Topologie algébrique

Christian Blanchet

M2, Paris-Diderot (Paris 7), 2011-2012

Résumé

Programme :

1. Compléments de topologie : Espaces quotients, recollements, attachement de cellules. Complexes simpliciaux, complexes cellulaires. Variétés topologiques à bord, recollement de variétés. Homotopie, équivalence d'homotopie, rétraction, rétraction par déformation.
2. Homologie singulière : définition, homotopie, excision, suite exacte de Mayer-Vietoris, homologie des sphères. Caractérisation axiomatique de l'homologie.
3. Homologie : calcul et applications.
4. Homologie et homotopie : groupe fondamental et revêtement, abélianisé du groupe fondamental ; homotopie des espaces fibrés ; homomorphisme de Hurevicz.
5. Cohomologie, structures multiplicatives.
6. Homologie des variétés, orientation, dualité de Poincaré.
7. Homologie à coefficients locaux.
8. Topologie des espaces d'applications.
9. Transversalité, applications en petite dimension.
10. Cobordisme et théorie de Morse.

Bibliographie :

1. Algebraic topology, Allen Hatcher, Cambridge University Press.
2. Topology and Geometry, Glen Bredon, Springer.
3. Algebraic Topology, Tammo Tom Dieck, EMS.
4. Algebraic Topology, Edwin H. Spanier, Springer.

Chapitre 1

Espaces topologiques, exemples

Introduction

On suppose connues les notions de base de topologie (voir par exemple Bourbaki, Topologie générale I). Un espace compact est un espace topologique séparé qui vérifie la propriété de Borel-Lebesgue. Le cas échéant on dira quasi-compact pour un espace topologique non nécessairement séparé qui vérifie la propriété de Borel-Lebesgue. La topologie algébrique développe des outils (des invariants) pour étudier notamment le problème d'homéomorphisme. Etant donnés deux espaces topologiques, soit on peut construire un homéomorphisme, soit on calcule certains de leurs invariants en espérant les distinguer. On rappelle la proposition suivante, utile dans la construction d'homéomorphismes.

Proposition 1.0.1. *Toute application continue injective d'un espace quasi-compact dans un espace séparé est un plongement (un homéomorphisme avec son image munie de la topologie induite) ; en particulier toute application continue bijective d'un espace quasi-compact dans un espace séparé est un homéomorphisme.*

1.1 Construction d'espaces quotients

On note X/A le quotient de l'espace topologique X par la relation d'équivalence qui identifie tous les points du sous-espace A.

Exercice 1.1.1. Montrer que si A est une partie compacte d'une espace X séparé, alors X/A est séparé.

Notation : $D^n \subset \mathbb{R}^n$ est la boule unité, $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ est la sphère unité.

Exercice 1.1.2. Montrer que D^n/S^{n-1} est homéomorphe à S^n.

Soient $A \subset X$, et $f : A \to Y$ une application continue. On note $Y \cup_f X$ le quotient de $Y \amalg X$ par la relation d'équivalence engendrée par les identifications de a avec $f(a)$, pour tout $a \in A$.

Exercice 1.1.3. Montrer que la sphère S^3 est homéomorphe à $D^2 \times S^1 \cup_{Id_{S^1 \times S^1}} S^1 \times D^2$.

Exercice 1.1.4. Montrer que si A est un fermé de X, et $f : A \to Y$ est une application continue, alors la projection canonique $Y \amalg X \to Z = Y \cup_f X$ induit un plongement fermé $Y \to Z$, et un plongement ouvert $(X - A) \to Z$.

Soit X un espace topologique. Une application $f : X \to Y$ définit sur X une relation d'équivalence : définie par l'égalité des images. On note $X/\mathcal{R}_f$ l'espace topologique quotient.

Définition 1.1.5. Une application continue $f : X \to Y$ est une application quotient si et seulement si elle induit un homéomorphisme $X/\mathcal{R}_f \approx Y$.

Remarque 1.1.6. Si f est ouverte (resp. fermée), alors f est une application quotient. Si f est surjective, X quasi-compact et Y séparé, alors f est une application quotient.

1.2 Complexes simpliciaux

Définition 1.2.1. Un complexe simplicial $K = (V, S)$ consiste en un ensemble V de sommets et un ensemble $S \subset \mathcal{P}(V)$ de sous-ensembles finis de V, appelés simplexes, tels que :
a) S contient tous les singletons ;
b) tout sous-ensemble non vide (face) d'un simplexe $\sigma \in S$ est dans S.

Si σ est un simplexe (un ensemble fini), alors sa réalisation géométrique $|\sigma|$ est *l'enveloppe convexe de ses sommets* : $|\sigma| = \{\sum_{v\in\sigma} t_v v\} \subset \mathbb{R}^\sigma$. La réalisation géométrique $|K|$ est l'espace quotient de $\amalg_\sigma |\sigma|$ par la relation d'équivalence associée à l'application qui étend l'inclusion de V dans $\mathbb{R}^V$ linéairement sur chaque simplexe.

Si on munit $\mathbb{R}^V$ de la topologie produit, alors l'inclusion $|K| \to \mathbb{R}^V$ est continue, donc l'espace topologique $|K|$ est séparé. Cette inclusion n'est pas toujours un plongement. On peut aussi mettre sur $|K|$ la topologie métrique :

$$d(\sum_v t_v v, \sum_v t'_v v) = \sqrt{\sum_v (t_v - t'_v)^2)}\ .$$

On note $|K|_d$ l'espace topologique correspondant ; la topologie de $|K|$ est plus fine que celle de $|K|_d$.

Définition 1.2.2. Un complexe simplicial est localement fini si et seulement si chaque sommet n'appartient qu'à un nombre fini de simplexe.

Etant donné un simplexe géométrique $|\sigma|$, on note $|\dot{\sigma}|$ son bord : au moins une coordonnée barycentrique nulle, et $< \sigma >= |\sigma| - |\dot{\sigma}|$ le *simplexe ouvert*. Les simplexes ouverts forment une partition de $|K|$.

Lemme 1.2.3. *Soient $K = (V, S)$ un complexe simplicial et $A \subset |K|$ un sous-espace de sa réalisation géométrique. Un sous-ensemble $A' \subset A$ représentatif de la partition de A obtenue en intersectant avec les simplexes ouverts $< \sigma >$ est un sous-espace fermé discret.*

Démonstration. Chaque σ ne contient qu'un nombre fini de points de A', donc A' est fermé dans X. Pour chaque $x \in A'$, $A' - \{x\}$ est aussi fermé dans X et aussi dans A'. Le point $\{x\}$ est donc ouvert de A'. □

Corollaire 1.2.4. *Un sous-ensemble de $|K|$ est relativement compact si et seulement s'il est contenu dans une réunion finie de simplexes.*

Théorème 1.2.5 (Spanier Ch3.II.8)**.** *Pour un complexe simplicial $K = (V, S)$, il y a équivalence entre :*

(a) K est localement fini ;

(b) $|K|$ est localement compact ;

(c) les topologies de $|K|$ et de $|K|_d$ sont les mêmes ;

(d) $|K|$ est métrisable ;

Définition 1.2.6. Une triangulation d'un espace topologique X est la donnée d'un complexe simplicial $K = (V, S)$ et d'un homéomorphisme entre $|K|$ et X.

