

# Topologie algébrique

Pierre Guillot

12 décembre 2012

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Homologie</b>	<b>4</b>
<b>1</b>	<b>Préliminaires : topologie quotient, CW-complexes</b>	<b>5</b>
1.1	Topologie quotient . . . . .	5
1.2	CW-complexes . . . . .	6
1.3	Homotopie . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Complexes de chaînes et homologie</b>	<b>15</b>
2.1	Complexes de chaînes et leur homologie . . . . .	15
2.2	Modules libres sur un ensemble . . . . .	16
2.3	Obtenir des complexes à partir d'espaces topologiques . . . . .	16
2.4	Faire varier $H_n(\mathfrak{X})$ avec $\mathfrak{X}$ . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Catégories et foncteurs</b>	<b>23</b>
<b>4</b>	<b>Les axiomes d'Eilenberg &amp; Steenrod</b>	<b>28</b>
4.1	Description axiomatique de l'homologie . . . . .	28
4.2	Homologie réduite . . . . .	29
4.3	Homologie relative et excision . . . . .	31
4.4	Cohomologie . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Unicité de l'homologie</b>	<b>40</b>
5.1	Premier théorème d'unicité . . . . .	40
5.2	L'homologie des CW-complexes . . . . .	41
<b>6</b>	<b>Existence de l'homologie</b>	<b>48</b>
6.1	Homologie et cohomologie singulières . . . . .	48
6.2	Calculs en degré 0 . . . . .	50
6.3	Changements de coefficients . . . . .	51
6.4	Dualité – le produit de Kronecker . . . . .	52
6.5	(Co)homologie d'un produit . . . . .	52
6.6	Structures multiplicatives . . . . .	54
6.7	Le produit cap . . . . .	55
<b>7</b>	<b>Homologie des variétés</b>	<b>58</b>
7.1	Variétés . . . . .	58
7.2	Orientations . . . . .	59
7.3	Dualité de Poincaré . . . . .	60
7.4	La cohomologie des espaces projectifs . . . . .	61
7.5	Quelques points techniques . . . . .	62

7.6	Preuve de la dualité de Poincaré . . . . .	64
<b>II</b>	<b>Groupe fondamental</b>	<b>68</b>
<b>8</b>	<b>Groupes d'homotopie</b>	<b>69</b>
8.1	Homotopies relatives . . . . .	69
8.2	Groupes d'homotopie . . . . .	69
8.3	Le théorème de Hurewicz . . . . .	71
8.4	Quelques théorèmes sans démonstration . . . . .	73
8.5	Dualité . . . . .	74
<b>9</b>	<b>Revêtements</b>	<b>79</b>
9.1	Revêtements . . . . .	79
9.2	Relèvements . . . . .	82
9.3	Monodromie . . . . .	84
9.4	Le théorème général du relèvement . . . . .	84
9.5	Le groupe de Galois . . . . .	86
9.6	Quelques exemples explicites . . . . .	87
<b>10</b>	<b>La classification des revêtements</b>	<b>91</b>
10.1	Le revêtement universel . . . . .	91
10.2	Équivalences de catégories . . . . .	92
10.3	La classification . . . . .	92
10.4	Correspondances galoisiennes . . . . .	95
10.5	Revêtements réguliers . . . . .	96
<b>11</b>	<b>Le théorème de Van Kampen</b>	<b>98</b>
11.1	Produits amalgamés de groupes . . . . .	98
11.2	Le théorème de Van Kampen . . . . .	101
<b>III</b>	<b>Algèbre homologique</b>	<b>104</b>
<b>12</b>	<b>Foncteurs dérivés</b>	<b>105</b>
12.1	Catégories de modules . . . . .	105
12.2	Modules projectifs . . . . .	107
12.3	Résolutions . . . . .	109
12.4	Définition des foncteurs dérivés . . . . .	111
12.5	Un exemple complet : <i>Tor</i> . . . . .	115
12.6	Foncteurs dérivés à droite . . . . .	117
<b>13</b>	<b>Modules injectifs</b>	<b>121</b>
13.1	Changer le sens des flèches . . . . .	121
13.2	Exemples . . . . .	122
13.3	On déroule . . . . .	124

<b>14 Faisceaux et cohomologie de Rham</b>	<b>126</b>
14.1 Faisceaux	126
14.2 Suites exactes	127
14.3 Cohomologie	129
14.4 Calcul par les formes différentielles	130
14.5 Calcul par les simplexes singuliers	131
14.6 Exemples	134

Première partie

Homologie

# Chapitre 1

## Préliminaires : topologie quotient, CW-complexes

### 1.1 Topologie quotient

Nous commençons par des rappels de topologie élémentaire. Ce paragraphe d'introduction est un peu technique.

**Définition 1.1.1.** Soit  $X$  un espace topologique, et soit  $\sim$  une relation d'équivalence sur  $X$ . On note  $Y = X/\sim$  l'ensemble des classes d'équivalence, et  $p : X \rightarrow Y$  l'application canonique (qui à un élément  $x$  associe sa classe d'équivalence  $p(x)$ ). La *topologie quotient* sur  $Y$  est définie comme suit : une partie  $U \subset Y$  est déclarée ouverte si et seulement si  $p^{-1}(U)$  est ouverte dans  $X$ .

Cette définition est posée précisément pour que la proposition suivante soit vraie :

**Proposition 1.1.2.** Soit  $f : X \rightarrow Z$  une application continue, et soit  $\sim$  une relation d'équivalence sur  $X$ , avec  $p$  et  $Y$  comme ci-dessus. On suppose que  $f(x) = f(x')$  lorsque  $x \sim x'$ . Alors il existe une unique application continue  $g : Y \rightarrow Z$  telle que  $f(x) = g(p(x))$ .

*Démonstration.* L'application  $g$  est clairement unique, la seule question étant sa continuité. Soit donc  $U$  un ouvert de  $Z$ , il faut montrer que  $g^{-1}(U)$  est ouvert. Par définition de la topologie sur  $X/\sim$ , il faut vérifier si  $p^{-1}(g^{-1}(U))$  est ouvert ; or cet ensemble est précisément  $f^{-1}(U)$ , qui ouvert car  $f$  est continue.  $\square$

**Exemple 1.1.3.** Soit  $X = \mathbf{R}$  et  $Z = S^1$ , le cercle unité. Considérons  $f : X \rightarrow Z$  donnée par  $f(x) = e^{2i\pi x}$ . On prend pour  $\sim$  la "relation définie par  $f$ ", c'est-à-dire  $x \sim y$  si et seulement si  $f(x) = f(y)$ . Concrètement, on a ici  $x \sim y \iff x = y + n$  pour  $n \in \mathbf{Z}$ . Soit  $Y = \mathbf{R}/\sim$ .

D'après la proposition, on a une application continue  $g : Y \rightarrow S^1$ , qui envoie  $p(x)$  sur  $g(p(x)) = f(x) = e^{2i\pi x}$ . L'application exponentielle est surjective, donc  $g$  l'est aussi ; et il est clair que  $g$  est injective, par définition même de  $\sim$ . Ainsi  $g$  est une bijection continue. Montrons que c'est un homéomorphisme.

Comme  $[0, 1]$  est compact,  $p([0, 1])$  est compact ; mais  $p([0, 1]) = \mathbf{R}/\sim$  clairement (car  $f([0, 1]) = S^1$  en entier). Donc  $Y$  est compact. Puisque  $g$  est une

bijection continue entre un espace compact et un espace séparé, c'est bien un homéomorphisme. On peut donc *identifier*  $\mathbf{R}/\sim$  avec le cercle  $S^1$ .

**Définition 1.1.4.** Soit  $A$  est une partie non vide (en général fermée) de  $X$ . On obtient une partition de  $X$  en prenant l'union (disjointe) des singletons  $\{x\}$  pour  $x \in X - A$ , et  $A$  lui-même. Ceci définit une relation d'équivalence sur  $X$ , disons  $\sim$ , et l'espace  $X/\sim$  est noté  $X/A$ .

En termes plus imagés,  $X/A$  est obtenu à partir de  $X$  en identifiant tous les points de  $A$  (on dit aussi "en écrasant  $A$ ").

**Exemple 1.1.5.** Prenons un  $X$  quelconque, formons  $Y = X \times [0, 1]$  (le "cylindre sur  $X$ "), et soit  $A = Y \times \{0\}$ . L'espace  $Y/A$  est appelé le "cône sur  $X$ ".

Voyons maintenant le genre de relation d'équivalence qui va nous servir tout le temps.

**Définition 1.1.6.** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques,  $A$  une partie fermée de  $Y$ , et  $f : A \rightarrow X$ . Prenons l'union disjointe  $X \amalg Y$ , et définissons une relation  $\sim$  sur cet espace comme suit : on déclare  $a \sim f(a)$  pour  $a \in A$ , et "rien d'autre". En d'autres termes les classes d'équivalence sont les paires  $\{a, f(a)\}$  et tous les singletons  $\{x\}$  pour  $x \in X - f(A)$  et  $\{y\}$  pour  $y \in Y - A$ .

L'espace des classes  $(X \amalg Y)/\sim$  est noté  $X \cup_f Y$ .

**Exemple 1.1.7.** Un exemple classique s'obtient en partant d'une application continue  $f : A \rightarrow X$ , et en posant  $Y = A \times I$ , avec  $I = [0, 1]$  (le cylindre sur  $A$ ). On voit  $A$  comme une partie fermée de  $Y$  en l'identifiant avec  $A \times \{0\}$ . L'espace  $X \cup_f Y$  est appelé *cylindre de  $f$* , et noté  $M_f$ .

À peine plus compliqué, prenons  $Y = (A \times I)/(A \times \{1\})$  (le cône sur  $A$ ). On peut encore voir  $A$  comme une partie fermée de  $Y$ , et  $X \cup_f Y$  est appelé le *cône de l'application  $f$* , noté  $C_f$ .

Cet espace  $C_f$  jouera un rôle très important vers la fin de ce cours.

## 1.2 CW-complexes

Commençons par rappeler des définitions classiques.

**Définition 1.2.1.** La sphère de dimension  $n$  est

$$S^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}.$$

En particulier  $S^0 = \{-1; 1\} \subset \mathbf{R}$ .

La boule de dimension  $n$  est

$$B^n = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| \leq 1\}.$$

Un espace topologique quelconque qui est homéomorphe à  $B^n$  est appelé une *cellule de dimension  $n$* , ou plus simplement une  $n$ -cellule. Une 0-cellule est un espace réduit à un point.

Nous allons maintenant définir les CW-complexes. Ce sont les espaces les plus simples possibles (surtout pour les applications que nous envisageons dans ce cours). Avant de donner une définition formelle, on peut donner une idée intuitive comme suit : un CW-complexe est un espace obtenu en collant ensemble des cellules. En basses dimensions :

- un CW-complexe de dimension 0 est un ensemble fini, muni de la topologie discrète ;
- un CW-complexe de dimension 1 est obtenu en attachant des 1-cellules (donc des segments) à un complexe de dimension 0, et ressemble donc à un “graphe” ;
- un CW-complexe de dimension 2 est obtenu en attachant des 2-cellules (donc des espaces homéomorphes à des disques, ou à des triangles) à un complexe de dimension 1, et on peut penser au bord d’un polyèdre par exemple ;
- etc...

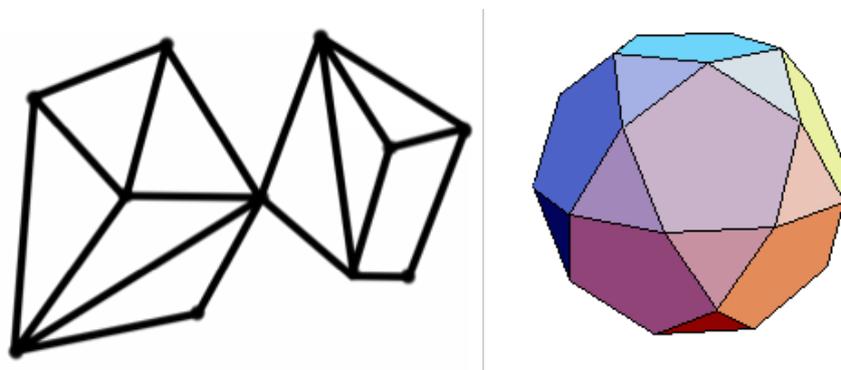


FIGURE 1.1 – *A gauche, un CW-complexe de dimension 1 ; à droite un CW-complexe de dimension 2.*

Passons à la définition. Notez qu’en réalité, un CW-complexe est une chose combinatoire  $\mathfrak{X}$  qui permet de construire un espace topologique  $X = |\mathfrak{X}|$ , mais en pratique et par abus de langage, on parle d’un CW-complexe comme d’un espace.

Sans surprise, on procède par récurrence sur la “dimension”.

**Définition 1.2.2.** Un CW-complexe (fini) de dimension 0 est un ensemble (fini)  $\mathfrak{X}$ . Lorsqu’on voit  $\mathfrak{X}$  comme un espace topologique (avec la topologie discrète), on écrit plutôt  $|\mathfrak{X}|$ .

Supposons que l’on ait défini la notion de CW-complexe (fini) de dimension  $n$ . Un CW-complexe (fini)  $\mathfrak{X}$  de dimension  $n + 1$  est la donnée de :

1. un CW-complexe (fini)  $\mathfrak{X}_n$  de dimension  $n$  que l’on appelle le  $n$ -squelette de  $\mathfrak{X}$  ; on suppose qu’un espace topologique  $|\mathfrak{X}_n|$  a également été défini par récurrence.
2. un ensemble (fini)  $J = J_{n+1}$  d’indices, et pour chaque  $j \in J$  une application continue  $f_j : S^n \rightarrow |\mathfrak{X}_n|$ .

La *réalisation topologique* de  $\mathfrak{X}$ , notée  $|\mathfrak{X}|$ , est obtenue comme suit. Soit  $X_n = |\mathfrak{X}_n|$ , et soit

$$Y = \coprod_{j \in J} B_j^{n+1}$$

une union disjointe de  $n + 1$ -boules ; on voit

$$A = \coprod_{j \in J} S_j^n$$

comme un sous-espace fermé de  $Y$ , et  $f = \coprod f_j$  comme une application  $A \rightarrow X_n$ .

L'espace  $|\mathfrak{X}|$  est alors  $X_n \cup_f Y$ . (On a donc bien attaché les cellules  $B_j^{n+1}$  sur l'espace  $X_n$ , à l'aide des application  $f_j$  qui sont définies sur le bord des cellules, et qui indiquent où l'on doit attacher ce bord.)

