Chapitre 6

Dualité de Poincaré et Théorie d'intersection

6.1 Classe fondamentale

Soit Λ un anneau, et M une variété compacte à bord de dimension n.

Définition 6.1.1. Une classe fondamentale pour M est un élément $\mu \in H_n(M, \partial M; \Lambda)$ tel que pour tout $x \in M - \partial M$, $\mu_x = \rho_x(\mu)$ soit un générateur de $H_n(M, M - x; \Lambda) \approx \Lambda$).

On a vu qu'une orientation de M détermine une classe fondamentale $[M]$ sur $\mathbb{Z}$, et donc sur tout anneau Λ.

Dans le cas où l'anneau est $\mathbb{Z}/2$, il existe une unique classe fondamentale.

Exercice 6.1.2. Montrer que si $\mu \in H_n(M, \partial M; \Lambda)$ est une classe fondamentale, alors $\partial\mu \in H_{n-1}(\partial M, \Lambda)$ est une classe fondamentale du bord.

6.2 Dualité

Théorème 6.2.1. *Soit M une variété compacte sans bord de dimension n, et μ une classe fondamentale à coefficient dans l'anneau Λ, alors, pour $p + q = n$, le produit cap avec la classe fondamentale définit un isomorphisme :*

$$\begin{array}{rccc} D: & H^q(M, \Lambda) & \to & H_p(M, \Lambda) \\ & \alpha & \mapsto & \alpha \cap \mu \end{array}$$

Dans la cas à bord :

Théorème 6.2.2. *Soit M une variété compacte de dimension n, et μ une classe fondamentale à coefficient dans l'anneau Λ, alors, pour $p + q = n$, le produit cap avec la* *classe fondamentale définit un isomorphisme :*

$$\begin{array}{rccc} D: & H^q(M,\partial M;\Lambda) & \to & H_p(M,\Lambda) \\ & \alpha & \mapsto & \alpha \cap \mu \end{array}$$

Dans le cas à bord décomposé :

Théorème 6.2.3. *Soient M une variété compacte de dimension n, $\partial M = A \cup B$ une décomposition du bord en deux sous-variétés de même bord, μ une classe fondamentale à coefficient dans l'anneau Λ. Alors, pour $p + q = n$, le produit cap avec la classe fondamentale définit un isomorphisme :*

$$\begin{array}{rccc} D: & H^q(M,B;\Lambda) & \to & H_p(M,A;\Lambda) \\ & \alpha & \mapsto & \alpha \cap \mu \end{array}$$

6.3 Intersection géométrique

Définition 6.3.1. a) Soit M une variété différentiable compacte sans bord de dimension n. Des sous-variétés différentiables A, B, de dimension respectives p et q complémentaires ($p+q=n$), sont transverses si et seulement si en chaque point d'intersection $x \in A \cap B$ les sous-espaces tangents $T_x(A)$ et $T_x(B)$ sont supplémentaires (dans $T_x(M)$).
b) Dans ce cas le signe de l'intersection, $\epsilon_x = \pm 1$ est obtenu en comparant les orientations de $T_x(A) \oplus T_x(B)$ et de $T_x(M)$.

Si A et B sont transverses de dimensions complémentaires, alors les points d'intersection sont isolés.

Définition 6.3.2. Si A, B sont des sous-variétés différentiables compactes orientées de dimension respectives complémentaires qui sont transverses, alors leur intersection est définie par :

$$I(A,B) = \sum_{x \in A \cap B} \epsilon_x \ .$$

Si A, B sont des sous-variétés différentiables compactes de dimension respectives complémentaires qui sont transverses, alors leur intersection modulo 2 est égale au nombre de point d'intersection modulo 2.

Théorème 6.3.3. *Soit M une variété différentiable orientée compacte sans bord de dimension n, et soient A, B, des sous-variétés différentiables compactes orientées de dimension respectives complémentaires, représentant les duaux de Poincaré des classes de cohomologie α et β, alors (avec coefficients dans $\mathbb{Z}$) :*

$$I(B,A) = \langle \alpha \cup \beta, [M] \rangle \ .$$

Théorème 6.3.4. *La même formule vaut sans hypothèse d'orientabilité avec coefficients* $\mathbb{Z}/2$.

Remarque 6.3.5. Le théorème vaut dans le cas à bord décomposé, avec des sous-variétés à bord dans la partie convenable du bord.

6.4 Anneau de cohomologie des espaces projectifs

Théorème 6.4.1. *L'anneau* $H^*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2)$ *est isomorphe à* $\mathbb{Z}/2[\alpha]/\alpha^{n+1}$, α *étant de degré* 1.

Théorème 6.4.2. *L'anneau* $H^*(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z})$ *est isomorphe à* $\mathbb{Z}[x]/x^{n+1}$, x *étant de degré* 2.

Exercice 6.4.3. Montrer qu'une variété complexe (modelée sur $\mathbb{C}^n$ avec des changements de carte holomorphes) est orientée.

Exercice 6.4.4. Montrer que tous les sous-espaces projectifs de dimension $k < n$ de $\mathbb{C}P^n$ représentent la même classe d'homologie $[\mathbb{C}P^k] \in H_{2k}(\mathbb{C}P^n)$.

Exercice 6.4.5. Montrer que si $x \in H_2(\mathbb{C}P^n)$ est dual de Poincaré de $[\mathbb{C}P^{n-1}]$, alors x^k est dual de Poincaré de $[\mathbb{C}P^{n-k}]$.