Remarque 1.2.7. Un complexe simplicial fini (nombre fini de simplexes) est compact. Dans ce cas une bijection continue $|K| \to X$ est une triangulation.

Définition 1.2.8. Une subdivision d'un complexe simplicial $K = (V, S)$ est un complexe simplicial $K' = (V', S')$ tel que :

a) $V' \subset |K|$,

b) tout simplexe $\sigma' \in S'$ est contenu dans la réalisation $|\sigma|$ d'un simplexe $\sigma \in S$;

c) l'application $|K'| \to |K|$ qui étend linéairement l'inclusion de S' est un homéomorphisme.

Théorème 1.2.9 (Spanier Ch3.III.4)**.** *Soient $K = (V, S)$ et $K' = (V', S')$ des complexes simpliciaux satisfaisant les conditions a) et b) ci-dessus, alors K' est une subdivision de K si et seulement si pour tout $s \in K$, les $< \sigma' > \subset < \sigma >$ forment une partition finie de $< \sigma >$.*

La subdivision barycentrique d'un complexe simplicial $K = (V, S)$ a pour sommets les isobarycentres w_σ des faces $\sigma \in F$ de K. Ses simplexes sont en bijection avec les suites d'inclusions $\sigma_0 \subset \sigma_1 \subset \cdots \subset \sigma_m$ de simplexes de K. D'après le théorème précédent, c'est une subdivision de K.

Homologie simpliciale

Une orientation d'un simplexe est un ordre total de ses sommets à permutation paire près : chaque simplexe a deux orientations. On définit l'homologie simpliciale avec le complexe de chaîne $(C^{\mathrm{simp}}(K), \partial)$, où $C^{\mathrm{simp}}(K)$ est le groupe abélien libre engendré par les simplexes orientés, quotienté par la relation qui identifie un simplexe orienté avec l'opposé du même simplexe muni de l'autre orientation. Ce groupe est gradué par la dimension des simplexes : $C^{\mathrm{simp}}(K) = \sum_{n\geq 0} C_n^{\mathrm{simp}}(K)$.

Le bord $\partial_n : C_n^{\mathrm{simp}}(K) \to C_{n-1}^{\mathrm{simp}}(K)$ est définie par :

$$\partial_n[v_0, \ldots, v_n] = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [v_O, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n] \ .$$

Ici $[v_0, \ldots, v_n]$ note le simplexe avec l'orientation donné par l'ordre d'énumération, et $[v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n]$ est la face orientée opposée au sommet v_i, i.e. obtenue en enlevant v_i.

On vérifie $\partial \circ \partial = 0$ et on définit :

$$H_n^{\mathrm{simp}}(K) = Z_n(K)/B_n(K) \ ,$$

où $Z_n(K)$ est le noyau de ∂_n et $B_n(K)$ est l'image de ∂_{n+1}.

On peut montrer que l'homologie est invariante par subdivision. On montrera que dans le cas d'une triangulation, c'est un invariant topologique : les homologies simpliciales de deux triangulations sont (canoniquement) isomorphes.

1.3 Espaces cellulaires

Définition 1.3.1. Soit X un espace topologique, on dit que X est obtenu à partir de $A \subset X$ par attachement de cellules de dimension n si et seulement s'il existe des applications

$$(\Phi_i, \phi_i) : (D^n, S^{n-1}) \to (X, A), \quad i \in I \ ,$$

telles que l'application induite par l'inclusion de A et $\Phi = \amalg_i \phi_i$

$$A \cup_\phi \amalg_i D_i^n \to X \ ,$$

soit un homéomorphisme.

Définition 1.3.2. Un CW-complexe est un espace topologique X muni d'une filtration

$$X^0 \subset X^1 \subset X^2 \subset \ldots$$

par des sous-espaces fermés de réunion X, telle que :

1. X^0 est un espace discret ;

2. Pour $n \geq 1$, X^n est obtenu à partir de X^{n-1} par attachement de cellules de dimension n ;
3. X a la topologie faible définie par les X^n : $F \subset X$ est fermé si et seulement si pour tout n, $F \cap X^n$ est fermé.

Le sous-espace X^n est le n-squelette. Les composantes connexes de $X^n - X^{n-1}$ sont les n-cellules ouvertes. Dans CW, W est pour *Weak* (weak topology = topologie faible), et le C est pour *Closure finite* : l'adhérence de chaque n-cellule ne rencontre qu'un nombre fini de cellules du $n-1$-squelette.

On définit l'homologie cellulaire avec le complexe de chaîne $(C^{\text{cell}}(K), \partial)$, où $C^{\text{cell}}(K)$ est le groupe abélien libre engendré par les cellules orientées, quotienté par changement de signe pour le changement d'orientation. La définition du bord en général utilisera la notion de degré. Dans le cas où chaque application d'attachement $\phi : S^{n-1} \to X^{n-1}$ d'une cellule de dimension n a au moins une valeur régulière [1] pour chaque cellule de dimension $n-1$ rencontrée par l'image de son bord, alors chaque pré-image contribue par ± 1 suivant le signe du jacobien dans des cartes locales orientées. La convention d'orientation pour une sphère $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ est donnée par est donnée par la projection stéréographique de pôle $(-1, 0, \ldots, 0)$.

La réalisation d'un complexe simplicial a une ctructure de CW-complexe, et dans ce cas, les complexes de chaînes simpliciaux et cellulaires coïncident. Nous démontrerons l'invariance topologique pour l'homologie cellulaire.

1.4 Variétés topologiques

Définition 1.4.1. Une variété topologique de dimension n à bord est un espace séparé dénombrable à l'infini (réunion dénombrable de compacts) dans lequel tout point a un voisinage homéomorphe à un ouvert de $]-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1}$; un tel homéomorphisme est appelé une carte.

On montrera que la dimension est bien définie : une variété de dimension n n'est pas homéomorphe à une variété de dimension $m \neq n$.

On définit le bord ∂M d'une variété M comme l'ensemble des points x qui n'ont pas de voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}^n$; c'est une variété de dimension $n-1$.

Exercice 1.4.2. Montrer que toute variété compacte se plonge dans un espace euclidien de dimension finie $\mathbb{R}^N$.

Exercice 1.4.3. Montrer que toute variété se plonge dans $l^2(\mathbb{R})$.

1. Cela veut dire qu'en chaque préimage ϕ est un difféomorphisme local ;

Une variété differentiable de classe C^k $(1 \leq k \leq \infty)$ est une variété munie d'un atlas maximal dont les changements de carte sont de classe C^k. On appelle variété lisse une variété différentiable de classe C^∞.

Remarque 1.4.4. Les variétés topologiques de dimension inférieure ou égale à 3 admettent une structure lisse unique à difféomorphisme près (Moise, Annal of Math. 1952).

Etant donné deux variétés à bord M_1 et M_2 de dimension n, et $f : \partial M_2 \to \partial M_1$ un homéomorphisme, on définit le recollement $M = M_1 \cup_f M_2$ comme l'espace topologique quotient de l'union disjointe $M_1 \amalg M_2$ par la relation d'équivalence engendrée par $x_2 \sim f(x_2)$ pour tout $x_2 \in \partial M_2$.

