Chapitre 7

Théorie d'homotopie

7.1 Groupe fondamental et revêtements : rappels et compléments

Le groupe fondamental d'un espace topologique (X, x_0) est l'ensemble des classes d'homotopie de lacets pointés en X, muni de la composition : $[b][a] = [ba]$, où ba est le lacet a suivi du lacet b.

Définition 7.1.1. Un revêtement $p : E \to B$ est une application continue, localement triviale avec fibre discrète : Pour tout $b \in B$,
a) $F_b = p^{-1}(b)$: est un sous-espace discret de E, et
b) il existe un voisinage V de b et un homéomorphisme h entre $p^{-1}(B)$ et $F_b \times V$ tel que $p \circ h^{-1}$ est la projection sur V.

Proposition 7.1.2 (Relèvement des chemins et des homotopies)**.** *Etant donné un revêtement $p : E \to B$, tout chemin γ d'origine $b = p(e)$ admet un unique relèvement $\tilde{\gamma}$ d'origine e, et une homotopie h entre le chemin $\gamma = h_0$ et le chemin h_1 a un unique relèvement.*

Il en résulte une action à gauche de $\pi_1(B, b_0)$ sur la fibre $F = p^{-1}(b_0)$, pointée en e_0. Le revêtement p induit une application injective $p_\sharp : \pi_1(E, e_0) \to \pi_1(B, b_0)$ dont l'image est le noyau de l'action précédente.

Définition 7.1.3. Etant donné un espace B connexe par arcs, un revêtement universel est un revêtement connexe par arcs et simplement connexe (de groupe fondamental trivial).

Deux revêtements universels pointés sont canoniquement isomorphes. Pour une variété connexe pointée (M, x_0), le revêtement universel peut être défini par :

$$\widetilde{M} = \{(x, \gamma),\ x \in M\ \gamma : [0,1] \to M,\ \gamma(0) = x,\ \gamma(1) = x_0\}/\sim\ ,$$

avec la relation d'équivalence :

$$(x,\gamma) \sim (x,\gamma') \Leftrightarrow x = x' \text{ et } [\gamma'\overline{\gamma}] = [x_0] \ .$$

On peut définir de façon analogue le revêtement associé à un sous-groupe H de $\pi_1(M,x_0)$, avec la relation d'équivalence :

$$(x,\gamma) \sim (x,\gamma') \Leftrightarrow x = x' \text{ et } [\gamma'\overline{\gamma}] \in H \ .$$

Définition 7.1.4. Un revêtement connexe par arcs $p : E \to B$ est régulier si et seulement si le sous-groupe correspondant $\pi_1(E,e_0)$ est normal dans $\pi_1(B,b_0)$.

Dans le cas d'un revêtement régulier, la fibre $F = p^{-1}(b_0)$ s'identifie avec le groupe quotient $\pi_1(B,b_0)/\pi_1(E,e_0)$.

Homologie d'un revêtement régulier

Si $p : E \to B$ est le revêtement régulier associé à l'homomorphisme surjectif $\phi : \pi_1(B,b_0) \to G$, alors $C_*(E)$ est enrichi avec une structure de $\mathbb{Z}[G]$-module. Il en résulte une structure de $\mathbb{Z}[G]$-module sur l'homologie et la cohomologie de E.

Exemple 7.1.5. Etant donné une variété non orientable connexe sans bord de dimension n, un chemin γ de $x_0 = \gamma(0)$ à $x_1 = \gamma(1)$ se relève en un chemin de générateurs $g_t \in H_n(M, M - \gamma_t)$. On a un morphisme non trivial $\pi_1(M,x_0) \to \mathbb{Z}/2$ qui vaut 0 lorsque (g_t) est un lacet et 1 sinon. Le revêtement correspondant noté M^o est le revêtement d'orientation. Son homologie a une structure de $\mathbb{Z}[\tau]/(\tau^2-1)$-module.

Exemple 7.1.6. Soit $K \subset \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \cong S^3$ l'image d'un plongement lisse du cercle. On a un morphisme surjectif

$$\phi : \pi_1(S^3 - K, \infty) \to H_1(S^3_K) =< t >\simeq \mathbb{Z} \ .$$

Le revêtement correspondant $\widetilde{X}_K \to X_K = S^3 - K$ est appelé revêtement universel abélien. Son homologie a une structure de $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$-module. Le module $H_1(\widetilde{X}_K)$ s'appelle le module d'Alexander du noeud K.

7.2 Homologie à coefficients locaux

Définition 7.2.1. Un système local de groupes (resp. groupes abéliens, anneaux, ...) sur un espace topologique X est un foncteur du groupoïde fondamental de X vers la catégorie des groupes (resp. groupes abéliens, anneaux, ...)

Cela veut dire qu'à chaque point $x \in X$ est associé un groupe G_x, et à chaque chemin $\gamma : x \to y$ est associé est isomorphisme $T_\gamma : G_x \to G_y$, qui ne dépend que de la classe d'homotopie à extrémités fixées, et satisfait des conditions de compatibilité.

Remarque 7.2.2. Si X est connexe par arcs, alors tous les G_x sont isomorphes.

Un morphisme de système locaux est une transformation naturelle entre les deux foncteurs correspondant. Un isomorphisme est une équivalence naturelle.

Exemple 7.2.3. Le système local constant : $\forall x\ G_x = G$, $\forall \gamma$, $T_\gamma = \mathrm{Id}_G$.