6.5 Forme d'intersection et signature

Soit M une variété compacte de dimension n à bord décomposé : $\partial M = A \cup B$, où A et B sont des sous-variétés de même bord. On suppose que M est munie d'une classe fondamentale à coefficients dans l'anneau Λ : $\mu \in H_n(M, \partial M; \Lambda)$. On définit l'intersection :

$$\begin{array}{rcl} H_p(M, A; \lambda) \otimes H_q(M, B; \lambda) & \to & \Lambda \\ x \otimes y & \mapsto & x.y =< D^{-1}y \cup D^{-1}x, \mu > \quad . \end{array}$$

Théorème 6.5.1. *Si* Λ *est un anneau principal, alors la forme d'intersection induit une forme non singulière :*

$$H_p(M, A; \Lambda)/\mathrm{Tors}(H_p(M, A; \Lambda) \otimes H_q(M, B; \Lambda)/\mathrm{Tors}(H_q(M, B; \Lambda) \to \Lambda \ .$$

La preuve de ce théorème utilise que l'homologie des variétés compactes est de type fini : cf Spanier, 6.2.21 et 6.9.11

Cas d'une variété de dimension paire

Soit M une variété compacte de dimension $n = 2m$ avec classe fondamentale à coefficients dans l'anneau Λ. Le module $H_n(M,\Lambda)$ est muni d'une forme bilinéaire $(-1)^n$ symétrique défini par : $x.y = x.j_*(y)$, où j est l'inclusion $M \to (M,\partial M)$.

Proposition 6.5.2. *Si Λ est un anneau principal, alors $x \in H_n(M,\Lambda)$ est dans le noyay de la forme d'intersection si et seulement s'il existe $\lambda \in \Lambda$, $y \in H_p(\partial M,\Lambda)$, tel que $i_*(y) = \lambda x$ ($i : \partial M \to M$ est l'inclusion de bord).*

6.6 Forme d'enlacement

A une suite exacte courte de coefficients correspond une suite exacte longue naturelle en homologie (respectivement en cohomologie) appelée suite de Bockstein. Nous utilisons ici les suites exactes longues associées à la suite exacte courte de groupes :

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0 \ .$$

Le morphisme connectant est appelé morphisme de Bockstein et noté β.

Exercice 6.6.1. Expliciter le morphisme de Bockstein.

Soit M une variété compacte orientée de dimension $m = p+q+1$, on définit la forme d'enlacement :

$$\lambda : \mathrm{Tors}(H_p(M)) \otimes \mathrm{Tors}(H_q(M)) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \ ,$$

par $\lambda(x,y) = x.\widetilde{y}$, où $\widetilde{y} \in H_{q+1}(M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est tel que : $\beta\widetilde{y} = y$.

Théorème 6.6.2. *La forme d'enlacement est bien définie et non singulière*

Symétrie de la forme d'enlacement

Théorème 6.6.3. *Avec les notations précédentes, on a :*

$$\lambda(y,x) = (-1)^{(p+1)(q+1)}\lambda(x,y) \ .$$

Démonstration. On va passer par la cohomologie.
Soient $\tilde{x} \in H_{p+1}(M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, $\tilde{y} \in H_{p+1}(M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, $\tilde{a} = D^{-1}\tilde{x}$, $\tilde{b} = D^{-1}\tilde{y}$,
$a = \beta\tilde{a} = D^{-1}x$, $b = \beta\tilde{b} = D^{-1}y$.

On a :

$$< \beta(\tilde{b} \cup \tilde{a}), [M] >= 0 =< \beta\tilde{b} \cup \tilde{a}, [M] > +(-1)^p < \tilde{b} \cup \beta\tilde{a}, [M] > \ ,$$

Donc :

$$< b \cup \tilde{a}, [M] >= (-1)^{(p+1)q} < \tilde{a} \cup b, [M] = (-1)^{p+1} < \tilde{b} \cup a, [M] > \ ,$$

la dernière égalité se réécrit :

$$y.\tilde{x} = (-1)^{pq+p+q+1} x.\tilde{y} \ .$$

$\square$

Module d'enlacement des variétés de dimension impaire

Soit M une variété de dimension impaire $m = 2p+1$, alors la forme d'enlacement définit sur le groupe $\mathrm{Tors}(H_p(M))$ une forme biliéaire $(-1)^{p+1}$-symétrique non singulière. Le groupe $\mathrm{Tors}(H_p(M))$ muni de cette forme est appelé module d'enlacement. C'est un invariant d'homéomorphisme orienté.

Forme d'intersection et enlacement sur le bord

Théorème 6.6.4. *Soit M le bord d'une variété compacte orientée de dimension paire $m+1 = 2p+2$. Si l'image de $\mathrm{Tors}(H_p(M))$ dans $H_p(W)$ est nulle, alors pour tous $x, y \in \mathrm{Tors}(H_p(M))$, on a :*

$$\lambda(x,y) = \overline{x}.\overline{\overline{y}} \ , \mathrm{mod}\ \mathbb{Z}$$

où : $\overline{x} \in H_{p+1}(W,M)$ a pour bord x,
$\overline{y} \in H_{p+1}(W,M)$ a pour bord x et $\overline{\overline{y}} \in H_{p+1}(W,\mathbb{Q})$ relève $\overline{y}$.