Un collier pour une variété à bord M est un plongement $(]-1,0] \times \partial M, \{0\} \times M) \to (M, \partial M)$.

Théorème 1.4.5 (Brown)**.** *Toute variété topologique à bord admet un collier.*

L'énoncé de Brown comporte l'hypothèse *métrisable*. Pour un espace séparé localement euclidien, paracompact équivaut à métrisable.

Théorème 1.4.6. *a) Le recollement $M = M_1 \cup_f M_2$ de deux variété topologiques de dimension n le long de leur bord est une variété topologique de dimension n.*
b) Si M_1 et M_2 sont lisses, alors M admet une structure lisse qui étend celle de M_1 et M_2, unique à difféomorphisme près de support un voisinage arbitraire du lieu de recollement.

Remarque 1.4.7. Si M_1 et M_2 sont différentiables, une paire de colliers différentiables détermine une structure lisse précise sur le recollement M. Des colliers de classe C^k différents produisent des variétés C^k difféomorphes.

1.5 Homotopie

Définition 1.5.1. Une homotopie entre deux applications continues $f, g : X \to Y$ est une application continue

$$\begin{array}{rrcl} h: & [0,1] \times X & \to & Y \\ & (t,x) & \mapsto & h(t,x) = h_t(x) \end{array}$$

telle que : $h_0 = f$ et $h_1 = g$.

L'existence d'une homotopie est une relation d'équivalence et la composition est bien définies sur les classes d'homotopie.

Définition 1.5.2. Une équivalence d'homotopie entre deux espaces est une application continue qui est inversible comme classe d'homotopie ; les deux espaces sont dits homotopiquement équivalents.
Une espace est contratile si et seulement s'il est homotopiquement équivalent à un point.

Définition 1.5.3. Une rétraction par déformation d'un espace X sur un sous-espace A est une homotopie h entre l'identité de X et une rétraction de X sur A :
$\forall x \in X \ h(0, x) = x$,
$\forall x \in X \ h(1, x) \in A$,
$\forall a \in A \ h(1, a) = a$.

Dans le cas où la dernière condition est vrai pour tout (t, a) :
$\forall t \in [0, 1]$, $\forall a \in A \ h(t, a) = a$, on parle de rétraction par déformation forte.

Les groupes d'homologie que nous allons étudier, comme les groupes d'homotopie sont invariants par équivalence d'homotopie. Utiliser de façon pertinente les rétractions par déformation sera très utile pour le calcul.

1.6 Catégories

Définition 1.6.1. Une catégorie $\mathcal{C}$ est une structure algébrique formée par :
a) une *classe* d'objets,
b) pour chaque couple d'objets X et Y, un ensemble de morphismes $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ (ou simplement $\mathcal{C}(X, Y)$, c) pour chaque triplet d'objets X, Y, Z, une composition

$$Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathcal{C}}(X, Z) \ ,$$

vérifiant l'associativité de la composition et l'existence d'un morphisme identité $1_X \in Hom_{\mathcal{C}}(X, X) = End_{\mathcal{C}}(X)$, pour tout objet X.

Un isomorphisme est un morphisme inversible à gauche et à droite.

Exemple 1.6.2.
1. Les espaces topologiques avec les applications continues forment une catégorie notée Top.
2. Les espaces topologiques avec les classes d'homotopie d'applications continues forment une catégorie notée hTop.
3. Les groupes, les groupes abéliens, les groupes abéliens gradués ... avec leurs morphismes forment des catégories.

Définition 1.6.3. Un foncteur covariant F (resp. contravariant) de la catégorie $\mathcal{C}$ vers la catégorie $\mathcal{C}'$ associe à chaque objet X de $\mathcal{C}$ un objet $F(X)$ de $\mathcal{C}'$, et à chaque morphisme $g \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ un morphisme $F(g) \in Hom_{\mathcal{C}}(F(X), F(Y)$ (resp. $F(g) \in Hom_{\mathcal{C}}(F(Y), F(X)$ compatible avec la composition et respectant les morphismes identités.

L'homologie que nous allons étudier est un foncteur H de la catégorie Top (en fait hTop) vers la catégorie des groupes abéliens $\mathbb{Z}$-gradués. Il associe à chaque espace topologique X un groupe abélien gradué $H(X) = \oplus_n H_n(X)$, et à chaque application continue un morphisme de groupes abéliens gradués (homogène de degré 0). Les groupes sont triviaux en degré $n < 0$.

Donnons un exemple d'utilisation : Pour $m \geq 1$, $H_n(D^{m+1})$ est trivial pour $n > 0$, et $H_m(S^m) \approx \mathbb{Z}$. On déduit qu'il n'existe pas de rétraction de D^{m+1} sur S^m.

Chapitre 2

L'homologie singulière

2.1 Les groupes d'homologie d'un espace topologique

Le simplexe standard Δ_n est l'enveloppe convexe de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\Delta_n = \{(t_0, \dots, t_n),\ \forall i\ t_i \geq 0,\ \sum_i t_i = 1\} .$$

Définition 2.1.1. Un simplexe singulier de dimension n dans l'espace topologique X est une application continue $\sigma : \Delta_n \to X$.

Pour $0 \leq i \leq n$, la face d'indice i, F_i^n, de Δ_n est le simplexe singulier de dimension $n-1$ défini par :

$$F_i^n(t_0, \dots, t_{n-1}) = (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1}) .$$

On notera au besoin ce simplexe par la suite ordonnée de ses sommets : $(e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_n)$. Ici $(e_0, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$, et le chapeau signifie que e_i est enlevé de la suite. Cette notation pourra être utilisée pour les simplexes singuliers linéaires.

Avec cette notation, on a :

$$\forall i < j,\ F_j^{n+1} \circ F_i^n = (e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_{n+1}) = F_i^{n+1} \circ F_{j-1}^n .$$

Soit X une espace topologique. Pour $n \geq 0$, le groupe des chaînes singulières de dimension n est le groupe abélien libre $C_n(X)$ de base les simplexes singuliers de dimension n à valeur dans X. On définit pour $n \geq 1$, une *appplication bord* :

$$\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X) ,$$

en étendant linéairement la formule donnée pour un simplexe σ de dimension $n \geq 1$ par :

$$\partial_n \sigma = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma \circ F_i^n \ .$$

Pour $n = 0$, $\partial_0 : C_0(X) \to C_{-1}(X) = \{0\}$ est l'application nulle.

Proposition 2.1.2. *Pour tout $n \geq 0$, $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$.*

Définition 2.1.3. Un complexe de chaînes $C = (C_n, \partial_n)$ est une suite de groupes abéliens (C_n) et une suite de morphismes $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ vérifiant pour tout n, $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$.

Etant donné un complexe de chaîne $C = (C_n, \partial_n)$, on définit son homologie :

$$H_n(C) = \frac{Z_n(C)}{B_n(C)} \ ,$$

où $Z_n(C) = \mathrm{Ker}(\delta_n)$ est le sous-groupe des cycles, et $B_n(C) = \mathrm{Im}(\partial_{n+1})$ est le sous-groupe des bords.

Définition 2.1.4. L'homologie singulière d'un espace topologique X est l'homologie du complexe des chaînes singulières :

$$H_n(X) = \frac{Z_n(X)}{B_n(X)} \ .$$

Exercice 2.1.5. Calculer l'homologie d'un point.