Notons qu'il y a une application continue  $p : X_n \coprod Y \rightarrow |\mathfrak{X}|$ . On voit facilement que  $X_n = |\mathfrak{X}_n|$  s'identifie à un sous-espace fermé de  $|\mathfrak{X}|$  via cette application. D'autre part, l'image de  $B_j^n$  par  $p$ , qui est une partie fermée de  $|\mathfrak{X}|$ , est appelée la  $j$ -ème cellule de dimension  $n + 1$  de  $|\mathfrak{X}|$ . On la notera souvent  $\sigma_j$ . Observons que  $|\mathfrak{X}|$  est la réunion de son  $n$ -squelette  $|\mathfrak{X}_n|$  et de ses  $n + 1$ -cellules.

Il y a une exception pour les 0-cellules : ce sont par définition les points qui forment le 0-squelette.

**Exemple 1.2.3.** A l'aide de trois 0-cellules, trois 1-cellules, et une 2-cellule, on obtient un triangle (plein). Le 0-squelette est  $X_0 = \{a, b, c\}$ . On va prendre

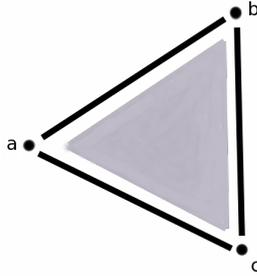


FIGURE 1.2 – Un triangle comme CW-complexe de dimension 2.

trois 1-cellules, et pour des raisons évidentes on va les appeler  $B_{ab}^1$ ,  $B_{bc}^1$ , et  $B_{ac}^1$  (dans les notations ci-dessus, l'ensemble  $J_1$  a trois éléments). L'application

$$f_{ab} : S_{ab}^0 \rightarrow \{a, b\} \subset X_0$$

envoie  $-1$  sur  $a$  et  $1$  sur  $b$  (on voit  $S_{ab}^0$  comme le bord de  $B_{ab}^1$ ). Les définitions de  $f_{bc}$  et  $f_{ac}$  sont similaires.

Le 1-squelette  $X_1$  est alors le bord d'un triangle ; fixons un homéomorphisme  $g : S^1 \rightarrow X_1$ .

On prend une seule 2-cellule  $B^2$ , et on prend  $g$  comme l'application correspondante (cette fois  $J_2$  a un seul élément). On voit tout de suite que  $X_2 = |\mathfrak{X}_2|$  s'obtient à partir d'un disque  $B^2$  en attachant son bord (qui est un cercle) sur un autre cercle *via* l'homéomorphisme  $g$ . Clairement  $|\mathfrak{X}_2|$  est alors lui-même homéomorphe à  $B^2$ . Cependant vu le choix des cellules, on voit plutôt  $|\mathfrak{X}|$  comme un triangle plein.

**Exemple 1.2.4.** Nous allons définir un CW-complexe  $\mathfrak{X}$  dont la réalisation est homéomorphe au disque unité dans le plan complexe (donc homéomorphe au

triangle plein de l'exemple précédent). Ce complexe va être de dimension 2, avec une cellule et une seule dans chaque dimension.

Commençons donc par le 0-squelette  $\mathfrak{X}_0$ . Il se réduit à un point  $x$ . Ainsi  $|\mathfrak{X}_0| = \{x\}$ .

Passons au 1-squelette  $\mathfrak{X}_1$ . On se donne une seule application

$$f : S^0 \rightarrow \{x\},$$

qui est évidemment constante. Pour obtenir  $|\mathfrak{X}_1|$ , on part de l'union d'un intervalle  $B^1$  et d'un point, et on attache les extrémités de l'intervalle sur le point. Donc  $|\mathfrak{X}_1|$  est homéomorphe à un cercle.

Fixons un homéomorphisme  $g : S^1 \rightarrow |\mathfrak{X}_1|$ . On prend  $g$  comme seule application pour construire le 2-squelette  $\mathfrak{X}_2$ . Comme dans l'exemple précédent, on conclut que l'espace obtenu est un disque.

Ces deux exemples montrent qu'un espace donné (ici le disque) peut être obtenu comme la réalisation de CW-complexes différents.

Notons aussi que nous n'avons pas tourné en rond : à la fin de ce manège, on a montré que  $B^2$ , qui est une 2-cellule, est aussi la réalisation topologique d'un CW-complexe (et même plusieurs, donc). Ceci va nous permettre, dans le chapitre suivant, de faire des calculs avec  $B^2$ .

**Exemple 1.2.5.** Voici un autre exemple. On prend le même 1-squelette, et on attache une 2-cellule par l'application

$$S^1 \xrightarrow{z \mapsto z^n} S^1 \xrightarrow{g} |\mathfrak{X}_1|.$$

C'est un CW-complexe bien défini, et il est plutôt difficile de faire un dessin, même pour  $n = 2$ !

**Exemple 1.2.6.** Soit  $X$  un tétraèdre (creux). On peut facilement trouver un CW-complexe  $\mathfrak{X}$  tel que  $|\mathfrak{X}| = X$ ; on parlera de “mettre une structure de CW-complexe sur  $X$ ”. En l'occurrence, on peut prendre  $\mathfrak{X}$  avec 4 points (0-cellules), 6 segments (1-cellules), et 4 faces (2-cellules).

On va s'intéresser tout particulièrement à certains CW-complexes, dit “réguliers”, pour lesquels les applications  $f_j$  ne sont pas trop “tordues”. Typiquement, le CW-complexe de l'exemple 1.2.5 *n'est pas* régulier. Ceux des exemples 1.2.4 et 1.2.6 sont réguliers.

Il serait bien trop fort d'exiger que  $f_j$  soit un homéomorphisme. La bonne définition va faire intervenir la notion d'homotopie.

## 1.3 Homotopie

**Définition 1.3.1.** Deux applications continues  $f, g : X \rightarrow Y$  sont dites *homotopes* lorsqu'il existe une application continue

$$F : X \times [0, 1] \longrightarrow Y,$$

telle que  $F(x, 0) = f(x)$  et  $F(x, 1) = g(x)$ . En d'autres termes, il existe une famille d'applications de  $X$  dans  $Y$ , à savoir  $x \mapsto F(x, t)$  pour  $0 \leq t \leq 1$ , qui part de  $f$  pour arriver à  $g$ , et varie continûment.

On note  $f \simeq g$ .

**Exemple 1.3.2.** Soit  $X = Y = \mathbf{R}^n$ , on considère  $c : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  l'application constante  $c(x) = 0$ , et  $i : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  l'application identité  $i(x) = x$ . Montrons que  $c$  et  $i$  sont homotopes. Il suffit de prendre :

$$F : \mathbf{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$$

$$F(x, t) = tx.$$

Alors  $F(x, 0) = 0 = c(x)$  et  $F(x, 1) = x$ .

**Exemple 1.3.3.** Soit  $X = Y = \mathbf{R}^n - \{0\}$ , on considère cette fois  $p(x) = x/\|x\|$ , et  $i(x) = x$  de nouveau. On voit que  $p$  et  $i$  sont homotopes en prenant

$$F : (\mathbf{R}^n - \{0\}) \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n - \{0\}$$

$$F(x, t) = (1 - t)x + t \frac{x}{\|x\|}.$$

**Définition 1.3.4.** Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue. On dit que  $f$  est une *équivalence d'homotopie* lorsqu'il existe  $g : Y \rightarrow X$  telle que  $g \circ f \simeq id_X$  et  $f \circ g \simeq id_Y$ .

On dit alors que  $X$  et  $Y$  ont le même *type d'homotopie*, ou parfois qu'ils sont homotopie-équivalents, et on note  $X \simeq Y$ .

**Exemple 1.3.5.** Soit  $X = \mathbf{R}^n$ , et soit  $Y = \{0\}$ . Prenons  $f : X \rightarrow Y$  l'application constante, et soit  $g : Y \rightarrow X$  l'inclusion. Alors  $f$  et  $g$  sont des équivalences d'homotopie.

En effet,  $f \circ g = id_Y$  clairement, et  $c = g \circ f$  est l'application constante  $c(x) = 0$ , donc d'après l'exemple 1.3.2, on a bien  $g \circ f \simeq id_X$ .

Ainsi  $\mathbf{R}^n$  a le même type d'homotopie qu'un espace réduit à un point : on dit qu'il est *contractile*.

**Exemple 1.3.6.** Soit  $X = \mathbf{R}^n - \{0\}$  et  $Y = S^{n-1}$ , on prend alors  $f : X \rightarrow Y$  définie par  $f(x) = x/\|x\|$ , et  $g : Y \rightarrow X$  l'inclusion. Alors  $f \circ g = id_Y$ , et l'exemple 1.3.3 montre que  $g \circ f \simeq id_X$ . Donc  $\mathbf{R}^n - \{0\}$  a le même type d'homotopie que la sphère  $S^{n-1}$ .

**Proposition 1.3.7.** 1. La relation d'homotopie est une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions continues  $X \rightarrow Y$ . La classe de  $f$  est notée  $[f]$ , et l'ensemble des classes d'homotopies est noté  $[X, Y]$ .

2. La classe  $[f \circ g]$  ne dépend que de  $[f]$  et de  $[g]$ .

*Démonstration.* Exercice. □

**Définition 1.3.8.** On reprend les notations de la définition 1.2.2. Un CW-complexe (fini)  $\mathfrak{X}$  est dit *régulier* lorsque la condition supplémentaire suivante est satisfaite, pour tout  $n \geq 1$ .

Soient  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$  les  $n + 1$  cellules, et soient  $\tau_1, \dots, \tau_s$  les  $n$ -cellules. Soit alors  $A_i$  la partie fermée de  $|\mathfrak{X}_n|$  qui est l'union du  $n - 1$ -squelette ainsi que de toutes les  $n$ -cellules *exceptée*  $\tau_i$ . L'espace  $|\mathfrak{X}_n|/A_i$  est homéomorphe à une  $n$ -sphère.

Par ailleurs, à la  $n + 1$ -cellule  $\sigma_j$  correspond une application  $f_j : S^n \rightarrow |\mathfrak{X}_n|$  qui décrit la façon dont le bord de la cellule est attaché sur le  $n$ -squelette. On a donc une application

$$f_{ji} : S^n \rightarrow |\mathfrak{X}_n| \rightarrow |\mathfrak{X}_n|/A_i.$$

Le CW-complexe est alors dit régulier lorsque  $f_{ij}$  est

- soit une équivalence d’homotopie,
- soit une application constante.

Dans le premier cas, on dira que  $\tau_i$  est *sur le bord* de  $\sigma_j$ , ou encore que  $\tau_i$  est une *face* de  $\sigma_j$ .

**Remarque 1.3.9.** Noter qu’il n’y a pas de condition sur les 0-cellules. Également, il se peut qu’il n’y ait *aucune*  $n$ -cellule, et qu’il y ait pourtant des  $n + 1$ -cellules (cf exercices). Dans ce cas on considère la condition remplie pour ce  $n$ .

**Exemple 1.3.10.** Le ruban de Moebius est obtenu à partir d’un rectangle en identifiant deux côtés comme indiqué sur la figure 1.3 (exercice : donner une définition précise à l’aide de la topologie quotient). Cette espace est homéomorphe à la réalisation topologique  $|\mathfrak{X}|$  d’un CW-complexe  $\mathfrak{X}$  qui comporte deux 0-cellules  $x_0$  et  $x_1$ , trois 1-cellules dont deux sur le bord  $b_0$  et  $b_1$  et une transversale  $t$ , et une seule 2-cellule  $\sigma$  : voir la figure. Voyons si ce complexe est régulier.

On doit vérifier la condition pour  $n = 1$ , c’est-à-dire qu’on doit examiner l’application qui “attache le bord de  $\sigma$  sur le 1-squelette”. Il y a trois vérifications à faire.

Pour  $b_0$ , l’application

$$g : \partial\sigma = S^1 \longrightarrow |\mathfrak{X}_1|/(b_1 \cup t) = S^1$$

peut-être décrite comme suit. Soit  $f : S^1 \rightarrow S^1$  donnée par  $f(e^{i\theta}) = e^{2i\theta}$  pour  $0 \leq \theta \leq \pi$ , et  $f(e^{i\theta}) = 1$  pour les autres valeurs de  $\theta$ . Alors il existe des homéomorphismes  $\alpha$  et  $\beta$  de  $S^1$  vers lui-même tels que  $g = \alpha \circ f \circ \beta$ .

On peut montrer que  $f$  est une équivalence d’homotopie (cf les exercices). Comme  $\alpha$  et  $\beta$  sont également des équivalences, on voit finalement que  $g$  est une équivalence d’homotopie. L’analyse pour  $b_1$  est similaire.

La situation pour  $t$  est très différente. Ici l’application

$$\partial\sigma = S^1 \longrightarrow |\mathfrak{X}_1|/(b_0 \cup b_1) = S^1$$

semble “s’enrouler deux fois autour de  $t$ ”. Il paraît douteux que cette application soit une équivalence. A la fin du cours, on verra des méthodes pour montrer qu’effectivement, ce n’est pas la cas ; le complexe *n’est pas* régulier.

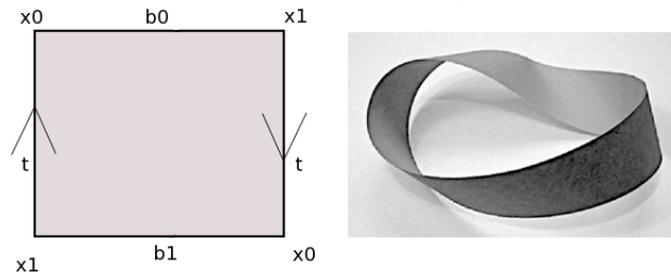


FIGURE 1.3 – En identifiant deux côtés d’un rectangle en sens contraires, on obtient le “ruban de Moebius”.

# Exercices

## Topologie quotient

**Exercice 1.** Soit  $X$  un espace topologique, et soit  $I = [0, 1]$ . On définit trois nouveaux espaces :

- le cylindre sur  $X$  est  $X \times I$ ,
- le cône sur  $X$  est  $CX = (X \times I)/(X \times \{1\})$ ,
- la suspension de  $X$  est  $SX = ((X \times I)/(X \times \{1\}))/ (X \times \{0\})$ .

Faire un dessin de ces trois espaces lorsque  $X$  est un disque.