Exemple 7.2.4. Pour une variété M sans bord de dimension n, l'homologie locale $H_n(M, M - x)$.

Un système local sur X définit une action du groupe fondamental de X par automorphisme du groupe associé au point de base. Si X est connexe par arc, cette action suffit pour définir le système local à isomorphisme près : soit G un groupe, et $\rho : \pi_1(X) \to \mathrm{Aut}(G)$ un morphisme de groupe. On définit G_x comme le quotient de l'union pour tous les chemins $\gamma : x_0 \to x$ des $\{\gamma\} \otimes G$, quotientée par la relation qui identifie (γ, g) avec $(\gamma', \rho(\overline{\gamma}'\gamma).g)$.

Etant donné un système local $\underline{G} = (G_x)_{x\in X}$, le complexe $C_n(X, \underline{G})$ est le groupe abélien libre de base les transformations naturelles du système local constant $(\Delta_n, \mathbb{Z})$ vers $(X, \underline{G})$. Pour X connexe par arcs, une définition alternative est obtenue en utilisant l'action du groupe fondamental $\pi = \pi_1(X, x_0)$ sur le groupe G associé au point de base x_0 :

$$C_*(X, \underline{G}) = C_n(\widetilde{X}) \otimes_{\mathbb{Z}[\pi]} G\ .$$

On obtient un complexe dont l'homologie est l'homologie à coefficients dans le système local. On définit de façon analogue la cohomologie à coefficients dans le système local. Pour X connexe par arcs,

$$C^*(X, \underline{G}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[\pi]}(C_n(\widetilde{X}), G)\ .$$

7.3 Groupes d'homotopie supérieurs

(Voir dans le livre de Hatcher, chapitre 4.)

On note I l'intervalle $[0, 1]$. Pour $n \geq 2$, $\pi_n(X, x_0)$ est le groupe des classes d'homotopie d'applications

$$f : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)\ .$$

Le produit $g * f$ est défini par :

$$\begin{array}{ll} (t_1, t_2, \ldots, t_n) \mapsto f(2t_1, t_2, \ldots, t_n) & \text{si } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ (t_1, t_2, \ldots, t_n) \mapsto G(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n) & \text{sinon} \end{array}$$

On obtient un groupe commutatif, et l'opération est le plus souvent notée additivement.

On définit également une version relative : $\pi_n(X, A, x_0)$ avec les classes d'homotopie d'applications

$$f : (I^n, \partial I^n, \partial I^n -]0, 1[^{n-1}) \to (X, A, x_0)\ .$$

Théorème 7.3.1. *Il existe une suite exacte longue :*

$$\cdots \to \pi_n(A, x_0) \to \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_{n-1}(A, x_0) \to \cdots \to \pi_0(X, x_0)$$

dans laquelle le morphisme connectant $\pi_n(X, A, x_0) \to \pi_{n-1}(A, x_0)$ est obtenu par restriction

7.4 Théorème de Whitehead

Théorème 7.4.1. *Si une application entre deux complexes cellulaires induits des isomorphismes sur tous les groupes d'homotopie, alors c'est une équivalence d'homotopie.*

7.5 Théorème d'Hurewicz

Définition 7.5.1. Pour $n \geq 0$, un espace X est dit n-connexe s'il est connexe par arcs et si $\pi_k(X, x_0)$ est trivial pour $k \leq n$.

On appelle homomorphisme d'Hurewicz l'application

$$\begin{array}{rcl} \pi_n(X, x_0) & \to & H_n(X) \\ [f] & \mapsto & f_*([I^n]) \end{array}$$

Théorème 7.5.2. *Si X est $(n-1)$-connexe, avec $n \geq 2$, alors $\widetilde{H}_k(X)$ est nul pour $k < n$, et l'homomorphime d'Hurewicz*

$$\pi_n(X, x_0) \to H_n(X)$$

est un isomorphisme.
Dans la cas $n = 1$, le morphisme d'Hurewicz induit un isomorphisme entre l'abélianisé $\pi_1(X, x_0)^{\mathrm{ab}}$ et $H_1(X)$.

7.6 Fibrations

Définition 7.6.1. Une application continue $p : E \to B$ est une fibration localement triviale si et seulement si pour tout $b \in B$ il existe un voisinage V de b et un homéomorphisme h entre $p^{-1}(B)$ et $F_b \times V$ tel que $p \circ h^{-1}$ est la projection sur V.

Définition 7.6.2. Une application continue $p : E \to B$ est une fibration de Serre si et seulement si elle a la propriété de relèvement des homotopies pour les disques D^n : pour toute application continue $h : [0,1] \times D^n \to B$, et tout relèvement $\tilde{h}_0$ de $h_0 = h(0, \ .\ )$, il existe un relèvement $\tilde{h}$ qui étend $\tilde{h}_0$.

Proposition 7.6.3. *Toute fibration localement triviale est une fibration de Serre.*

Théorème 7.6.4. *Soit $p : E \to B$ une fibration de Serre, de base B connexe par arcs et de fibre $F = p^{-1}(x_0)$. Alors il existe une suite exacte longue en homotopie :*

$$\cdots \to \pi_n(F, e_0) \to \pi_n(E, e_0) \to \pi_n(B, x_0) \to \pi_{n-1}(F, e_0) \to \cdots \to \pi_0(E, e_0)$$