Le groupe $C_0(X)$ s'identifie au groupe abélien libre de base X.

Proposition 2.1.6. *Si X est connexe par arc , alors $H_0(X) \approx \mathbb{Z}$.*

2.2 Fonctorialité

Définition 2.2.1. Un morphisme entre les complexes de chaînes $C = (C_n, \partial_n)$ et $C' = (C'_n, \partial'_n)$ est une suite de morphismes $g_n : C_n \to C'_n$ qui commutent avec les bords : pour tout n : $\partial'_n \circ g_n = g_{n-1} \circ \partial_n$.

Une suite de groupes abéliens (ou la somme directe de ceux-ci) est appelée *un groupe abélien gradué*; l'indice est appelé *degré*. Au besoin on étend l'indexation au groupe $\mathbb{Z}$ en considérant des groupes nuls en degré négatif. L'homologie définit un foncteur de la catégorie des complexes de chaînes vers la catégorie des groupes abéliens gradués.

A une application continue $f : X \to Y$, on associe la suite $C = (C_n(f))$ de morphismes :

$$\begin{array}{rccc} C_n(f) : & C_n(X) & \to & C_n(y) \\ & \sigma & \mapsto & f \circ \sigma \end{array}$$

Proposition 2.2.2. *Pour tout application continue f, $C(f)$ est un morphisme de complexes de chaînes et on obtient ainsi un foncteur de la catégorie des espaces topologiques vers la catégorie des complexes de chaînes.*

Corollaire 2.2.3. *L'homologie singulière définit un foncteur de la catégorie des espaces topologiques vers la catégorie des groupes abéliens gradués.*

Pour une application continue $f : X \to Y$, on note généralement $f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$ l'application induite en homologie. Un homéomorphisme induit un isomorphisme en homologie : les groupes d'homologie sont des *invariants topologiques.*

2.3 Exactitude

On étend le foncteur homologie singulière à la catégorie $Top(2)$ des paires d'espaces (X, Y), $Y \subset X$, les morphismes étant des applications continues dont la restriction est bien définie. Un espace topologique $X = (X, \emptyset)$ peut être considéré comme une paire, i.e. un objet de $Top(2)$.

$$C(X,Y) = \frac{C(X)}{C(Y} \ , H(X,Y) = H(C(X,Y)) \ .$$

Théorème 2.3.1. *Le bord induit une application bien définie $\partial_n : H_n(X,Y) \to H_{n-1}(Y)$. Ce morphisme est naturel (i.e. commute avec les morphismes induits par les applications continues) et donne lieu à une suite exacte longue :*

$$\cdots \to H_n(Y) \to H_n(X) \to H_n(X,Y) \to H_{n-1}(Y) \to \dots$$

où les deux premiers morphismes sont induits par les inclusions.

2.4 Propriétés de l'homologie singulière

2.4.1 Additivité

On rappelle que $\pi_0(X)$ est l'ensemble des composantes connexes par arcs de l'espace topologique X.

Théorème 2.4.1. *a) Soit X un espace topologique. Pour tout n,*

$$H_n(X) = \oplus_{Y \in \pi_0(X)} H_n(Y) \ .$$

b) Soit $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille d'espaces topologiques, pour tout n,

$$H_n(\amalg_{\alpha \in A} X_\alpha) = \oplus_{\alpha \in A} H_n(X_\alpha) \ .$$

Corollaire 2.4.2. *Pour tout espace topologique X, $H_0(X)$ s'identifie au groupe abélien libre de base $\pi_0(X)$.*

2.4.2 Homotopie

Théorème 2.4.3. *Des applications continues homotopes induisent des isomorphismes en homologie.*

Corollaire 2.4.4. *Un équivalence d'homotopie induit un isomorphisme en homologie.*

2.4.3 Excision

Théorème 2.4.5. *Soit (X, Y) une paire d'espace. Si l'adhérence de U est contenue dans l'intérieur de Y, alors l'inclusion de $(X - U, Y - U) \subset (X, Y)$ induit un isomorphisme en homologie.*

Corollaire 2.4.6 (Mayer-Vietoris)**.** *On suppose que l'espace topologique X est la réunion des intérieurs des sous-espaces A et B. Il existe une suite exacte longue :*

$$\cdots \to H_n(A \cap B)) \xrightarrow{(i_A)_* \oplus -(i_B)_*} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{(j_A)_* + (j_B)_*} H_n(X) \xrightarrow{d_*} H_{n-1}(A \cap B) \to \dots ,$$

où les premières applications sont induites par les inclusions, et d_* est la composition de l'application d'inclusion $X \to (X, B)$, de l'isomorphisme d'excision $H_n(X, B) \simeq H_n(A, A \cap B)$ et du bord $H_n(A, A \cap B) \to H_{n-1}(B)$.

Chapitre 3

Homologie : calcul et applications

3.1 Homologie des sphères

Théorème 3.1.1. *Pour $n \geq 1$:*
a)$H_k(S^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \textit{si } k = 0 \textit{ ou } k = n\,; \\ \{0\} & \textit{sinon.} \end{cases}$
b)$H_k(D^n, S^{n-1}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \textit{si } k = n\,; \\ \{0\} & \textit{sinon.} \end{cases}$
c) Le bord $\partial_{n+1} : H_n(D^{n+1}, S^n) \to H_n(S^n)$ est un isomorphisme.

Théorème 3.1.2. *Pour $n \geq 2$, les groupes isomorphes $H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \approx H_{n-1}(\dot{\Delta}_n)$ sont engendrés respectivement par la classe de l'identité de Δ_n : $[i_n]$ et par son bord $[\partial i_n]$.*

Pour $n \geq 2$, un homéomorphisme entre S^{n-1} et $\dot{\Delta}_n$ fixe le choix d'un générateur de $H_{n-1}(S^{n-1})$. On peut aussi fixer ce choix via un générateur de l'homologie locale

$$H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \approx H_n(D^n, S^{n-1}) \approx H_{n-1}(S^{n-1}) \ .$$

Notons ω_n l'isobarycentre du simplexe Δ_n, enveloppe convexe de la base $(e_0, \ldots, e_{n+1})$ de $\mathbb{R}^{n+1}$. Le repère $(\omega; e_1, \ldots, e_n)$ fixe un isomorphisme entre $\mathbb{R}^n$ et l'hyperplan $\Pi_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ qui contient Δ_n. L'homologie locale $H_n(\Pi_n, \Pi_n - \{\omega_n\}) \approx H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n)$ est engendré par $[\partial i_n]$. L'isomorphisme fixe le choix du générateur de $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$ et donc celui de $H_n(D^n, S^{n-1}) \approx H_{n-1}(S^{n-1})$. Au besoin on notera $[D^n] \in H_n(D^n, S^{n-1})$ et $[S^{n-1}] \in H_{n-1}(S^{n-1})$ les *classes fondamentales* ainsi fixés. Ici le vocabulaire et la notation anticipent sur ce qui sera fait plus généralement avec l'orientation des variétés.