**Exercice 2.** Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces, et soit  $x \in X$ ,  $y \in Y$ . L'union pointée de  $X$  et de  $Y$  est  $X \vee Y = (X \amalg Y)/(\{x\} \cup \{y\})$ . Le produit-smash de  $X$  et  $Y$  est  $X \wedge Y = (X \times Y)/(X \vee Y)$  (question préliminaire : comment voit-on  $X \vee Y$  comme un sous-espace de  $X \times Y$ ?)

Quel est le lien entre  $S^1 \wedge X$  et la suspension  $SX$  de l'exercice précédent ?  
L'espace  $S^1 \wedge X$  est appelé la suspension réduite de  $X$ .

**Exercice 3.** Soit  $B^2$  le disque unité dans le plan complexe, et soit  $S^1$  le cercle unité. On note  $S^2$  la sphère unité dans  $\mathbf{R}^3$ . Montrer que  $B^2/S^1$  est homéomorphe à  $S^2$ .

Plus généralement, soit  $S^n$  l'ensemble des vecteurs de norme euclidienne 1 dans  $\mathbf{R}^{n+1}$ , et soit  $B^n$  l'ensemble des vecteurs de norme  $\leq 1$  dans  $\mathbf{R}^n$ . Montrer que  $B^n/S^{n-1} \cong S^n$ .

*Indication :* une chose utile pour faire cette preuve est la "projection stéréographique" : soit  $P$  le plan tangent à  $S^n$  dans  $\mathbf{R}^{n+1}$ , passant par le "pôle sud" ; tirer une droite passant par le "pôle nord" et par un point  $x$  de la sphère, alors elle coupe  $P$  en un point  $p(x)$ . Ceci donne un homéomorphisme  $S^n - \{pt\} \rightarrow P \cong \mathbf{R}^n$ . L'intérieur de  $B^n$  est également homéomorphe à  $\mathbf{R}^n$ .

## Homotopie

**Exercice 4.** Soit  $X = \mathbf{R}^2 - \{(0, 0), (1, 0)\}$ , le plan auquel on a retiré deux points. Soit  $Y$  la réunion de deux cercles, tangents en un point ( $Y$  ressemble à un  $\infty$  et on l'appelle aussi souvent "l'espace en forme de nombre 8"). Montrer par un dessin que  $X$  et  $Y$  ont le même type d'homotopie.

**Exercice 5.** Classer les 26 lettres de l'alphabet en types d'homotopie distinct (la réponse dépend de votre écriture).

**Exercice 6.** Montrer que le ruban de Moebius a le type d'homotopie d'un cercle.

**Exercice 7.** Cet exercice décrit certaines équivalences d'homotopie  $S^n \rightarrow S^n$  qui sont constamment employées pour construire des CW-complexes réguliers.

Soit donc  $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$  la  $n$ -sphère, et soit  $P$  un hyperplan de  $\mathbf{R}^{n+1}$  (donc un translaté d'un sous-espace vectoriel de dimension  $n$ ). On suppose que  $E = S^n \cap P$  n'est ni vide ni réduit à un point : vérifier que  $E$  est alors homéomorphe à une sphère  $S^{n-1}$  (la lettre  $E$  est pour "équateur").

L'espace  $\mathbf{R}^{n+1} - P$  a deux composantes connexes, qu'on appelle arbitrairement  $U_+$  et  $U_-$ . Soit  $S_+^n = S^n \cap \bar{U}_+$ . Vérifier que  $S_+^n$  est homéomorphe à une boule  $B^n$ . On appelle  $S_+^n$  une *face*, ou une calotte, de  $S^n$ .

On considère la projection  $p : S^n \rightarrow S^n/S_+^n$ . Montrer que  $p$  est une équivalence d'homotopie.

*Indication :* à l'aide de la projection stéréographique comme dans l'exercice 3, on peut voir  $S^n$  comme  $\mathbf{R}^n$  auquel on a rajouté un point à l'infini. On peut se ramener au cas où  $S_+^n$  est le complément de la boule unité  $B^n$  (donc  $S_+^n$  contient le point à l'infini). Ensuite la situation n'est pas si différente de celle de l'exercice 3...

## CW-complexes

**Exercice 8.** 1. Montrer que la sphère  $S^n$  a une structure de CW-complexe avec en tout et pour tout deux cellules (*c'est l'exercice 3*).

2. Montrer que la sphère  $S^n$  a une structure de CW-complexe avec deux  $k$ -cellules pour chaque  $0 \leq k \leq n$ .

**Exercice 9.** Le tore  $T$ , la bouteille de Klein  $K$ , et l'espace projectif  $\mathbf{R}P^2$ , sont obtenus à partir d'un carré (plein) à l'aide d'identifications sur le bord, comme indiqué sur les figures ci-dessous.

1. Pour chacun de ces espaces, trouver une structure de CW-complexe avec le moins de cellules possible (en particulier, avec une seule 2-cellule).
2. Trouver pour chacun de ces espaces une structure de CW-complexe régulier.  
*Indication :* couper le carré en deux triangles ; utiliser l'exercice 7.

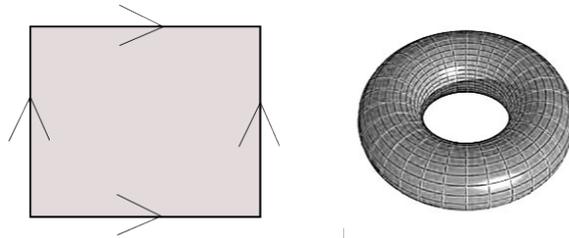


FIGURE 1.4 – En identifiant les côtés d'un carré comme indiqué à gauche, on obtient le tore  $T$  (à droite).

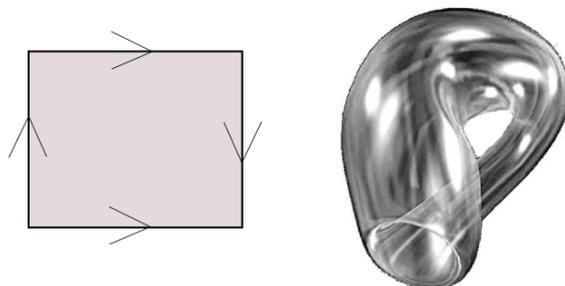


FIGURE 1.5 – De cette façon (noter l’inversion), on obtient la bouteille de Klein.

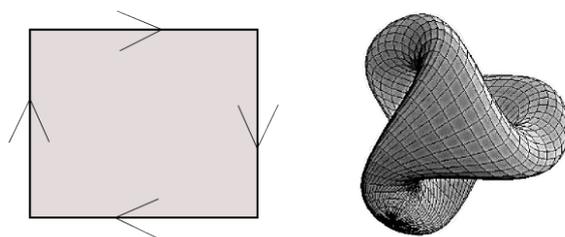


FIGURE 1.6 – Ces identifications donnent l’espace projectif – la figure à droite donne un plongement de cette surface dans  $\mathbf{R}^3$  qui n’est pas vraiment injectif (on dit que c’est une immersion, et le sous-ensemble de  $\mathbf{R}^3$  obtenu s’appelle la “surface de Boy”).

**Exercice 10** (Caractéristique d’Euler). Lorsque  $S$  est un ensemble fini, on note  $\#S$  le cardinal de  $S$ . Soit maintenant  $\mathfrak{X}$  un CW-complexe fini, et soit

$$\chi(\mathfrak{X}) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \#\{n\text{-cellules}\}.$$

On appelle  $\chi(\mathfrak{X})$  la caractéristique d’Euler de  $\mathfrak{X}$ .

Pour chaque espace  $S^n$ ,  $T$ ,  $K$ ,  $\mathbf{R}P^2$ , prendre une structure de CW-complexe (cf exercices précédents) et calculer la caractéristique d’Euler. Que se passe-t-il si on essaie avec deux structures différentes ?

Nous aurons l’occasion de revenir largement sur ce phénomène.

## Chapitre 2

# Complexes de chaînes et homologie

Dans ce chapitre, on travaille sur un anneau  $k$  et on considère des  $k$ -modules. La plupart du temps  $k$  sera un corps, et les  $k$ -modules sont alors les  $k$ -espaces vectoriels. En fait le cas le plus important est celui de  $k = \mathbf{F}_2$ , le corps à deux éléments.

### 2.1 Complexes de chaînes et leur homologie

**Définition 2.1.1.** Un *complexe de chaînes* sur  $k$ , ou complexe de  $k$ -modules, est la donnée pour chaque  $n \in \mathbf{Z}$  d'un module  $C_n$  et d'un homomorphisme  $\partial_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$ , avec la propriété fondamentale  $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ . On écrit en général

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial} C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

et  $\partial^2 = 0$ . On écrit aussi  $C_*$  pour désigner le complexe en entier, ou encore  $(C_*, \partial)$ .

La condition  $\partial^2 = 0$  équivaut à  $\text{Im}(\partial_n) \subset \ker(\partial_{n-1})$ . On peut donc définir sans ambiguïté le groupe

$$H_n(C_*) = \frac{\ker(\partial_n)}{\text{Im}(\partial_{n+1})}.$$

Ce groupe  $H_n(C_*)$  s'appelle le  $n$ -ième groupe d'homologie du complexe. C'est l'objet le plus important ce de cours.

**Définition 2.1.2.** Une *suite exacte longue* est un complexe de chaînes  $C_*$  dont l'homologie est nulle :  $H_n(C_*) = 0$  pour tout  $n$ . En d'autres termes (beaucoup plus simples!), c'est une suite de modules et de morphismes

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \longrightarrow C_n \longrightarrow C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

telle que l'image de chaque morphisme coïncide avec le noyau du suivant.

Étant donné une nombre fini de  $k$ -modules  $C_0, C_1, \dots, C_n$ , on a également une notion de suite exacte finie

$$C_n \longrightarrow C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0,$$

où là encore l'image de chaque morphisme est le noyau du suivant.

Une *suite exacte courte* est une suite exacte à cinq termes de la forme

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0.$$

**Exemple 2.1.3.** La suite

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$$

est exacte si et seulement si  $f$  est injective. La suite

$$B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

est exacte si et seulement si  $g$  est surjective. Dire que

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

est exacte équivaut à dire  $f$  injective,  $g$  surjective et  $\text{Im}(f) = \ker(g)$ .

## 2.2 Modules libres sur un ensemble

Soit  $S$  un ensemble. Le  $k$ -module libre sur  $S$ , que l'on va noter  $L(S)$ , est un  $k$ -module avec une base qui est en bijection avec les éléments de  $S$ ; si  $S$  est un ensemble fini, avec disons  $r$  éléments, alors  $L(S)$  va être isomorphe à  $k^r$ .

Voici une première définition possible. Les éléments de  $L(S)$  sont les sommes formelles

$$\sum_{s \in S} a_s s,$$

où chaque  $a_s$  est un élément de  $k$ ; on suppose de plus qu'il n'y a qu'un nombre fini de coefficients  $a_s$  qui soient  $\neq 0$ . (Dans les premiers exemples,  $S$  sera fini donc il n'y a pas tellement à se faire de soucis.) Cet ensemble  $L(S)$  est un  $k$ -module pour les opérations "évidentes".

**Exemple 2.2.1.** Si  $S = \{riri, fifi, loulou\}$ , alors un exemple d'élément de  $L(S)$  est  $x = 3riri - 2fifi - 4loulou$ , ou encore  $y = 7loulou - fifi$ . On a alors  $x + y = 3riri - 3fifi + 3loulou = 3(riri - fifi + loulou)$ .

Pour une définition peut-être plus rigoureuse, on peut présenter les choses de la manière suivante : si  $S$  est fini,  $L(S)$  est l'ensemble des fonctions  $S \rightarrow k$ , qui est naturellement un  $k$ -module. Etant donné  $s \in S$ , on définit la fonction  $\delta_s : S \rightarrow k$  par  $\delta_s(s) = 1$  et  $\delta_s(t) = 0$  pour  $t \neq s$ . Alors la famille  $(\delta_s)_{s \in S}$  est une base de  $L(S)$  (exercice facile). On s'autorise alors à écrire  $s$  au lieu de  $\delta_s$ , et on retombe sur la définition précédente. (Lorsque  $S$  est infini, il faut plutôt considérer les fonctions  $f : S \rightarrow k$  telles que  $f(s) = 0$  pour tous les  $s$  sauf un nombre fini.)

## 2.3 Obtenir des complexes à partir d'espaces topologiques

Soit  $\mathfrak{X}$  un CW-complexe régulier. Pour chaque entier  $n$ , soit  $C_n(\mathfrak{X})$  le  $\mathbf{F}_2$ -espace vectoriel libre engendré par les  $n$ -cellules de  $\mathfrak{X}$  (on a donc  $C_n(\mathfrak{X}) = 0$

pour  $n$  négatif ou pour  $n$  plus grand que la dimension de  $\mathfrak{X}$ ). Si les  $n+1$ -cellules sont  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ , alors  $C_{n+1}(\mathfrak{X})$  est un  $\mathbf{F}_2$ -espace vectoriel de dimension  $r$ , et un élément générique de cet espace est de la forme  $a_1\sigma_1 + \dots + a_r\sigma_r$ , avec  $a_i = 0$  ou  $1$ .

On va maintenant définir une application  $\partial_{n+1} = \partial : C_{n+1}(\mathfrak{X}) \rightarrow C_n(\mathfrak{X})$ . Il suffit de donner  $\partial(\sigma_j)$  et d'étendre par linéarité. Si les  $n$ -cellules sont  $\tau_1, \dots, \tau_s$ , on doit avoir

$$\partial(\sigma_j) = \sum_i [\sigma_j, \tau_i] \tau_i.$$

Le nombre  $[\sigma_j, \tau_i]$  ( $= 0$  ou  $1$ ) reste à définir ; on l'appelle l'indice de  $\sigma_j$  sur  $\tau_i$ . Revenant à la définition 1.3.8, on pose  $[\sigma_j, \tau_i] = 1$  si  $\tau_i$  est sur le bord de  $\sigma_j$ , et  $[\sigma_j, \tau_i] = 0$  sinon.

