mathbf{k}) \ .$$

4.5.2 Autres propriétés du produit cup

Naturalité. Si l'application continue $f : X \to X'$ induit les applications de paires :

$$f_A : (X, A) \to (X', A') \ , \ f_B : (X, B) \to (X', B') \ , \ f_{A \cup B} : (X, A \cup B) \to (X', A' \cup B') \ ,$$

alors :

$$\forall \alpha \in H^p(X', A'; \mathbf{k}) \ , \ \forall \beta \in H^p(X', B'; \mathbf{k}) \ : \ f_A^*(\alpha) \cup f_A^*(\beta) = f_{A \cup B}^*(\alpha \cup \beta) \ .$$

Supersymétrie.

$$\forall \alpha \in H^p(X', A'; \mathbf{k}) \ , \ \forall \beta \in H^p(X', B'; \mathbf{k}) \ : \alpha \cup \beta = (-1)^{\deg(\alpha)\deg(\beta)} \beta \cup \alpha \ .$$

Relation avec l'exactitude.
Pour $i : A \hookrightarrow X$, $\alpha \in H^p(A, \mathbf{k})$, $\beta \in H^q(X, \mathbf{k})$, $\delta(\alpha \cup i^*(\beta)) = (\delta\alpha) \cup \beta$.

4.5.3 Exemple : $D^p \times D^q$

On note $[D^p]^\sharp \in H^p(D^p, S^{p-1})$ (resp. $\beta \in H^q(D^q, S^{q-1})$) la classe duale de la classe fondamentale $[D^p]$ (resp. $[D^q]$).

Le produit $\times$ est bien défini :

$$\times : H^*(D^p, S^{p-1}) \otimes H^*(D^q, S^{q-1}) \to H^*(D^p \times D^q, \partial(D^p \times D^q)) \ .$$

Avec $\alpha = [D^p]^\sharp \times 1$ et $\beta = 1 \times [D^q]^\sharp$, on a : $< \alpha \cup \beta, [D^p \times D^q] >= 1$.

Comme d'autre part :

$$< \alpha \cup \beta, [D^p] \times [D^q] >=< [D^p]^\sharp \times [D^q]^\sharp, [D^p] \times [D^q] >= (-1)^{pq} \ ,$$

ce calcul montre que $[D^p] \times [D^q] = [D^p \times D^q]$.

4.5.4 Anneau de cohomologie des espaces projectifs

Théorème 4.5.4. *Pour $n \geq 1$, l'anneau de cohomologie $H^*(\mathbb{C}P^n)$ est engendré par $\alpha \in H^2(\mathbb{C}P^n)$, classe duale de $[\mathbb{C}P^1] \in H_2(\mathbb{C}P^n)$, et on a un isomorphisme :*

$$\mathbb{Z}[\alpha]/\alpha^{n+1} \simeq H^*(\mathbb{C}P^n) \ .$$

Lemme 4.5.5. *Avec les notations précédentes : $< \alpha^k, [\mathbb{C}P^k] >= 1$ pour $1 \leq k \leq n$.*