Homologie réduite

Le complexe singulier réduit $\widetilde{C}(X)$ est défini par :
$\widetilde{C}_n(X) = C_n(X)$ pour $n \neq -1$, $\widetilde{C}_{-1}(X) = \mathbb{Z}$, $\widetilde{\partial}_n = \partial_n$ pour $n > 0$, et

$\widetilde{\partial}_0 : \widetilde{C}_0(X) = C_0(X) \to \widetilde{C}_{-1}(X) = \mathbb{Z} \approx C_0(pt)$ est l'augmentation (induite par l'application constante).

On peut reformuler avec l'homologie réduite les résultats précédents :

$$\forall n \geq 1 \;\; H_*(D^n, S^{n-1}) \simeq \widetilde{H}_*(S^{n-1}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = n\,; \\ \{0\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

3.2 Premières applications

Théorème 3.2.1 (Invariance de la dimension)**.** *Pour $n \neq m$, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ ne sont pas homéomorphes.*

Proposition 3.2.2 (Caractérisation du bord)**.** *Soient M une variété à bord de dimension n et x un point de M, alors :*
$x \in M - \partial M \iff H_n(M, M - x) \simeq \mathbb{Z}$,
$x \in \partial M \iff H_n(M, M - x) \simeq \{0\}$.

Corollaire 3.2.3. *Si on a une carte locale en x :*

$$\phi : (U, x) \to (V, \phi(x)),\;\; V \subset]-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1}\;,$$

alors x est dans le bord de M si et seulement si $\phi(x)$ appartient à $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Théorie du degré

Définition 3.2.4. Soit $n \geq 1$. Une application continue $f : S^n \to S^n$ induit un endomorphisme f_* de $H_n(S^n) \approx \mathbb{Z}$. Le degré de f est défini par :

$$\forall z \in H_n(S^n)\;,\;\; f_*(z) = \deg(f)\; z\;.$$

Proposition 3.2.5. *Le degré d'une isométrie $f \in O_n(\mathbb{R})$ est égal à son déterminant.*

Corollaire 3.2.6. *Pour n pair, l'application antipode, $-Id_{S^n}$, n'est pas homotope à l'identité.*

Corollaire 3.2.7. *Pour toute application continue $f : S^n \to S^n$, n pair, il existe $x \in S^n$ tel que $f(x) = \pm x$.*

Corollaire 3.2.8. *Pour $n > 0$ pair, il n'existe pas de champ de vecteurs tangents non nuls sur la sphère S^n, c'est à dire il n'existe pas d'application continue $X = [x \to X_x]$ de S^n dans $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ avec X_x orthogonal à x pour tout x.*

Définition 3.2.9. a) L'application $f : S^n \to S^n$ est un homéomorphisme local en x si et seulement si sa restriction à un voisinage de x est un homéomorphisme sur son image. b) On dit que x est un point (topologiquement) régulier (ou que f est régulière en x) si et seulement si f est un homéomorphisme local en x, et que y est une valeur régulière si et seulement si tout antécédent de y est un point régulier.

Lorsque x est un point régulier de f d'image y, alors une restriction $f_| : U \to U'$ qui est un homéomorphisme local définit, en composant avec l'excision, un homomorphisme $f_* : H_n(S^n - \{x\}) \to H_n(S^n - \{y\})$, qui est indépendant de U. En prenant comme générateurs des homologies locales $\mu_x \in H_n(M - \{x\})$ et $\mu_y \in H_n(M - \{y\})$, *restriction* du générateur choisi $\mu \in H_n(S^n)$, appelés générateurs orientés, on obtient la multiplication par un entier.

Définition 3.2.10. Le degré local en un point régulier de f est défini par : $f_*(\mu_x) = \deg_x(f)\mu_y$, où $\mu_x \in H_n(M - \{x\})$ et $\mu_y \in H_n(M - \{y\})$ sont les générateurs orientés.

Théorème 3.2.11. *Si y est une valeur régulière de $f : S^n \to S^n$, alors y a un nombre fini d'antécédents, et :*

$$\deg(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \deg_x(f) \ .$$

Proposition 3.2.12. *S'il existe des cartes locales*

$$\phi : (U, x) \to (V, 0) \ , \psi : (U', x) \to (V', 0) \ ,$$

compatibles avec les générateurs orientés dans lesquelles l'expression de $f : S^n \to S^n$ est un difféomorphisme, alors le degré local est donné par le signe du déterminant jacobien.

3.3 Homologie des variétés et orientation

Définition 3.3.1. Une orientation d'une variété topologique M est une famille *continue* de générateurs de l'homologie locale : $\mu_x \in H_n(M, M - x)$, $x \in M - \partial M$.

Ici *continue* signifie que pour tout $x \in M - \partial M$, il existe un voisinage V et $\mu_V \in H_n(M, M - V)$ tel que, pour tout $y \in V$, $\rho_y(\mu_V) = \mu_y$. Ici le morphisme *de restriction* ρ_y est induit par l'inclusion $(M, M - V) \to (M, M - x)$.

Exercice 3.3.2. Définir sur l'ensemble des générateurs des homologies $H_n(M, M - x)$, $x \in M - \partial M$ une topologie qui en fait un revêtement double $P \to M - \partial M$ et montrer que la condition précédente définit une section continue de ce revêtement.

Exemples 3.3.3. 1. Pour tout n, l'espace $\mathbb{R}^n$ est orienté avec la famille μ_x obtenue en utilisant la translation $t_x : \mu_x = (t_x)(\mu_0)$.

2. Pour tout $n > 0$, la sphère S^n est orientée par $\mu_x = \rho_x(\mu)$, où μ est générateur de $H_n(S^n)$, et ρ_x est induit par l'inclusion.

Proposition 3.3.4. *Une variété M est orientable si et seulement s'il existe un* atlas*, c'est dire un ensemble de cartes dont les domaines recouvrent M, dont les changements de carte respecte l'orientation de $\mathbb{R}^n$.*

Théorème 3.3.5. *Pour toute variété topologique de dimension n, M, et tout compact $K \subset M - \partial M$,*
a) $H_k(M, M - K)$ est nul pour tout $k > n$;
b) $z \in H_n(M, M - K)$ est nulle si et seulement si, pour tout $x \in K$, $\rho_x(z) = 0$.

Remarque 3.3.6. Dans b), la nullité ou non de $\rho_x(z)$ est localement constant, il suffit donc de tester un point x pour chaque composante connnexe de K.

Théorème 3.3.7. *Soit (M, μ) une variété orientée. Pour tout compact $K \subset M - \partial M$, il existe $\mu_k \in H_n(M, M - K)$ tel que : $\forall x \in K$, $\rho_x(\mu_K) = \mu_x$.*

Pour K variété compacte sans bord, la classe $\mu_M = [M]$ est appelée la classe fondamentale de M.

Théorème 3.3.8. *Soit M est une variété compacte connexe sans bord.*
a) M est orientable si et seulement si $H_n(M)$ est non nul. b) M est orientable si et seulement si $H_n(M)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, et la classe fondamentale donne une bijection entre les orientatons de M et les générateurs de $H_n(M)$.

Cas à bord

Proposition 3.3.9. *Soit (M, μ) une variété compacte orientée à bord, alors il existe $[M] \in H_n(M, \partial M)$ tel que, pour tout $x \in M - \partial M$, $\rho_x([M]) = \mu_x$.*

Pour K variété compacte à bord, la classe $\mu_M = [M] \in H_n(M, \partial M)$ est aussi appelée la classe fondamentale de M.