En d'autres termes, on pose :

$$\partial(\sigma_j) = \sum_{\tau_i \text{ sur le bord de } \sigma_j} \tau_i.$$

De nouveau il y a une petite exception autour de la dimension 0. On n'a pas défini la notion de "bord" en dimension 0, et la régularité est automatique. En fait si  $\sigma_j$  est une 1-cellule, l'application qui lui correspond  $f_j : S^0 \rightarrow |\mathfrak{X}_0|$  définit deux 0-cellules  $f_j(1)$  et  $f_j(-1)$  (qui peuvent parfaitement être égales) ; on définit tout bêtement

$$\partial\sigma_j = f_j(1) + f_j(-1).$$

Le membre de droite se lit "la somme des deux extrémités de  $\sigma_j$ ".

**\*Théorème 2.3.1** (Promesse A). *On a  $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ . En d'autres termes, on a défini un complexe de chaînes  $C_*(\mathfrak{X})$ .*

**Définition 2.3.2.** Le  $n$ -ième groupe d'homologie du CW-complexe régulier  $\mathfrak{X}$ , à coefficients dans  $\mathbf{F}_2$ , est par définition :

$$H_n(\mathfrak{X}) = H_n(C_*(\mathfrak{X})).$$

**Exemple 2.3.3.** On a vu dans les exercices qu'il existait un CW-complexe avec une 0-cellule et une 2-cellule (et aucune autre), tel que  $|\mathfrak{X}|$  est homéomorphe à la sphère  $S^2$ . Calculons son homologie.

Le complexe  $C_*(\mathfrak{X})$  ressemble à la chose suivante :

$$0 \longrightarrow C_2(\mathfrak{X}) = \mathbf{F}_2 \longrightarrow C_1(\mathfrak{X}) = 0 \longrightarrow C_0(\mathfrak{X}) = \mathbf{F}_2 \longrightarrow 0$$

Il n'y a aucun calcul à faire : l'homologie est visiblement

$$H_k(\mathfrak{X}) = \begin{cases} \mathbf{F}_2 & \text{si } k = 2 \text{ ou } 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Exemple 2.3.4.** Il va nous falloir un peu plus de calcul pour traiter l'homologie du CW-complexe de l'exemple 1.2.6 : rappelons qu'il s'agit du tétraèdre  $\mathfrak{X}$ , et là encore  $|\mathfrak{X}| \cong S^2$ .

Le complexe de chaînes  $C_*(\mathfrak{X})$  est de la forme

$$0 \longrightarrow \mathbf{F}_2^4 \xrightarrow{\partial_2} \mathbf{F}_2^6 \xrightarrow{\partial_1} \mathbf{F}_2^4 \longrightarrow 0.$$

On a quatre faces  $f_1, f_2, f_3, f_4$ , six arêtes  $a_1, \dots, a_6$ , et quatre sommets  $s_1, s_2, s_3, s_4$ . Les côtés de  $f_1$  sont, disons,  $a_1, a_2, a_3$ . Notons que “côtés” ici est pris au sens intuitif ; mais on se rend compte que les côtés sont exactement les 1-cellules qui sont “sur le bord” de la face, c’est-à-dire telles que  $[f_1, a] = 1$ . (Ici l’exercice 7 est utile). En d’autres termes

$$\partial(f_1) = a_1 + a_2 + a_3.$$

En faisant le même raisonnement avec les autres faces, on se rend compte que la matrice de l’application  $\partial_2$ , dans les bases  $f_1, \dots, f_4$  et  $a_1, \dots, a_6$ , est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

C’est une matrice de rang 3, donc son noyau est de rang 1 et  $\ker \partial_2 = H_2(\mathfrak{X}) = \mathbf{F}_2$ . Les trois premières colonnes forment une base de l’image.

Notons  $s_i$  le sommet en face de  $f_i$ . De la sorte, on a  $\partial a_1 = s_2 + s_4$ , et ainsi de suite. La matrice de  $\partial_1$  est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

C’est une matrice de rang 3, donc son noyau est de dimension 3, et il contient l’image de  $\partial_2$  (c’est ce que dit la promesse ci-dessus, et on le vérifie en multipliant les matrices). Donc  $\ker \partial_1 = \mathcal{I}m(\partial_2)$ , et  $H_1(\mathfrak{X}) = 0$ .

Finalement, comme  $\partial_0$  est l’application nulle et que  $\partial_1$  est de rang 3, on voit que  $(\ker \partial_0) / \mathcal{I}m(\partial_1) = \mathbf{F}_2 = H_0(\mathfrak{X})$ .

On en conclut que ce  $\mathfrak{X}$  a la même homologie que celui de l’exemple précédent. En réalité ce n’est pas un hasard : les deux complexes ont la même réalisation topologique, et on va établir le résultat suivant.

**\*Théorème 2.3.5** (Promesse B, première version). *Les groupes  $H_n(\mathfrak{X})$  ne dépendent que de l’espace topologique  $|\mathfrak{X}|$ . En d’autres termes, si  $\mathfrak{X}'$  est un autre CW-complexe tel qu’il y a un homéomorphisme  $|\mathfrak{X}| \cong |\mathfrak{X}'|$ , alors il y a un isomorphisme de groupes  $H_n(\mathfrak{X}) \cong H_n(\mathfrak{X}')$ .*

## 2.4 Faire varier $H_n(\mathfrak{X})$ avec $\mathfrak{X}$

Soit  $X$  un espace topologique. Si  $X$  est “raisonnable”, on peut espérer qu’il soit de la forme  $X = |\mathfrak{X}|$  pour un certain CW-complexe  $\mathfrak{X}$ . D’après la promesse 2.3.5, les groupes  $H_n(\mathfrak{X})$  ne dépendent que de  $X$ , et pas du choix de  $\mathfrak{X}$ . Autorisons-nous à écrire  $H_n(X)$  au lieu de  $H_n(\mathfrak{X})$  pendant quelques instants.

Supposons donnée une application continue  $f : X \rightarrow Y$ . Il serait bien agréable que l’on puisse en déduire un homomorphisme de groupes  $H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ , pour tout  $n$  : ainsi les situations topologiques se retrouveraient traduites en situations algébriques. Nous allons voir un exemple tout de suite.

Admettons qu'un tel homomorphisme de groupes existe, et notons le  $H_n(f) : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ ; on écrira aussi  $H(f)$  pour simplifier, et plus tard on écrira les choses encore plus simplement. Clairement on souhaiterait que les propriétés suivantes soient vraies :

$$H(g \circ f) = H(g) \circ H(f) \text{ pour } f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z,$$

$$H(id_X) = id,$$

où  $id_X$  est l'identité de l'espace topologique  $X$ , et où on a écrit  $id$  pour l'identité du groupe  $H_n(X)$ .

**\*Théorème 2.4.1** (Promesse B, nouvelle version). *Pour chaque espace topologique  $X$ , on sait définir des groupes  $H_n(X)$ . Lorsque  $X = |\mathfrak{X}|$  pour un CW-complexe  $\mathfrak{X}$ , on a un isomorphisme  $H_n(X) = H_n(\mathfrak{X})$ . De plus, on peut définir  $H_n(f) : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$  pour chaque application continue  $f : X \rightarrow Y$ , de façon à ce que les propriétés ci-dessus soient satisfaites.*

**Remarque 2.4.2.** Il est important de noter qu'il s'agit là d'un raffinement de la promesse 2.3.5. Supposons en effet qu'il y ait un homéomorphisme  $f = |\mathfrak{X}| \rightarrow |\mathfrak{X}'|$  entre les réalisations des complexes  $\mathfrak{X}$  et  $\mathfrak{X}'$ ; soit  $g : |\mathfrak{X}'| \rightarrow |\mathfrak{X}|$  son inverse, de sorte que  $f \circ g = id$  et  $g \circ f = id$ . On obtient alors  $H(f) : H_n(\mathfrak{X}) \rightarrow H_n(\mathfrak{X}')$  et de même pour  $H(g)$ , et on a  $H(f) \circ H(g) = H(f \circ g) = H(id) = id$ . Par un raisonnement identique on a  $H(g) \circ H(f) = id$ . Ainsi  $H(f)$  est un isomorphisme de groupes, d'inverse  $H(g)$ , entre  $H_n(\mathfrak{X})$  et  $H_n(\mathfrak{X}')$ .

D'une manière générale, le petit argument ci-dessus montre que *si  $X$  et  $Y$  sont homéomorphes, alors leurs groupes d'homologie sont isomorphes.*

Voyons si l'on sait démontrer de nouvelles choses avec ce genre de nouveaux outils. Voici un exemple.

**Proposition 2.4.3.** *Soit  $D$  le disque unité dans le plan complexe, soit  $S^1$  le cercle unité, et soit  $i : S^1 \rightarrow D$  l'inclusion.*

*Il n'existe aucune application continue  $p : D \rightarrow S^1$  telle que  $p \circ i = id$  (c'est-à-dire telle que  $p(z) = z$  pour les  $z$  de module 1).*

Une telle application  $p$  (qui n'existe pas!) s'appelle(rait) une rétraction de  $D$  sur  $S^1$ .

*Démonstration.* Supposons qu'une telle  $p$  existe : la composition

$$S^1 \xrightarrow{i} D \xrightarrow{p} S^1$$

est l'identité. Voyons ce que ça donne au niveau du  $H_1$  :

$$H_1(S^1) \xrightarrow{H_1(i)} H_1(D) \xrightarrow{H_1(p)} H_1(S^1),$$

avec  $H(p)H(i) = H(p \circ i) = H(id_{S^1}) = id$ .

On a vu dans les exercices que  $H_1(D) = 0$  et  $H_1(S^1) = \mathbf{F}_2$ . Donc la composition suivante est l'identité de  $\mathbf{F}_2$  :

$$\mathbf{F}_2 \xrightarrow{H_1(i)} 0 \xrightarrow{H_1(p)} \mathbf{F}_2.$$

C'est visiblement impossible (la composition ne peut être que 0). Cette contradiction montre que  $p$  n'existe pas.  $\square$

Il n'existe pas de démonstration "élémentaire" de ce résultat. Si la proposition peut paraître artificielle à première vue, le théorème ci-dessous (qui en est une conséquence facile) est indiscutablement très utile.

**Théorème 2.4.4** (du point fixe de Brouwer en dimension 2). *Soit  $f : D \rightarrow D$  une application continue. Alors  $f$  possède un point fixe  $z_0$  (c'est-à-dire que  $f(z_0) = z_0$ ).*

*Démonstration.* Par l'absurde. Si  $f$  n'a pas de point fixe, prenons  $z \in D$ , et soit  $p(z)$  l'intersection de la droite passant par  $z$ , de vecteur directeur  $f(z) - z \neq 0$ , et du cercle unité. On voit facilement que  $p : D \rightarrow S^1$  est continue, et  $p(z) = z$  si  $z \in S^1$ . D'après la proposition, une telle application  $p$  n'existe pas, contradiction.  $\square$

Dans le cours précédent on a étudié la notion d'homotopie entre applications continues. Les groupes d'homologie sont tout-à-fait compatibles avec cette notion, et c'est l'une de leurs forces.

**\*Théorème 2.4.5** (Promesse B, nouvelle version). *En plus de la promesse 2.4.1, si  $f : X \rightarrow Y$  est continue, alors l'homomorphisme induit  $H_n(f) : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$  ne dépend que de la classe  $[f]$ .*

**Remarque 2.4.6.** On en déduit facilement (exercice) que *lorsqu'il existe une équivalence d'homotopie entre  $X$  et  $Y$ , alors il y a un isomorphisme entre les groupes  $H_n(X)$  et  $H_n(Y)$* . C'est une propriété fondamentale de l'homologie.

Voyons une application.

**Théorème 2.4.7.** *Les espaces  $\mathbf{R}^n$  et  $\mathbf{R}^m$  ne sont homéomorphes que lorsque  $n = m$ .*

*Démonstration.* Supposons qu'un homéomorphisme  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  existe; en composant avec une translation, on peut supposer que  $f(0) = 0$ . On a alors un homéomorphisme  $\mathbf{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbf{R}^m - \{0\}$ , et donc ces deux espaces ont les mêmes groupes d'homologie.

Or,  $\mathbf{R}^n - \{0\}$  a le type d'homotopie de la sphère  $S^{n-1}$  (cf chapitre précédent), et on sait calculer les groupes d'homologie d'une sphère : on va voir dans les exercices que  $H_k(S^{n-1}) = \mathbf{F}_2$  si  $k = 0$  ou  $k = n - 1$ , et  $H_k(S^{n-1}) = 0$  pour les autres valeurs de  $k$ . Donc les groupes d'homologie déterminent le nombre  $n$ .  $\square$

# Exercices

## Complexes de chaînes

**Exercice 11** (Lemme des 5). Supposons donné un diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5 \\
 f_1 \downarrow \cong & & f_2 \downarrow \cong & & f_3 \downarrow & & f_4 \downarrow \cong & & f_5 \downarrow \cong \\
 B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_4 & \longrightarrow & B_5
 \end{array}$$

où on suppose que les carrés sont commutatifs ; en outre  $f_i$  est un isomorphisme pour  $i = 1, 2, 4, 5$ . Montrer que  $f_3$  est également un isomorphisme.

**Exercice 12.** Soient  $(C_*, \partial)$  et  $(C'_*, \partial')$  deux complexes de chaînes, et soit pour tout entier  $n$  une application  $f_n : C_n \rightarrow C'_n$ . On suppose que  $f_* \circ \partial = \partial' \circ f_*$ , c'est-à-dire que  $f_{n-1} \circ \partial_n = \partial'_n \circ f_n$  pour tout  $n$ . (Sans surprise, on dit que  $f_*$  est un *morphisme de complexes de chaînes*.)

Montrer que  $f_*$  induit un morphisme

$$H_n(f_*) : H_n(C_*) \rightarrow H_n(C'_*).$$

Montrer que si  $f_n$  est bijective pour tout  $n$ , alors  $H_n(f_*)$  est bijective pour tout  $n$ . Est-ce toujours vrai avec “injective” ou “surjective” au lieu de “bijective” ?

**Exercice 13** (Caractéristique d'Euler, suite). Soit  $C_*$  un complexe de  $k$ -espaces vectoriels, où  $k$  est un corps. On suppose que  $C'_i$  est non-nul seulement pour  $0 \leq i \leq N$ . On définit

$$\chi(C_*) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim_k C_i.$$

Ce nombre s'appelle la caractéristique d'Euler de  $C_*$ . Montrer que

$$\chi(C_*) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim_k H_i(C_*).$$

*Indication* : c'est une conséquence du théorème du rang, qui (en termes sophistiqués) affirme qu'en présence d'une suite exacte courte de  $k$ -espaces vectoriels

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

on a  $\dim_k B = \dim_k A + \dim_k C$ .