Théorème 3.3.10. *Soit M est une variété compacte connexe à bord.*
a) M est orientable si et seulement si $H_n(M, \partial M)$ est non nul. b) M est orientable si et seulement si $H_n(M, \partial M)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, et la classe fondamentale donne une bijection entre les orientatons de M et les générateurs de $H_n(M)$.

Exercice 3.3.11. Montrer que si M est une variété compacte orientée à bord de classe fondamentale $[M]$, alors $\partial[M] \in H_{n-1}(\partial M)$ définit une orientation de ∂M.

3.4 Limites directes/inductives, limite inverse

3.5 Le théorème du complémentaire et ses appplications

Chapitre 4

Caractérisation axiomatique de l'homologie

4.1 Axiomes D'Eilenberg-Steenrod

Une théorie d'homologie (H, ∂) consiste en :
a) un foncteur covariant H de la catégorie $Top(2)$ des paires d'espaces vers la catégorie $\mathbb{Z} - \mathrm{gMod}$ des groupes abéliens $\mathbb{Z}$-gradués,
b) des morphismes naturels de degré -1

$$\partial_{(X,Y)} : H(X,Y) \to H(Y) = H(Y, \emptyset) \ ,$$

qui vérifient les axiomes énoncés ci-dessous : exactitude, homotopie et excision.

La condition de naturalité signifie compatibilité avec les morphismes induits par les applications continues entre paires d'espaces.

Exactitude : Pour toute paire (X,Y), on a une suite exacte longue :

$$\ldots \longrightarrow H_n(Y) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(X,Y) \stackrel{\partial_{(X,Y)}}{\longrightarrow} H_{n-1}(Y) \longrightarrow \ldots$$

où les deux premiers morphismes sont induits par les inclusions

Homotopie : Des applications continues homotopes induisent des isomorphismes en homologie.

Excision : Soit (X,Y) une paire d'espace. Si l'adhérence d'un ouvert $U \subset X$ est contenue dans l'intérieur de Y, alors l'inclusion de $(X-U, Y-U) \subset (X,Y)$ induit un isomorphisme en homologie.

Une théorie d'homologie H est dite **ordinaire** si et seulement si l'homologie du point est isomorphe à l'homologie singulière du point.

Une théorie d'homologie H est dite **additive** si et seulement si l'homologie d'une réunion disjointe est isomorphe à la somme directe des homologies.

Une théorie d'homologie H est dite **à support compact** si et seulement si pour tout $z \in H(X,Y)$, il existe une inclusion d'une paire compacte $i : (K,L) \hookrightarrow (X,Y)$ et $y \in H(K,L)$ tels que $H(i)(y) = z$.

Exercice 4.1.1. Toute théorie d'homologie à support compact est additive.

4.2 Conséquences des axiomes

Théorème 4.2.1 (Suite exacte longue pour une triade)**.** *Pour $A \subset B \subset X$, on a une suite exacte longue :*

$$\ldots \longrightarrow H_n(B,A) \longrightarrow H_n(X,A) \longrightarrow H_n(X,B) \stackrel{\partial_{(X,B,A)}}{\longrightarrow} H_{n-1}(B,A) \longrightarrow \ldots$$

où les deux premiers morphismes sont induits par les inclusions, et $\partial_{(X,B,A)}$ est obtenu en composant $\partial_{(X,B)}$ avec le morphisme d'inclusion.

Définition 4.2.2. Une application continue entre paires : $f : (X,A) \to (Y,B)$ est un homéomorphisme relatif si et seulement si elle induit un homéomorphisme entre $X - A$ et $Y - B$.

Théorème 4.2.3 (Excision forte, Spanier 4.8.9)**.** *Soient X un espace séparé et A un fermé dans X. On suppose que A admet un voisinage fermé F tel qu'il existe une retraction par déformation forte de F sur X. Alors tout homéomorphisme relatif $f : (X,A) \to (Y,B)$, avec B fermé dans l'espace séparé Y, induit un isomorphisme en homologie.*

Support compact et limite inductive

Un ensemble ordonné $(\mathcal{E}, \preceq)$ peut être considéré comme une catégorie, avec un morphisme de x à y si $x \preceq y$ et pas de morphisme x à y sinon.

Définition 4.2.4. a) Dans une catégorie $\mathcal{C}$, un système inductif indexé par $(\mathcal{E}, \preceq)$ est un foncteur covariant h de $(\mathcal{E}, \preceq)$ vers $\mathcal{C}$:

pour chaque élément $E \in \mathcal{E}$ il y a un objet $h(E)$,
pour chaque relation $E \preceq F$, il y a un morphisme $h(E \preceq F) = \phi_E^F : h(E) \to h(G)$,
pour toute composition $E \preceq F \preceq G$, $\phi_E^G = \phi_F^G \circ \phi_E^F$.

Définition 4.2.5. Soit (h, ϕ) un système inductif indexé par $(\mathcal{E}, \preceq)$ dans $\mathcal{C}$.
a) Une donnée compatible est un objet L de $\mathcal{C}$ et pour chaque $E \in \mathcal{E}$ un morphisme :ψ_E :

$h(E) \to L$, ces morphismes étant compatibles avec les ϕ_E^F tous les triangles commutent.
b) Une limite inductive est une donnée compatible (L, ψ) qui est universelle : toute autre donnée compatible factorise de façon unique par l'objet L.

Si la limite inductive existe, alors elle est unique à un isomrphisme canonique près. Dans la catégorie $\mathbb{Z} - \mathrm{Mod}$ des groupes abéliens (resp. $\mathbb{Z} - \mathrm{gMod}$ des groupes abéliens gradués ou $\mathbb{Z} - \mathrm{dgMod}$ des complexes de chaines) tout système inductif admet une limite inductive : $\lim_{E \in \mathcal{E}} h(E)$ est le quotient de la somme directe des $h(E)$ par le sous-module engendré par les $y - x$, $x \in h(E)$, $y \in h(F)$, pour tous les couples E,F qui ont un majorant commun.

Théorème 4.2.6. *Soit h une théorie d'homologie à support compact, et $\mathcal{E}$ un ensemble de paires de sous-espaces de (X, Y) tel que toute paire compacte $(K, L) \subset (X, Y)$ est incluse dans une paire de $\mathcal{E}$, alors on a un isomorphisme canonique :*

$$\lim_{E \in \mathcal{E}} h(A, B) \cong h(X, Y) \ .$$

Le résulat ci-dessus vaut en particulier pour l'ensemble de toutes les paires compactes contenues dans (X, Y)

4.3 L'homologie singulière

Théorème 4.3.1. *L'homologie singulière est une théorie d'homologie ordinaire à support compact.*

L'axiome d'homotopie et l'axiome d'excision demandent un peu de travail.

Définition 4.3.2. Une homotopie algébriques entre deux morphismes de chaînes $f, g : C \to C'$ est une application de degré 1, $D : C_* \to C_{*+1}$ telle que : $g - f = D \circ \partial + \partial' \circ D$.

Proposition 4.3.3. *Des morphismes algébriquement homotopes induisent la même application en homologie.*

Théorème 4.3.4. *Des applications continues homotopes induisent des morphismes des complexes des chaînes singulières algébriquement homotopes.*

L'axiome d'homotopie pour l'homologie singulière en résulte.