*Commentaire* : si  $\mathfrak{X}$  est un CW-complexe, alors la caractéristique d'Euler  $\chi(\mathfrak{X})$  telle qu'on l'a définie dans l'exercice 10 peut donc s'exprimer comme

$$\chi(\mathfrak{X}) = \sum_{i \geq 0} \dim_k H_i(\mathfrak{X}).$$

Lorsqu'on aura démontré que  $H_i(\mathfrak{X})$  ne dépend que de l'espace topologique  $|\mathfrak{X}|$ , on aura donc du même coup démontré que  $\chi(\mathfrak{X})$  ne dépend que de  $|\mathfrak{X}|$ ; on avait observé ceci sur des exemples.

**Exercice 14.** Trouver une formulation précise des affirmations suivantes, puis les démontrer à l'aide de la caractéristique d'Euler :

1. Si l'on recouvre un ballon de football avec des hexagones et des pentagones, de sorte que chaque sommet appartienne à 3 polygones, alors on a besoin précisément de 12 pentagones.
2. Il n'est pas possible de recouvrir un ballon de football avec seulement des hexagones, de telle sorte que chaque sommet appartienne à au moins 3 hexagones.



FIGURE 2.1 – On compte 6 pentagones en noir, combien de l'autre côté ?

## Homologie de CW-complexes

Dans les exercices qui suivent, on demande de calculer "l'homologie de l'espace  $X$ ". Cela signifie trouver un CW-complexe  $\mathfrak{X}$  tel que  $|\mathfrak{X}| = X$ , puis calculer (c'est-à-dire trouver la dimension de)  $H_n(\mathfrak{X})$  pour tout  $n$ . D'après le cours, ces groupes ne dépendent pas du choix de  $\mathfrak{X}$ .

**Exercice 15.** Calculer l'homologie de la sphère  $S^n$  pour tout  $n \geq 0$  (les cas  $n = 0$  et  $n = 1$  sont un tout petit peu à part au niveau du calcul (et encore), mais le résultat a la même apparence pour tout  $n$ ).

En déduire une version du théorème de Brouwer en dimension quelconque.

**Exercice 16.** Calculer l'homologie du disque  $D$  des nombres complexes de module  $\leq 1$ , d'abord en utilisant la décomposition en CW-complexe du cours. N'y a-t-il pas une méthode plus directe ?

Même question avec le ruban de Moebius.

**Exercice 17.** Calculer l'homologie du tore, de la bouteille de Klein, et de l'espace projectif  $\mathbf{R}P^2$ .

## Chapitre 3

# Catégories et foncteurs

Dans ce court chapitre nous introduisons le vocabulaire des *catégories*. C'est commode pour énoncer les propriétés de l'homologie, et d'autre part on s'en sert tout le temps en mathématiques.

**Définition 3.0.8.** Une *catégorie*  $\mathcal{C}$  est constituée de :

1. une collection  $ob(\mathcal{C})$  d'objets. On s'autorisera à écrire  $A \in ob(\mathcal{C})$  pour dire que  $A$  est l'un des objets de  $\mathcal{C}$ , alors même que  $ob(\mathcal{C})$  n'est pas forcément un ensemble (donc le symbole  $\in$ , en toute rigueur, ne devrait pas être employé...)
2. une collection d'ensembles  $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ , pour chaque  $A \in ob(\mathcal{C}), B \in ob(\mathcal{C})$ . On s'autorisera à écrire  $f : A \rightarrow B$  au lieu de  $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ , pour des raisons qui vont apparaître très vite.

On suppose de plus qu'on a des applications

$$Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \times Hom_{\mathcal{C}}(B, C) \rightarrow Hom_{\mathcal{C}}(A, C);$$

l'image de  $(f, g) \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \times Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$  est notée  $g \circ f$ . Les propriétés suivantes doivent être satisfaites :

- (associativité)  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ .
- (existence des identités) pour chaque  $A \in ob(\mathcal{C})$ , il existe un élément  $id_A \in Hom_{\mathcal{C}}(A, A)$  tel que  $f \circ id_A = f, id_A \circ g = g$ , pour tout  $f : A \rightarrow B$  et  $g : B \rightarrow A$ .

Les éléments de ensembles  $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$  seront appelés les *flèches* de  $\mathcal{C}$ , ou encore les *morphismes* de  $\mathcal{C}$ .

**Exemple 3.0.9.** La catégorie des ensembles. On prend  $ob(\mathcal{C}) =$  tous les ensembles (donc  $ob(\mathcal{C})$  n'est pas un ensemble lui-même, c'est bien connu!), et  $Hom_{\mathcal{C}}(A, B) =$  l'ensemble des toutes les fonctions de  $A$  vers  $B$ . L'opération  $\circ$  est la composition "normale" des fonctions.

**Exemple 3.0.10.** La catégorie des espaces vectoriels sur un corps donné  $k$ . On prend  $ob(\mathcal{C}) =$  les  $k$ -espaces vectoriels, et  $Hom_{\mathcal{C}}(E, F) = \mathcal{L}(E, F) =$  l'ensembles des applications *linéaires*  $E \rightarrow F$ .

**Exemple 3.0.11.** La catégorie des groupes,  $ob(\mathcal{C}) =$  les groupes,  $Hom_{\mathcal{C}}(G, H) =$  les homomorphismes de groupes. Variante possible : la catégorie des groupes abéliens, que l'on va noter  $\mathcal{Ab}$  dans la suite.

**Exemple 3.0.12.** La catégorie des espaces topologiques que l'on note  $\mathcal{T}op$  : on a sans surprise  $ob(\mathcal{T}op) =$  les espaces topologiques,  $Hom_{\mathcal{T}op}(X, Y) =$  les applications *continues* de  $X$  sur  $Y$ .

**Exemple 3.0.13.** La catégorie  $\mathcal{H}o\mathcal{T}op$ , pour laquelle  $ob(\mathcal{H}o\mathcal{T}op) = ob(\mathcal{T}op) =$  les espaces topologiques, et  $Hom_{\mathcal{H}o\mathcal{T}op}(X, Y) =$  les classes d'homotopie d'applications continues de  $X$  vers  $Y$ . La composition est induite par la composition normale des fonctions, c'est à dire  $[f] \circ [g] = [f \circ g]$ . D'après la proposition 1.3.7, cette opération est bien définie.

**Exemple 3.0.14.** Soit  $\mathcal{T}op^2$  la catégorie dont les objets sont les paires  $(X, A)$ , où  $X$  et  $A$  sont des espaces topologiques et  $A \subset X$ . Les morphismes dans  $Hom_{\mathcal{T}op^2}((X, A), (Y, B))$  sont les applications continues  $f : X \rightarrow Y$  telles que  $f(A) \subset B$ .

Il y a également une catégorie  $\mathcal{H}o\mathcal{T}op^2$  que le lecteur pourra expliciter. Pour ceci on a besoin de la notion d'homotopie entre deux applications  $f$  et  $g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  : il s'agit d'une homotopie  $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  telle que  $F(A \times [0, 1]) \subset B$ , et bien sûr  $F(x, 0) = f(x)$ ,  $F(x, 1) = g(x)$ .

**Définition 3.0.15.** Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  des catégories. Un *foncteur*  $F$ , ou *foncteur covariant*, entre  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$ , est une règle qui

- associe à  $A \in ob(\mathcal{C})$  un objet  $F(A) \in ob(\mathcal{D})$ ,
- associe à  $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$  un élément  $F(f) \in Hom_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$ .

On exige que  $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$  et  $F(id_A) = id_{F(A)}$ . La notation est généralement  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  comme pour une fonction.

Un *foncteur contravariant* de  $\mathcal{C}$  sur  $\mathcal{D}$  associe  $F(A)$  à  $A$  comme ci-dessus, mais associe à  $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$  un élément  $F(f) \in Hom_{\mathcal{D}}(F(B), F(A))$  (noter l'inversion de  $A$  et  $B$ ). On exige les mêmes compatibilités, donc ici  $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$  (noter l'inversion), et  $F(id_A) = id_{F(A)}$ . La notation est souvent  $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{D}$ .

(Pouvez-vous deviner la signification indépendante du symbole  $\mathcal{C}^{op}$  ?)

**Exemple 3.0.16.** Un premier exemple s'obtient en prenant  $\mathcal{C} = \mathcal{D} =$  les  $k$ -espaces vectoriels. On a alors un foncteur (covariant) défini par  $F(E) = E \oplus E$  et  $F(f) = f \oplus f$ .

On a aussi un foncteur contravariant défini par  $F(E) = E^*$ , le dual de  $E$ , et  $F(f) = f^*$ , la transposée de  $f$ .

**Exemple 3.0.17.** Il y a un foncteur  $F : \mathcal{T}op \rightarrow \mathcal{H}o\mathcal{T}op$  défini par  $F(X) = X$  et  $F(f) = [f]$ .

Il y a également un foncteur  $\mathcal{T}op \rightarrow \mathcal{T}op^2$  qui satisfait  $X \mapsto (X, \emptyset)$ .

**Exemple 3.0.18.** Il existe un foncteur contravariant de la catégorie  $\mathcal{T}op$  vers la catégorie des anneaux, donné par  $F(X) = C^0(X)$ , l'anneau des fonctions continues sur  $X$ .

**Exemple 3.0.19.** Pour ceux qui connaissent  $\pi_1$ , on peut le voir comme un foncteur de la catégorie des espaces topologiques munis d'un point-base (dont les morphismes sont les applications continues préservant les points-bases) vers la catégorie des groupes.

**Exemple 3.0.20.** Il existe un foncteur, noté  $\mathbf{GL}_n$ , de la catégorie des anneaux commutatifs vers la catégorie des groupes, tel que

$$\mathbf{GL}_n(A) = \{ \text{les matrices } n \times n \text{ inversibles à coefficients dans } A \}.$$

De la même manière, on a  $\mathbf{SL}_n$ ,  $\mathbf{O}_n$ , etc. Ces foncteurs sont des exemples de *schémas en groupes*.

Voici alors la version la plus sophistiquée de la promesse B.

**\*Théorème 3.0.21** (Promesse B, version foncteur). *Il existe pour chaque entier  $n \geq 0$  un foncteur*

$$H_n : \mathcal{H}o\mathcal{T}op \longrightarrow \mathcal{A}b.$$

*De plus, lorsque  $X = |\mathfrak{X}|$ , on a  $H_n(X) = H_n(\mathfrak{X})$ . En d'autres termes, lorsque  $X$  est la réalisation d'un CW-complexe  $\mathfrak{X}$ , on peut calculer le groupe  $H_n(X)$  à l'aide de la méthode exposée au §2.3.*

Une dernière définition :

**Définition 3.0.22.** Soit  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  des catégories, et soient  $F$  et  $G$  deux foncteurs  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ . Une *transformation naturelle*  $T$  entre  $F$  et  $G$  est la donnée d'un morphisme  $T_A : F(A) \rightarrow G(A)$  pour chaque objet  $A$  de  $\mathcal{C}$ , de telle façon que le diagramme ci-dessous commute, pour tout  $f : A \rightarrow B$  :

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{T_A} & G(A) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(B) & \xrightarrow{T_B} & G(B) \end{array}$$

**Exemple 3.0.23.** Soit  $F = \mathbf{GL}_n \times \mathbf{SL}_n$  et  $G = \mathbf{SL}_n$ . Alors on a une transformation naturelle

$$\begin{aligned} T_A : \mathbf{GL}_n(A) \times \mathbf{SL}_n(A) &\rightarrow \mathbf{SL}_n(A) \\ (P, M) &\mapsto P^{-1}MP. \end{aligned}$$

# Exercices

**Exercice 18.** Soit  $G$  un groupe quelconque. On note  $[G, G]$  le sous-groupe de  $G$  engendré par les *commutateurs*, c'est-à-dire les expressions de la forme  $xyx^{-1}y^{-1}$  avec  $x, y \in G$ . On note  $G^{ab} = G/[G, G]$ .

1. Montrer que si  $f : G \rightarrow A$  est un homomorphisme vers un groupe abélien  $A$ , alors on peut factoriser  $f$  en  $f = \bar{f} \circ p$ , où  $p : G \rightarrow G^{ab}$  est l'application quotient, et  $\bar{f} : G^{ab} \rightarrow A$  est un homomorphisme.
2. Montrer qu'on peut définir un foncteur  $G \mapsto G^{ab}$  (c'est-à-dire : préciser les catégories, indiquer ce que fait le foncteur sur les morphismes, vérifier les axiomes pour un foncteur).

**Exercice 19.** Soit  $k$  un anneau, et soit  $Mod_k$  la catégorie des  $k$ -modules. Soit également  $M$  un  $k$ -module fixé.

1. Montrer que l'on définit un foncteur contravariant  $Mod_k \rightarrow \mathcal{A}b$  par  $A \mapsto Hom_{Mod_k}(A, M)$  (donc mêmes questions que dans l'exercice précédent).
2. Montrer que, si on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

alors en appliquant le foncteur précédent on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow Hom(C, M) \longrightarrow Hom(B, M) \longrightarrow Hom(A, M).$$

(On dit que  $Hom(-, M)$  est (semi-) exact à gauche.)

3. Lorsque  $k$  est un corps, montrer que l'on obtient une suite exacte

$$0 \longrightarrow Hom(C, M) \longrightarrow Hom(B, M) \longrightarrow Hom(A, M) \longrightarrow 0.$$

(Dans ce cas on dit que le foncteur est exact.) Est-ce toujours vrai lorsque  $k$  n'est pas un corps ?

4. (Application : cohomologie.) Soit  $k$  un corps (par exemple  $k = \mathbf{F}_2$ ), et soit  $H_*(-; k)$  l'homologie ordinaire à coefficients dans  $k$ . Posons

$$H^n(X, A; k) = Hom_{Mod_k}(H_n(X, A; k), k),$$

c'est-à-dire que  $H^n(X, A; k)$  est le dual de  $H_n(X, A; k)$ . Vérifier que l'on obtient une cohomologie.

**Exercice 20.** On reprend les mêmes questions que dans l'exercice précédent, mais avec le foncteur qui au  $k$ -module  $A$  associe  $A \otimes_k M$ , pour un  $k$ -module  $M$  fixé. Donc :

1. Montrer que  $- \otimes_k M$  est un foncteur (détailler).

2. Montrer que si

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

est exacte, alors

$$A \otimes M \longrightarrow B \otimes M \longrightarrow C \otimes M \longrightarrow 0.$$

est exacte.