Lemme 4.3.5. *Pour $j \in \{0, 1\}$, soit Soit $i_j : X \to [0, 1] \times X$ l'application $x \mapsto (j, x)$. Les morphismes $C(i_0)$ et $C(i_1)$ entre les complexes des chaînes singulières $C(X)$ et $C([0, 1] \times X)$ sont algébriquement homotopes.*

Pour prouver ce lemme, on peut s'appuyer sur le théorème des modèles acycliques qui sera aussi utile plus tard.

Définition 4.3.6. Un foncteur F d'une catégorie $\mathcal{C}$ vers la catégorie $\mathbb{Z}-$Mod des groupes abéliens (resp. $\mathbb{Z}-$gMod des groupes abéliens gradués ou $\mathbb{Z}-$dgMod des complexes de chaînes) est libre de base les $g_j \in F(M_j)$, $j \in J$, si et seulement si pour tout objet X de $\mathcal{C}$, $F(X)$ est le groupe abélien libre de base les $F(\sigma)(g_j)$, $j \in J$, $\sigma \in Hom_{\mathcal{C}}(M_j, X)$. On dit que F est libre à modèles dans $\mathcal{M}$ s'il a une base $g_j \in F(M_j)$, $j \in J$, avec $M_j \in \mathcal{M}$ pour tout $j \in J$.

Théorème 4.3.7. *Soient F et G deux foncteurs de la catégorie $\mathcal{C}$ vers la catégorie des complexes de chaîne. On suppose que F_n et G_n sont nuls pour $n < 0$, que F est libre à modèles dans $\mathcal{M}$ et que G est acyclique sur les modèles : pour tout modèle $M \in \mathcal{M}$ et tout $n > 0$, $H_n(G(M))$ est nul.*
a) Toute famille naturelle de morphismes $\mu_X : H_0(F(X)) \to H_0(G(X))$, X objet de $\mathcal{C}$, est induite par des morphismes naturels

$$\nu_X : F(X) \to G(X) \ .$$

b) Deux familles naturelles de morphismes $\nu_X, \nu'_X : F(X) \to G(X)$ qui induisent les mêmes morphismes en H_0 : $H_0(\nu_X) = H_0(\nu'_X)$, sont naturellement homotopes.

Ce théorème est corollaire des deux théorèmes suivants :

Théorème 4.3.8 (Enoncé A)**.** *Soient F et G deux foncteurs de $\mathcal{C}$ vers* $\mathbb{Z}-$dgMod.
Si, pour un entier n, F_n est libre à modèles dans $\mathcal{M}_n$,
si on a pour $k < n$ des morphismes naturels qui commutent avec le bord :

$$\nu_k(X) : F_k(X) \to G_k(X) \ ,$$

et si $H_{n-1}(G(M))$ est nul pour tout modèle $M \in \mathcal{M}_n$,
alors ν s'étend en degré n.

On démontre ce théorème en définissant d'abord $\nu_n(M_j)(g_j)$ pour un élément de la base de F_n : $g_j \in F(M_j)$. La naturalité donne une unique extension, et celle-ci satisfait l'énoncé.

Théorème 4.3.9 (Enoncé B)**.** *Soient F et G deux foncteurs de $\mathcal{C}$ vers* $\mathbb{Z}-$dgMod.
Si on a pour $k \leq n$ des morphismes naturels qui commutent avec le bord,
si pour un entier n, F_n est libre à modèles dans $\mathcal{M}_n$,
si on a des morphismes naturels qui commutent avec le bord

$$\nu_k(X), \nu'_k : F_k(X) \to G_k(X) \ ,$$

et une homotopie naturelle partielle *entre ν_k et ν'_k*

$$h_k(X) : F_k(X) \to G_{k+1}(X) \ , \ k < n \ ,$$

et si $H_n(G(M))$ est nul pour tout modèle $M \in \mathcal{M}_n$,
alors h s'étend en degré n.

Ici aussi on définit d'abord $h_n(M_j)(g_j)$ pour un élément de la base de $F_n : g_j \in F(M_j)$.

On peut également établir l'excision en s'appuyant sur les modèles acycliques : voir l'article de Egil Heistad *Excision in singular theory*, Math. Scand. 20 (1967) 61-64.

4.4 Homologie des complexes cellulaires

On considère ici une théorie d'homologie ordinaire H à support compact.

1. Comme pour l'homologie singulière, on obtient un isomorphisme
$$H_k(D^n, S^{n-1}) \simeq \widetilde{H}_{k-1}(S^{n-1}) \ ,$$
le groupe étant nul pour $k \neq n$ et libre de rang 1 pour $k = n$.
2. L'axiome du support compact entraîne l'additivité. On en déduit le calcul de l'homologie d'un espace discret et le calcul de $H_0(X)$.
3. Comme pour l'homologie singulière on choisit des générateurs compatibles des groupes isomorphes
$$H_n(D^n, S^{n-1}) \simeq \widetilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \simeq H_{n-1}(D^{n-1}/S^{n-2}, *) \simeq H_{n-1}(D^{n-1}, S^{n-2}) \ , n > 1 \ .$$

Proposition 4.4.1. *a) Soit H une théorie d'homologie ordinaire à support compact et $(X; X^n, n \geq 0)$ un complexe cellulaire, alors pour tout $n \geq 0$, $H_k(X^n, X^{n-1})$ est nul pour k distinct de n, et $H_n(X^n, X^{n-1})$ est un groupe libre de base indexée par les cellules de dimension n.*
b) Si on a une famille d'applications d'attachement des cellules :
$$(\Phi_j, \phi_j) : (D^n, S^{n-1}) \to (X^n, S^{n-1}), \ j \in J_n \ ,$$
alors les $(\Phi_j)_*([D^n])$, $j \in J_n$, forment une base de $H_n(X^n, X^{n-1})$, de plus un reparamétrage de la cellule change ce générateur par un signe qui est le degré du reparamétrage (positif pour un reparamétrage orienté, négatif sinon).

Une orientation d'une cellule est une application d'attachement à reparamétrage orienté près.

Définition 4.4.2. Le complexe cellulaire $C^{\text{cell}}(X)$ est le groupe abélien libre de base les cellules orientée quotienté par le changement de signe pour l'orientation contraire, avec la graduation donnée par la dimension (le groupe $C_n^{\text{cell}}(X)$ est isomorphe à $H_n(X^n, X^{n-1})$).

Le bord $\partial^{\text{cell}} : C_n^{\text{cell}}(X) \approx H_n(X^n, X^{n-1}) \to H_n(X^{n-1}, X^{n-2}) \approx C_{n-1}^{\text{cell}}(X)$ est obtenu en composant le bord de la paire (X^n, X^{n-1}) avec le morphisme d'inclusion.