3. Lorsque  $k$  est un corps, montrer que l'on obtient une suite exacte

$$0 \longrightarrow A \otimes M \longrightarrow B \otimes M \longrightarrow C \otimes M \longrightarrow 0.$$

4. Montrer que ceci reste vrai pour  $k = \mathbf{Z}$  et  $M = \mathbf{Q}$ .

*Indication : on peut se ramener au cas où  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont finiment engendrés, et utiliser alors la classification des groupes abéliens de type fini.*

5. En déduire que l'on peut construire une homologie ordinaire à coefficients dans  $\mathbf{Q}$  si l'on en a construit une à coefficients dans  $\mathbf{Z}$ , en posant

$$H_n(X; \mathbf{Q}) := H_n(X; \mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}.$$

# Chapitre 4

## Les axiomes d'Eilenberg & Steenrod

### 4.1 Description axiomatique de l'homologie

Jusqu'à présent, nous avons vu comment calculer certains groupes  $H_n(\mathfrak{X})$  où  $\mathfrak{X}$  est un CW-complexe, et nous avons promis que c'était un cas particulier d'une théorie plus vaste, qui associe des groupes  $H_n(X)$  à n'importe quel *espace topologique*  $X$ . Au fur et à mesure, nous avons énoncé quelques propriétés de cette théorie générale (invariance par homotopie, etc...). Dans ce chapitre, nous allons finalement lister *toutes* les propriétés fondamentales que l'on exige d'une "théorie d'homologie". Le chapitre suivant va montrer qu'il en existe !

**Définition 4.1.1.** Une *théorie d'homologie*  $h_*(-)$  est une collection de foncteurs

$$h_n(-) : \mathcal{HoTop}^2 \rightarrow \mathcal{Ab},$$
$$(X, A) \mapsto h_n(X, A),$$

pour chaque  $n \in \mathbf{Z}$ , qui satisfait les axiomes suivants, dits axiomes d'Eilenberg et Steenrod. On va écrire  $h_n(X)$  pour  $h_n(X, \emptyset)$ .

1. (Axiome d'exactitude.) Lorsque  $A \subset X$ , il existe une suite exacte longue

$$\dots \xrightarrow{\partial_*} h_n(A) \xrightarrow{h_n(i)} h_n(X) \xrightarrow{h_n(j)} h_n(X, A) \xrightarrow{\partial_*} h_{n-1}(A) \longrightarrow \dots$$

Ici  $i : A \rightarrow X$  et  $j : (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$  sont les inclusions. Le morphisme  $\partial_*$  est "naturel", dans le sens où une application continue  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  donne un diagramme *commutatif*

$$\begin{array}{ccc} h_n(X, A) & \xrightarrow{\partial_*} & h_{n-1}(A) \\ h_n(f) \downarrow & & h_{n-1}(f) \downarrow \\ h_n(Y, B) & \xrightarrow{\partial_*} & h_{n-1}(B) \end{array}$$

2. (Axiome d'excision.) Étant donnée une paire  $(X, A)$  et un ouvert  $U$  de  $X$  tel que  $\bar{U} \subset \text{int}(A)$ , l'inclusion  $(X - U, A - U) \rightarrow (X, A)$  donne un isomorphisme pour tout  $n$  :

$$h_n(X - U, A - U) \xrightarrow{\cong} h_n(X, A).$$

3. (Axiome d'additivité.) Si  $(X_i)_{i \in I}$  est une famille (éventuellement infinie) d'espaces topologiques, et si  $X = \coprod_i X_i$  (réunion disjointe), alors les inclusions  $X_i \rightarrow X$  donnent un isomorphisme

$$\bigoplus_{i \in I} h_n(X_i) \xrightarrow{\cong} h_n(X).$$

En toute généralité, c'est la fin de la définition. Cependant, dans ce premier cours, on va s'intéresser presque exclusivement à des homologies particulièrement simples, qui ont des propriétés supplémentaires.

Soit donc  $G$  un groupe abélien. On dit que  $h_*(-)$  est une *homologie ordinaire à coefficients dans  $G$*  lorsque l'on a également les deux propriétés suivantes :

4. (Axiome de la dimension.) Écrivons  $pt$  pour l'espace réduit à un point. Alors  $h_n(pt) = 0$  pour  $n > 0$ , et  $h_0(pt) = G$ .
5. Lorsque  $G = k$  est un anneau, les groupes  $h_n(X, A)$  sont des modules sur  $k$ , et en fait le foncteur  $h_*(-)$  est à valeurs dans la catégorie des  $k$ -modules.

**\*Théorème 4.1.2.** *Pour chaque groupe abélien  $G$ , il existe une homologie ordinaire à coefficients dans  $G$ . Elle est essentiellement unique, et on la note  $H_*(-; G)$ .*

Le lecteur s'attendait peut-être à ce que cet énoncé ajoute : pour  $G = \mathbf{F}_2$ , et lorsque  $X = |\mathfrak{X}|$  pour un CW-complexe  $\mathfrak{X}$ , on a un isomorphisme  $H_n(X; G) = H_n(\mathfrak{X})$  (le membre de droite étant notre définition très simple du §2.3). C'est en effet le cas ! Cependant, il est remarquable que cet ajout est *redondant* : l'énoncé de 4.1.2 suffit pour démontrer l'existence d'un isomorphisme  $H_n(X; \mathbf{F}_2) = H_n(\mathfrak{X})$ .

En d'autres termes, si une théorie de l'homologie à coefficients dans  $\mathbf{F}_2$  existe, les valeurs qu'elle prend sur les CW-complexes sont complètement déterminées. C'est cette espèce "d'unicité" que l'on va étudier dans le chapitre suivant (on aura également un énoncé pour  $G$  quelconque).

Nous devons commencer par quelques points un peu techniques, qui vont notamment élucider l'homologie "relative"  $H_n(X, A; G)$  que nous n'avons pas encore rencontrée, ainsi que l'axiome d'excision qui peut paraître surprenant au premier abord.

## 4.2 Homologie réduite

Commençons par un petit lemme algébrique.

**Lemme 4.2.1.** *Soit  $A$  et  $B$  des groupes abéliens, avec un diagramme*

$$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} A$$

tel que  $\pi \circ i = id_A$ . Alors il existe une décomposition de  $B$  de la forme  $B \cong A \oplus \ker \pi$ . De plus si on identifie  $B$  à  $A \oplus \ker \pi$ , alors  $i$  s'identifie à l'inclusion de  $A$ , et  $\pi$  à la projection sur  $A$  parallèlement à  $\ker \pi$ .

*Démonstration.* Il est clair que  $i$  est injective et  $\pi$  est surjective. Soit  $p = i \circ \pi : B \rightarrow B$ . On voit immédiatement que  $p \circ p = p$ , d'où une décomposition  $B = \ker(p) \oplus \mathcal{I}m(p)$ . L'image de  $p$  est isomorphe à  $A$ .  $\square$

Appliquons ceci à une situation très simple : on prend un espace  $X$ , et un point préféré  $x_0 \in X$ . On a des applications continues évidentes

$$\{x_0\} \longrightarrow X \longrightarrow \{x_0\},$$

dont la composition est l'identité de  $\{x_0\}$ . Si on se donne une homologie  $h_*(-)$ , on a donc un diagramme comme dans le lemme

$$h_*(\{x_0\}) \longrightarrow h_*(X) \longrightarrow h_*(\{x_0\}).$$

Par ce lemme, on a

$$h_*(X) = h_*(\{x_0\}) \oplus \tilde{h}_*(X),$$

où on a noté

$$\tilde{h}_*(X) = \ker(h_*(X) \rightarrow h_*(\{x_0\})).$$

**Définition 4.2.2.** Le groupe  $\tilde{h}_n(X)$  s'appelle le  $n$ -ième groupe d'homologie réduite de  $X$ .

**Remarque 4.2.3.** On notera que l'on aurait pu aussi bien définir ce groupe par  $\tilde{h}_n(X) = h_n(X)/h_n(\{x_0\})$ , mais c'est moins canonique : pour voir  $h_n(\{x_0\})$  comme un sous-groupe de  $h_n(X)$ , il faut choisir un point  $x_0$  dans  $X$ , un peu au hasard ; alors que l'application  $X \rightarrow \{x_0\}$ , qui va de  $X$  vers l'unique espace réduit à un élément, est canonique.

Pourquoi s'embêter à définir encore une chose supplémentaire ? Tout simplement parce que la décomposition  $h_*(X) = h_*(\{x_0\}) \oplus \tilde{h}_*(X)$  montre que  $\tilde{h}_*(X)$  est la partie "importante" de  $h_*(X)$ , alors que la partie  $h_*(\{x_0\})$  se retrouve dans l'homologie de *tous* les espaces, et donc ne contient pas d'information sur  $X$ .

Quoiqu'il en soit, nous sommes intéressés en premier lieu par le cas d'une homologie ordinaire  $h_*(-) = H_*(-; G)$ , et dans ce cas on a  $H_n(\{x_0\}; G) = 0$  si  $n > 0$ , et  $H_0(\{x_0\}; G) = G$ . Donc  $\tilde{H}_n(X; G) = H_n(X; G)$  sauf pour  $n = 0$  où on a  $\tilde{H}_0(X; G) = G \oplus \tilde{H}_n(X; G)$ .

La différence est donc minime, et pourtant on va voir qu'il est déjà plus agréable de travailler avec l'homologie réduite, qui "fait apparaître plus de 0 dans les suites exactes".

**Proposition 4.2.4.** Soit  $h_*(-)$  une homologie.

1. On a un isomorphisme  $\tilde{h}_*(X) = h_*(X, \{x_0\})$ .
2. Soit  $A \subset X$ , alors on a une suite exacte longue :

$$\cdots \rightarrow \tilde{h}_n(A) \rightarrow \tilde{h}_n(X) \rightarrow h_n(X, A) \rightarrow \tilde{h}_{n-1}(A) \rightarrow \cdots$$

*Démonstration.* Le point (1) est une conséquence du point (2), en prenant  $A = \{x_0\}$  (car l'homologie réduite d'un point est 0). Pour montrer le point (2), on part de la suite exacte longue en homologie non réduite, et on se sert du lemme ci-dessus.  $\square$

### 4.3 Homologie relative et excision

Les nouveautés les plus surprenantes dans la définition d'une "homologie" sont sans doute l'apparition de l'homologie relative  $H_n(X, A; G)$  et l'axiome d'excision. Nous allons voir comment l'axiome d'excision permet, en réalité, de ramener l'homologie relative à l'homologie "normale" dans de nombreux cas (et ensuite, si l'on veut, on peut essentiellement se passer de cet axiome).

En fait on veut aboutir au résultat suivant :

**Théorème 4.3.1.** *Soit  $X$  la réalisation d'un CW-complexe, et soit  $A \subset X$  la réalisation d'un sous-complexe. Soit  $h_*(-)$  une homologie. Alors on a un isomorphisme*

$$h_n(X, A) = \tilde{h}_n(X/A).$$

On va montrer ça en plusieurs étapes.

**Définition 4.3.2.** Soit  $A$  une partie fermée de  $X$ . On dit qu'il existe une *rétraction forte* de  $X$  sur  $A$  lorsqu'il existe une application

$$F : X \times [0, 1] \longrightarrow X$$

telle que  $F(x, 0) = x$ ,  $F(x, 1) \in A$ , et  $F(a, t) = a$  pour tout  $a \in A$  et  $t \in [0, 1]$ .

(En particulier, ceci montre que l'inclusion  $A \rightarrow X$  est une équivalence d'homotopie ; mais c'est plus fort).

**Proposition 4.3.3.** *Soit  $h_*(-)$  une homologie (pas forcément ordinaire), soit  $A$  un fermé de  $X$ , et soient  $U$  et  $V$  des ouverts de  $X$  tels que*

$$A \subset U \subset \bar{U} \subset V.$$

*On suppose qu'il existe une rétraction forte de  $V$  sur  $A$ .*

*Alors il existe un isomorphisme*

$$h_n(X, A) = \tilde{h}_n(X/A).$$

*Démonstration.* Considérons l'inclusion  $(X, A) \rightarrow (X, V)$ . Comme  $A \rightarrow V$  est une équivalence d'homotopie, on a des isomorphismes  $h_n(A) = h_n(V)$ . Écrivons les suites exactes longues associées à  $(X, A)$  et  $(X, V)$ , et les morphismes entre les deux :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & h_n(A) & \longrightarrow & h_n(X) & \longrightarrow & h_n(X, A) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & h_n(V) & \longrightarrow & h_n(X) & \longrightarrow & h_n(X, V) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

On voit que  $h_n(X, A) = h_n(X, V)$  grâce au lemme des 5 (pour tout  $n$ ). Prati- quons enfin une excision de  $U$  : on obtient  $h_n(X, A) = h_n(X - U, V - U)$ .

Faisons maintenant le même raisonnement en remplaçant  $X$  par  $Y = X/A$ , puis  $A$  par le point  $\{*\}$  de  $Y$  correspondant, et enfin  $U$  et  $V$  par leurs images ouvertes  $U'$  et  $V'$  dans  $Y$ . Il est clair qu'il y a une rétraction forte de  $V'$  sur  $\{*\}$ . Donc le même argument fonctionne, et montre que  $h_n(Y, *) = h_n(Y, V')$ , puis une excision montre  $h_n(Y, *) = h_n(Y - U', V' - U')$ .

Pour finir, on constate immédiatement qu'il y a un homéomorphisme entre la paire  $(X - U, V - U)$  et la paire  $(Y - U', V' - U')$ . Donc ces paires ont la même homologie, et on conclut bien que  $h_n(X, A) = h_n(Y, *)$ .  $\square$

Pour montrer le théorème, il suffit donc d'établir :

**Lemme 4.3.4.** *Soit  $A$  un sous-complexe du CW-complexe  $X$ . Alors  $U$  et  $V$  existent, comme dans la proposition.*

*Démonstration.* Par récurrence sur la dimension. Laissé en exercice.  $\square$

**Corollaire 4.3.5.** *Soit  $A$  et  $X$  comme dans la proposition. Alors on a une suite exacte longue*

$$\cdots \rightarrow \tilde{h}_n(A) \rightarrow \tilde{h}_n(X) \rightarrow \tilde{h}_n(X/A) \rightarrow \tilde{h}_{n-1}(A) \rightarrow \cdots$$

Il est étonnant de constater qu'on a fait suffisamment de travail pour calculer complètement l'homologie (quelconque) d'une sphère (de n'importe quelle dimension)! Voici le résultat :

**Théorème 4.3.6.** *Soit  $h_*(-)$  une homologie. Alors on a*

$$\tilde{h}_k(S^n) = h_{k-n}(pt),$$

où  $pt$  désigne l'espace réduit à un point. En particulier pour l'homologie ordinaire à coefficients dans  $G$  on a pour  $n \geq 1$  :

$$H_k(S^n; G) = \begin{cases} G & \text{si } k = n \text{ ou } k = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Démonstration.* Par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 0$ , l'espace  $S^0$  est réduit à deux points, et en utilisant l'axiome d'additivité on trouve facilement le résultat (laissé en exercice), à savoir  $\tilde{h}_*(S^0) = h_*(pt)$ .

Pour procéder par récurrence, on utilise le fait que  $S^n$  est un sous-espace de la boule  $B^{n+1}$ , qui est contractile, et de plus le quotient  $B^{n+1}/S^n$  peut être identifié à  $S^{n+1}$  (cf exercices).

On peut visiblement utiliser le corollaire 4.3.5, et il vient

$$0 \longrightarrow \tilde{h}_{k+1}(S^{n+1}) \longrightarrow \tilde{h}_k(S^n) \longrightarrow 0,$$

puisque l'homologie réduite de  $B^{n+1}$  est 0. On a donc un isomorphisme  $\tilde{h}_{k+1}(S^{n+1}) = \tilde{h}_k(S^n)$ .  $\square$

## 4.4 Cohomologie

Il existe une notion plus ou moins "duale" de *cohomologie*. Commençons par en donner la définition : c'est essentiellement la même chose qu'une homologie, mais avec les flèches à l'envers!

**Définition 4.4.1.** Une *théorie de cohomologie*  $h^*(-)$  est une collection de foncteurs *contravariants*

$$\begin{aligned} h^n(-) : \mathcal{HoTop}^2 &\rightarrow \mathcal{Ab}, \\ (X, A) &\mapsto h^n(X, A), \end{aligned}$$

pour chaque  $n \in \mathbf{Z}$ , qui satisfait les axiomes suivants. On va écrire  $h^n(X)$  pour  $h^n(X, \emptyset)$ .

1. (Axiome d'exactitude.) Lorsque  $A \subset X$ , il existe une suite exacte longue

$$\dots \xleftarrow{\partial_*} h^n(A) \xleftarrow{h^n(i)} h^n(X) \xleftarrow{h^n(j)} h^n(X, A) \xleftarrow{\partial_*} h^{n-1}(A) \xleftarrow{\quad} \dots$$

Ici  $i : A \rightarrow X$  et  $j : (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$  sont les inclusions. Le morphisme  $\partial_*$  est "naturel", dans le sens évident.

2. (Axiome d'excision.) Étant donnée une paire  $(X, A)$  et un ouvert  $U$  de  $X$  tel que  $\bar{U} \subset \text{int}(A)$ , l'inclusion  $(X - U, A - U) \rightarrow (X, A)$  donne un isomorphisme pour tout  $n$  :

$$h^n(X, A) \xrightarrow{\cong} h^n(X - U, A - U).$$

3. (Axiome d'additivité.) Si  $(X_i)_{i \in I}$  est une famille (éventuellement infinie) d'espaces topologiques, et si  $X = \coprod_i X_i$  (réunion disjointe), alors les inclusions  $X_i \rightarrow X$  donnent un isomorphisme

$$h^n(X) \xrightarrow{\cong} \prod_{i \in I} h^n(X_i).$$

Soit  $G$  un groupe abélien. On dit que  $h^*(-)$  est une *cohomologie ordinaire à coefficients dans  $G$*  lorsque l'on a également les deux propriétés suivantes :

4. (Axiome de la dimension.)  $h^n(pt) = 0$  pour  $n > 0$ , et  $h^0(pt) = G$ .  
 5. Lorsque  $G = k$  est un anneau, les groupes  $h^n(X, A)$  sont des modules sur  $k$ , et en fait le foncteur  $h^*(-)$  est à valeurs dans la catégorie des  $k$ -modules.

**Exemple 4.4.2.** Soit  $k$  un corps, et soit  $H_*(-; k)$  une homologie ordinaire à coefficients dans  $k$ . Posons alors

$$H^n(X, A; k) = \text{Hom}_k(H_n(X, A; k), k),$$

c'est-à-dire qu'on prend le dual. Alors  $H^*(-; k)$  est une cohomologie (ceci sera prouvé dans l'exercice 19).

*Ça ne marcherait pas pour  $k = \mathbf{Z}$ .*

On peut se demander l'intérêt de considérer ces deux notions duales. En fait, la cohomologie est une chose plus précise que l'homologie, pour la raison suivante : lorsque  $k$  est un anneau, nous allons voir qu'il existe une *multiplication*

$$H^p(X; k) \times H^q(X; k) \rightarrow H^{p+q}(X; k),$$

et ainsi en prenant

$$H^\bullet(X; k) = \bigoplus_{n \geq 0} H^n(X; k)$$

on obtient un *anneau* ! Dans les exercices de ce chapitre on va donner une première idée de la construction, qui dépend de la topologie de  $X \times X$ .

**Théorème 4.4.3.** *Tous les résultats de ce chapitre concernant l'homologie sont vraies pour la cohomologie. Ceci inclut : existence de la cohomologie réduite*

$$\tilde{h}^n(X) = \text{coker}(h^n(pt) \rightarrow h^n(X)),$$

*suite exacte longue en cohomologie réduite, cohomologie relative en fonction de la cohomologie réduite du quotient, calcul de la cohomologie des sphères :*

$$\tilde{h}^k(S^n) = h^{k-n}(pt),$$

*où pt désigne l'espace réduit à un point. En particulier pour la cohomologie ordinaire à coefficients dans  $G$  on a pour  $n \geq 1$  :*

$$H^k(S^n; G) = \begin{cases} G & \text{si } k = n \text{ ou } k = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

# Exercices

**Exercice 21.** (Suite exacte longue d'un triplet.)

Considérons le diagramme commutatif de la figure 4.1, dit "diagramme en tresse"; il devrait normalement être suffisamment parlant, mais voici quand même quelques détails. Pour chaque entier  $n$ , on suppose donc que l'on a trois groupes abéliens  $A(n)$ ,  $B(n)$  et  $C(n)$ , et on suppose également que l'on a des suites d'homomorphismes de la forme

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow A(n) \rightarrow B(n) \rightarrow C(n-1) \rightarrow C(n-2) \rightarrow B(n-2) \rightarrow A(n-3) \\ \rightarrow A(n-4) \rightarrow B(n-4) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

On a quatre suites de la sorte : l'une fait intervenir un homomorphisme  $A(n) \rightarrow B(n)$  pour  $n$  divisible par 4, une autre fait intervenir  $A(n) \rightarrow B(n)$  pour les  $n$  de la forme  $4m+1$ , les deux autres pour  $n = 4m+2$  et  $n = 4m+3$  respectivement.

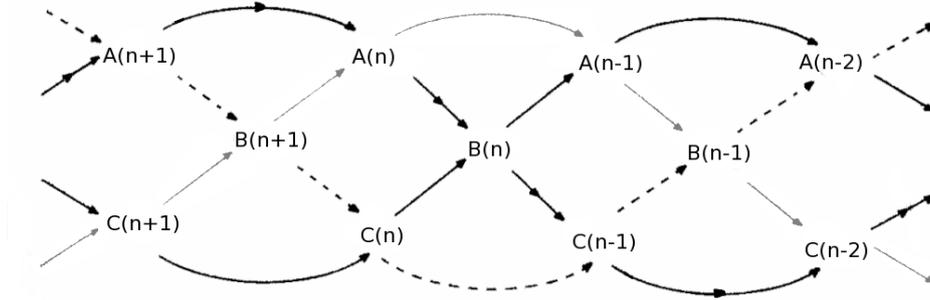


FIGURE 4.1 – Un diagramme commutatif avec quatre suites d'homomorphismes : en trait plein, en pointillé, en grisé, et en flèches doubles.

1. Montrer le lemme de Wall : supposons que trois des suites soient exactes, et que la quatrième soit un complexe de chaînes (c'est-à-dire que la composition de deux flèches est 0). Alors la quatrième est également exacte.
2. Soit  $h_*(-)$  une homologie, et soient  $B \subset A \subset X$ . Montrer qu'il existe une suite exacte longue de la forme

$$\cdots \rightarrow h_n(A, B) \rightarrow h_n(X, B) \rightarrow h_n(X, A) \rightarrow h_{n-1}(A, B) \rightarrow \cdots$$

*Indication : écrire les suites exactes longues correspondant aux paires  $(A, B)$ ,  $(X, A)$  et  $(X, B)$ . Ceci donne les trois premières tresse d'un diagramme, la quatrième est la suite voulue.*

**Exercice 22.** (Suite de Mayer-Vietoris)

Soit  $h_*(-)$  une homologie. Dans cet exercice on va établir la suite exacte de Mayer-Vietoris, qui existe presque à chaque fois qu'on choisit, pour un espace  $X$  donné, deux sous-espaces  $A$  et  $B$  tels que  $A \cup B = X$ . Elle permet dans les cas les plus faciles de retrouver  $h_*(X)$  à partir de  $h_*(A)$  et  $h_*(B)$ .

Il existe plusieurs variantes de théorèmes affirmant que cette suite exacte existe bel et bien, sous différentes hypothèses sur  $A$  et  $B$ . Ici nous prendrons l'hypothèse assez minimale suivante : on suppose que les applications

$$h_*(A, A \cap B) \longrightarrow h_*(X, B)$$

et

$$h_*(B, A \cap B) \longrightarrow h_*(X, A),$$

induites par les inclusions  $(A, A \cap B) \rightarrow (X, B)$  et  $(B, A \cap B) \rightarrow (X, A)$ , sont des isomorphismes.

1. Montrer que, lorsque  $X$  est (la réalisation d') un CW-complexe et que  $A$  et  $B$  sont des sous-complexes tels que  $X = A \cup B$ , alors les hypothèses ci-dessus sont satisfaites.
2. En considérant les quatre suites exactes longues associées aux paires  $(X, A)$ ,  $(X, B)$ ,  $(A, A \cap B)$  et  $(B, A \cap B)$ , et en tenant compte des hypothèses, montrer que l'on obtient un diagramme en tresse comme sur la figure 4.2.

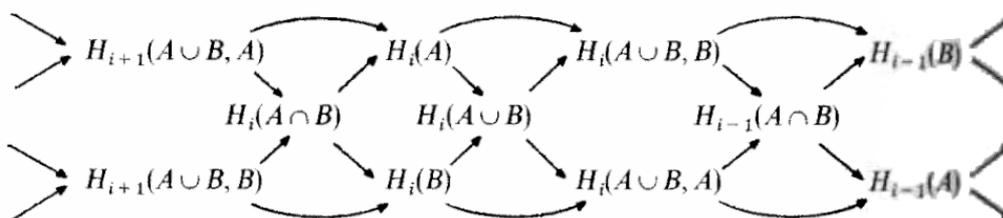


FIGURE 4.2 – Le diagramme en tresse qui donne Mayer-Vietoris.

3. Soit  $i_A : A \cap B \rightarrow A$ ,  $i_B : A \cap B \rightarrow B$ ,  $j_A : A \rightarrow X$  et  $j_B : B \rightarrow X$  les inclusions. En regardant la figure 4.2 suffisamment longtemps, montrer qu'on a une suite exacte

$$\dots \rightarrow h_n(A \cap B) \xrightarrow{h_n(i_A) \oplus h_n(i_B)} h_n(A) \oplus h_n(B) \xrightarrow{h_n(j_A) - h_n(j_B)} h_n(X) \rightarrow h_{n-1}(A \cap B) \rightarrow \dots$$

C'est cette suite exacte qu'on appelle suite de Mayer-Vietoris. On va voir des exemples de calculs dans l'exercice suivant.

4. Supposons que l'on ait un espace  $X'$  et deux sous-espaces  $A'$  et  $B'$  de  $X'$ , tels qu'on ait une suite de Mayer-Vietoris; supposons également que  $f : X \rightarrow X'$  soit telle que  $f(A) \subset A'$ ,  $f(B) \subset B'$ . Vérifier qu'on a un diagramme commutatif entre les deux suites de Mayer-Vietoris.
5. À l'aide de la question précédente, ou autrement, montrer que si  $A \cap B \neq \emptyset$ , alors on a une suite de Mayer-Vietoris en homologie réduite.

Cette suite "réduite" est bien plus utile que l'autre ! C'est l'un des intérêts de l'homologie réduite.

- Exercice 23.** 1. Soient  $X$  et  $Y$  des espaces topologiques. Calculer l'homologie de l'union disjointe  $X \amalg Y$  à l'aide de la suite de Mayer-Vietoris. (*Combien vaut l'homologie de l'ensemble vide? En fait, 0. Ca peut se démontrer à partir des axiomes, et ça n'a rien de très intéressant...*)
2. Soient  $X$  et  $Y$  des CW-complexes, et soient  $x \in X, y \in Y$  des 0-cellules. On considère maintenant l'union pointée  $X \vee Y$  (cf première feuille d'exercices), et les inclusions  $i : X \rightarrow X \vee Y$  et  $j : Y \rightarrow X \vee Y$ . En utilisant la suite de Mayer-Vietoris réduite, montrer que  $h_*(i)$  et  $h_*(j)$  donnent un isomorphisme

$$\tilde{h}_n(X \vee Y) = \tilde{h}_n(X) \oplus \tilde{h}_n(Y).$$

3. Soit  $X$  un CW-complexe et pour tout entier  $n$ , soit  $X_n$  le  $n$ -squelette. Décrire l'espace  $X_n/X_{n-1}$  et calculer son  $h_*(-)$ .

- Exercice 24.** 1. En utilisant la suite de Mayer-Vietoris, montrer que l'homologie réduite de la suspension  $SX$  de l'espace  $X$  est donnée par

$$\tilde{h}_n(SX) = \tilde{h}_{n-1}(X).$$

2. Utiliser ce résultat pour recalculer l'homologie d'une sphère  $S^n$  par récurrence.

## Cohomologie et produits

Dans cette série d'exercices on va regarder un peu l'homologie d'un produit, c'est-à-dire  $H_*(X \times Y)$ , connaissant  $H_*(X)$  et  $H_*(Y)$ . On va en déduire qu'il existe une multiplication sur la cohomologie.