Théorème 4.4.3. *Soit H une théorie d'homologie ordinaire à support compact. Alors pour tout complexe cellulaire $(X; X^n, n \geq 0)$ on a un isomorphisme gradué*
$$H^{\text{cell}}(X) \xrightarrow{\sim} H(X) \ .$$

Lemme 4.4.4. *a) Pour tout $k > n$, $H_k(X^n)$ est nul.*
b) Pour $k < n$, l'inclusion induit un isomorphisme $H_k(X^n) \to H_k(X^{n+1})$.
c) Pour tout n, l'inclusion induit un morphisme injectif $H_n(X^n) \to C_n^{\mathrm{cell}}(X)$ d'image le sous-groupe des cycles cellulaires : $Z_n^{\mathrm{cell}}(X)$.
d) Pour tout n, l'inclusion induit un morphisme surjectif

$$Z_n^{\mathrm{cell}}(X) \approx H_n(X^n) \to H_n(X^{n+1})$$

de noyau le sous-groupe des bords cellulaires : $B_n^{\mathrm{cell}}(X)$.

On obtient a) avec l'exactitude et une récurrence fini sur n, b) avec l'exactitude, c) et d) en chassant dans le bon diagramme. On prouve ensuite le théorème en utilisant d) et b), puis la limite inductive si le complexe cellulaire a des cellules dont les dimensions ne sont pas bornées.

Chapitre 5

Cohomologie, structures multiplicatives

5.1 Groupes de cohomologie et coefficients universels

Définition 5.1.1. Un complexe de cochaînes $C = (C^n, \delta^n)$ est une suite de groupes abéliens C^n, $n \in \mathbb{Z}$, et une suite de morphismes $\delta^n : C^n \to C^{n+1}$, vérifiant pour tout n : $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$.

Etant donné un complexe de cochaînes (C^n, δ^n), on définit sa cohomologie :

$$H^n(C) = \frac{Z^n(C)}{B^n(C)} \ ,$$

où $Z^n(C) = \mathrm{Ker}(\delta^n)$ est le sous-groupe des cocycles, et $B^n(C) = \mathrm{Im}(\delta^{n-1})$ est le sous-groupe des cobords.

La dualité permet de construire un complexe de cochaînes à partir d'un complexe de chaînes : si $C = (C_*, \partial_*)$ est un complexe de chaînes et G un groupe, alors les groupes $C^n = Hom(C_n, G)$ forment un complexe de cochaînes avec le cobord $\delta^n = (-1)^{n+1}\ {}^t\partial_{n+1}$.

La cohomologie singulière à coefficients dans le groupe abélien G est obtenue avec les complexes de cochaînes $C^*(X, A; G) = Hom(C_*(X, A), G))$.

Coefficients universels

On rappelle que tout sous-module d'un module libre sur un anneau principal est libre[1]. Il en résulte que tout module M sur un anneau principal a une présentation libre : il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\ i\ } L \xrightarrow{\ p\ } M \longrightarrow 0\ ,$$

1. Dans le cas général, la preuve utilise une récurrence transfinie. Voir par exemple le livre de Hungerford, *Algebra*, chIV.6.

avec L et R qui sont des modules libres.

Lemme 5.1.2. *Soient* $\mathbf{k}$ *un anneau princimal,* $f : M \to M'$ *une application* $\mathbf{k}$*-linéaire, et des présentations libres :*

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{i} L \xrightarrow{p} M \longrightarrow 0 ,$$

$$0 \longrightarrow R' \xrightarrow{i'} L' \xrightarrow{p'} M' \longrightarrow 0 ,$$

il existe une application linéaire canonique entre les conoyaux :

$$\mathrm{coker}({}^t i') \longrightarrow \mathrm{coker}({}^t i) ,$$

définie par passage au quotient de la transposée de la restriction à R *d'un relèvement de* $f \circ p$ *à* L*.*

Ici la transposée est associée à la dualité à valeur dans G : ${}^t i = \mathrm{Hom}(i, \mathrm{Id}_G)$.

Théorème 5.1.3. *Avec les notations précédentes, le groupe*

$$\mathrm{Ext}(M, G) = \mathrm{coker}(\mathrm{Hom}(i, \mathrm{Id}_G))$$

est canonique et Ext *s'étend en un bifoncteur, contravariant dans la première variable et covariant dans la seconde.*

Exercice 5.1.4. Montrer que si on a une suite exacte de $\mathbf{k}$-modules avec $\mathbf{k}$ un anneau principal :

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0 ,$$

alors pour tout $\mathbf{k}$-modules G il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M'', G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M', G) \longrightarrow \quad ,$$

$$\mathrm{Ext}(M'', G) \longrightarrow \mathrm{Ext}(M, G) \longrightarrow \mathrm{Ext}(M', G) \longrightarrow 0 ,$$

Exercice 5.1.5. Calculer $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$.

Exercice 5.1.6. Montrer que pour G fixé, $\mathrm{Ext}(., G)$ commute avec les sommes directes.

Théorème 5.1.7 (Coefficients universels)**.** *Etant donné un complexe de chaînes libre* $C = (C_*, \partial_*)$*, pour tout groupe abélien* G *il existe une suite exacte naturelle*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}(H_{n-1}(C), G) \longrightarrow H^n(\mathrm{Hom}(C, G)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_n(C), G) \longrightarrow 0 .$$

De plus la suite est scindée, mais ne l'est pas naturellement.

5.2 Algèbre de cohomologie

On commence par définir le produit *cup* au niveau des cochaînes à coefficients dans un anneau Λ. Pour $\alpha \in C^p(X,\Lambda)$, $\beta \in H^q(X,\Lambda)$, σ un $p+q$-simplexe singulier dans X :

$$< \alpha \cup \beta, \sigma >= (-1)^{pq} < \alpha, {}_p\sigma >< \beta, \sigma_q > \ .$$

Ici, ${}_p\sigma(t_0,\dots,t_p) = \sigma(t_0,\dots,t_p,0,\dots,0)$ et $\sigma_q(t_0,\dots,t_q) = \sigma(0,\dots,0,t_0,\dots,t_q)$

Le produit tensoriel $C^* \otimes C'^*$ de deux complexes de cochaînes est un complexe de cochaînes avec la différentielle d définie par :

$$d\,\alpha \otimes \beta = (\delta\alpha) \otimes \beta + (-1)^{\deg(\alpha)}\alpha \otimes (\delta'\beta) \ .$$

Proposition 5.2.1. *Le produit cup est un morphisme de complexes de cochaînes.*

Théorème 5.2.2. *Le produit cup induit sur la cohomologie une opération bien définie, qui munit $H^*(X,\Lambda)$ d'une structure d'anneau.*

Cas relatif

Définition 5.2.3. Soient A et B deux sous-espaces de X. On dit que (A,B) est un couple excisif dans X si et seulement si l'application donnée par les inclusions de $C(A) + C(B)$ dans $C(A \cup B)$ induit un isomorphisme en homologie.

Théorème 5.2.4. *Si (A,B) est un couple excisif dans X, alors le produit cup est défini :*

$$H^p(X,A;\Lambda) \otimes H^p(X,B;\Lambda) \to H^{p+q}(X,A\cup B;\Lambda) \ .$$

Propriétés du produit cup

1. Fonctorialité.
2. Supersymétrie : $\alpha \cup \beta = (-1)^{\deg(\alpha)\deg(\beta)}\beta \cup \alpha$.
3. Relation avec l'exactitude.
   Pour $i : A \hookrightarrow X$, $\alpha \in H^p(A,\Lambda)$, $\beta \in H^q(X,\Lambda)$, $\delta(\alpha \cup i^*(\beta)) = (\delta\alpha) \cup \beta$.

5.3 Homologie avec coefficients

Bibliographie

[test] ...