Il y a un frein sérieux à cette entreprise : c'est l'exercice 26, pour lequel il est difficile de rédiger une solution complète avec tous les détails. Son but est de développer l'intuition.

Plus tard dans le cours, on étudiera l'homologie de  $X \times Y$ , ainsi que la multiplication en cohomologie, avec des méthodes plus abstraites, mais finalement bien plus faciles à mettre en oeuvre.

**Exercice 25.** (Produit tensoriel de complexes.)

Lorsque  $(C_*, \partial_1)$  et  $(D_*, \partial_2)$  sont deux complexes de chaînes sur un anneau  $k$ , on définit leur produit tensoriel  $C_* \otimes D_*$  par :

$$(C_* \otimes D_*)_n = \bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes D_q,$$

muni de  $\partial(x \otimes y) = \partial_1(x) \otimes y + (-1)^i x \otimes \partial_2(y)$ , où  $x \in C_i$  et  $y \in C_j$ .

Vérifier que  $\partial \circ \partial = 0$ , puis construire une application "naturelle"

$$\bigoplus_{p+q=n} H_p(C_*) \otimes H_q(D_*) \longrightarrow H_n(C_* \otimes D_*).$$

*Commentaire :* le théorème de Künneth affirme que cette application est un isomorphisme lorsque  $k$  est un corps. Nous le montrerons plus tard.

**Exercice 26.** (CW-complexe produit.)

Soient donc  $\mathfrak{X}$  et  $\mathfrak{Y}$  des CW-complexes (finis).

(1) Montrer qu'il existe un CW-complexe  $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$  tel que  $|\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}| = |\mathfrak{X}| \times |\mathfrak{Y}|$ .

(2) On suppose que  $\mathfrak{X}$  et  $\mathfrak{Y}$  sont réguliers, et en plus on suppose que les 1-cellules ont des extrémités distinctes (pas de "lacet"). Montrer que  $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$  est régulier et que

$$C_*(\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}) = C_*(\mathfrak{X}) \otimes C_*(\mathfrak{Y})$$

au sens de l'exercice précédent.

Il est déjà bien suffisant de se convaincre de ces résultats sur un dessin, par exemple avec  $X = S^1$  et  $Y = [0, 1]$ .

*Commentaire* : en combinant ça avec l'exercice précédent (théorème de Künneth) on obtient :

$$H_n(X \times Y) = \bigoplus_{p+q=n} H_p(X) \otimes H_q(Y)$$

avec  $X = |\mathfrak{X}|$  et  $Y = |\mathfrak{Y}|$ . C'est la "version topologique" du théorème de Künneth, et on va la démontrer de manière bien plus simple dans le cours.

**Exercice 27.** (Cochâînes.)

Soit  $(C_*, \partial)$  un complexe de chaînes sur un anneau  $k$ . On définit

$$C^n = \text{Hom}_k(C_n, k),$$

et  $d_n : C^n \rightarrow C^{n+1}$  par  $d_n(\phi) = \phi \circ \partial_{n+1}$ .

Vérifier que  $d \circ d = 0$ .

Montrer que, si  $k$  est un corps, il y a un isomorphisme

$$\frac{\ker(d_n)}{\mathcal{I}m(d_{n-1})} = \text{Hom}_k(H_n(C_*), k).$$

*Commentaire* : le module  $\ker(d_n)/\mathcal{I}m(d_{n-1})$  est souvent appelé le  $n$ -ième groupe de *cohomologie* de  $C_*$ . On va le noter  $H^n(C_*)$  (avec le  $n$  en haut). De plus, la paire  $(C^*, d_*)$  est parfois appelée un complexe de "cochaînes". Toutefois, en posant  $D_n = C^{-n}$  et  $\partial'_n = d_{-n}$ , on obtient un complexe de chaînes  $(D_*, \partial')$ , et de plus son homologie est la cohomologie de  $C_*$ . Donc "chaînes" et "cochaînes" sont des choses équivalentes, à renumérotation près.

**Exercice 28.** (Structure multiplicative sur la cohomologie.)

Pour un CW-complexe  $\mathfrak{X}$ , définissons sa cohomologie comme

$$H^n(\mathfrak{X}) = \text{Hom}_{\mathbf{F}_2}(H_n(\mathfrak{X}), \mathbf{F}_2).$$

Soient  $\mathfrak{X}$  et  $\mathfrak{Y}$  deux CW-complexes, et soit  $D_* = C_*(\mathfrak{X}) \otimes C_*(\mathfrak{Y})$  (comme dans l'exercice 25).

Construire une application

$$H^p(\mathfrak{X}) \otimes H^q(\mathfrak{Y}) \rightarrow H^{p+q}(D_*).$$

Ici à droite on a la cohomologie du complexe, comme dans l'exercice 27 (qui est d'ailleurs très utile ici).

*Correction.* Notons  $Z_n$  et  $B_n$  les cycles et les bords dans le complexe  $D_*$ , de sorte que l'homologie en degré  $n$  est  $Z_n/B_n$ .

On utilise l'exercice 27 une première fois, pour observer que  $H^n(\mathfrak{X})$  est la cohomologie du complexe de cochaînes qui en degré  $n$  est donné par  $C^n(\mathfrak{X}) = \text{Hom}(C_n(\mathfrak{X}), \mathbf{F}_2)$ . Pareil pour  $\mathfrak{Y}$ .

Prenons donc  $\alpha \in C^p(\mathfrak{X})$  et  $\beta \in C^q(\mathfrak{Y})$ . On note  $\alpha \otimes \beta$  l'application (avec  $n = p + q$ ) :

$$D_n \longrightarrow \mathbf{F}_2$$

qui envoie  $\sigma \otimes \tau$  sur  $\alpha(\sigma)\beta(\tau)$  si  $\sigma$  est de degré  $p$  et  $\tau$  est de degré  $q$ ; dans les cas contraires  $\alpha \otimes \beta(\sigma \otimes \tau) = 0$ .

Si  $\alpha = d(c)$ , alors  $\alpha(\sigma) = c(\partial\sigma)$  par définition. On a alors  $\alpha \otimes \beta = c \otimes \beta \circ (\partial \otimes id)$ . Mais alors, si on prend  $x \in Z_n$ , on a  $(\partial \otimes id)(x) = \pm(id \otimes \partial)(x)$  (et comme on est en caractéristique 2 le signe ne compte pas de toute façon). Du coup si  $\beta$  vaut zéro sur les bords, ie si  $d(b) = 0$ , on a

$$\alpha \otimes \beta(x) = c \otimes \beta(id \otimes \partial)(x) = 0.$$

En inversant les rôles de  $\alpha$  et  $\beta$ , on conclut la chose suivante : si  $\alpha$  et  $\beta$  sont des cocycles, alors  $\alpha \otimes \beta$  ne dépend que des classes de cohomologie de  $\alpha$  et  $\beta$ , comme application  $Z_n \rightarrow \mathbf{F}_2$ .

Enfin, sous ces hypothèses on a  $\alpha \otimes \beta \circ (\partial \otimes id) = 0$  et  $\alpha \otimes \beta \circ (id \otimes \partial) = 0$ , et donc à plus forte raison  $\alpha \otimes \beta$  vaut zéro sur  $B_n$ . Finalement

$$\alpha \otimes \beta: Z_n/B_n \longrightarrow \mathbf{F}_2$$

est bien définie, et par l'exercice 27 on constate qu'on a fini.

*Commentaire* : si l'on croit au résultat de l'exercice 26, on voit que l'on a une application

$$H^p(X) \otimes H^q(Y) \longrightarrow H^{p+q}(X \times Y),$$

pour  $X = |\mathfrak{X}|$  et  $Y = |\mathfrak{Y}|$ . C'est une version en cohomologie de l'exercice 25, et là encore il y a une version du théorème de Künneth qui affirme qu'il s'agit d'un isomorphisme.

Mais il y a bien plus ! En effet, prenons  $X = Y$ . On a l'application diagonale  $\Delta : X \rightarrow X \times X$  définie par  $x \mapsto (x, x)$ . Puisque  $H^*(-)$  est un foncteur sur les espaces topologiques (nous finirons par le montrer), on peut regarder l'application induite :

$$H^n(\Delta) : H^n(X \times X) \rightarrow H^n(X).$$

En combinant ceci avec l'application construite dans l'exercice, on obtient une multiplication

$$H^p(X) \otimes H^q(X) \longrightarrow H^{p+q}(X).$$

On l'appelle le *cup-produit*. C'est la motivation pour étudier la cohomologie et non l'homologie.

# Chapitre 5

## Unicité de l'homologie

### 5.1 Premier théorème d'unicité

**Définition 5.1.1.** Soit  $h_*(-)$  et  $h'_*(-)$  deux homologies. Un *morphisme* entre  $h_*(-)$  et  $h'_*(-)$  est la donnée d'un homomorphisme  $h_*(X, A) \rightarrow h'_*(X, A)$  pour chaque paire  $(X, A)$ , de manière à avoir les compatibilités suivantes :

1. le diagramme suivant doit être commutatif :

$$\begin{array}{ccc} h_*(X, A) & \longrightarrow & h'_*(X, A) \\ h_*(f) \downarrow & & h'_*(f) \downarrow \\ h_*(Y, B) & \longrightarrow & h'_*(Y, B) \end{array}$$

pour chaque application continue  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ .

2. le diagramme suivant doit être commutatif :

$$\begin{array}{ccc} h_*(X, A) & \xrightarrow{\partial_*} & h_*(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ h'_*(X, A) & \xrightarrow{\partial_*} & h'_*(A) \end{array}$$

pour toute paire  $(X, A)$ .

On a alors le résultat suivant, qui est un premier pas vers la conviction que l'homologie des CW-complexes est "uniquement déterminée". On verra bien mieux plus tard.

**Théorème 5.1.2.** Soit  $h_*(-) \rightarrow h'_*(-)$  un morphisme entre deux homologies. Si on obtient un isomorphisme

$$h_*(pt) \xrightarrow{\sim} h'_*(pt)$$

pour l'espace réduit à un point, alors on obtient également un isomorphisme

$$h_*(X) \xrightarrow{\sim} h'_*(X)$$

pour tout CW-complexe (fini)  $X$ .

*Démonstration.* À partir de la preuve du théorème 4.3.6, on voit facilement qu'on obtient des isomorphismes  $h_*(S^n) \longrightarrow h'_*(S^n)$  pour tout entier  $n$ .

On procède maintenant par récurrence sur la dimension du CW-complexe  $X$ . Si  $X$  est de dimension 0, l'axiome d'additivité fait l'affaire. Si maintenant on prend  $X$  de dimension  $n + 1$ , soit  $X_n$  son  $n$ -squelette. On vérifie que  $X/X_n$  est un bouquet de sphères, chacune de dimension  $n + 1$ . On a vu dans les exercices que l'homologie d'un tel espace était la somme directe des homologies de ces sphères, et par suite on obtient un isomorphisme  $h_*(X/X_n) \longrightarrow h'_*(X/X_n)$ .

Appliquons maintenant le corollaire 4.3.5 :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & \tilde{h}_k(X_n) & \longrightarrow & \tilde{h}_k(X) & \longrightarrow & \tilde{h}_k(X/X_n) & \longrightarrow & \tilde{h}_{k-1}(X_n) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \cong \downarrow & & \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & \tilde{h}'_k(X_n) & \longrightarrow & \tilde{h}'_k(X) & \longrightarrow & \tilde{h}'_k(X/X_n) & \longrightarrow & \tilde{h}'_{k-1}(X_n) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

On conclut grâce au lemme des 5. □

## 5.2 L'homologie des CW-complexes

Dans cette section, nous allons (enfin) prouver que, si  $H_*(-; \mathbf{F}_2)$  est une homologie ordinaire à coefficients dans  $\mathbf{F}_2$ , et si  $X = |\mathfrak{X}|$  est la réalisation d'un CW-complexe  $\mathfrak{X}$ , alors  $H_*(X; \mathbf{F}_2) = H_*(\mathfrak{X})$ , où le membre de droite désigne notre définition donnée dans le §2.3.

La démonstration va établir bien plus. Soit  $H_*(-; k)$  une homologie ordinaire à coefficients dans un anneau  $k$  – les exemples qui nous intéressent sont  $k = \mathbf{F}_2, \mathbf{Q},$  ou  $\mathbf{Z}$ . Soit  $\mathfrak{X}$  un CW-complexe fini, et soit  $X = |\mathfrak{X}|$ . On va obtenir un algorithme pour calculer  $H_*(X; k)$ , et cet algorithme ne dépend pas de la définition de  $H_*(-; k)$ , mais purement de données topologiques (ou combinatoires, si l'on veut) concernant  $X$ . En conséquence, *les groupes d'homologie ordinaire à coefficients dans  $k$  d'un CW-complexe sont indépendants de la définition de l'homologie.*<sup>1</sup>

La stratégie est la suivante :

- On va définir un complexe de chaînes  $D_*(\mathfrak{X}; k)$  à l'aide des foncteurs  $H_n(-; k)$ .
- On va calculer l'homologie de ce complexe, et montrer qu'elle vaut  $H_*(X; k)$  (noter l'apparition de  $X$  et non plus  $\mathfrak{X}$ ). En fait ça sera assez facile, puisque la définition même de  $D_*(\mathfrak{X}; k)$  utilise l'homologie de  $X$  et de ses squelettes.
- D'un autre côté, les résultats qu'on a déjà obtenus sur l'homologie des sphères vont montrer que  $D_*(\mathfrak{X}; k)$  a une description relativement simple, et pour  $k = \mathbf{F}_2$  on retombe sur  $C_*(\mathfrak{X}) = D_*(\mathfrak{X}; \mathbf{F}_2)$ .
- Donc l'homologie de  $C_*(\mathfrak{X})$  est bien  $H_*(X; \mathbf{F}_2)$ , cqfd !

**Définition 5.2.1.** Écrivons donc  $\mathfrak{X}_n$  pour le  $n$ -squelette de  $X$ , et  $X_n$  pour sa réalisation. On définit alors :

$$D_n(\mathfrak{X}; k) = H_n(X_n, X_{n-1}; k).$$

---

1. Par contre, si  $H_*(-; k)$  et  $H'_n(-; k)$  sont deux homologies ordinaires, on n'a pas automatiquement d'homomorphisme  $H_*(-; k) \rightarrow H'_*(-; k)$  au sens du § précédent. On a juste des isomorphismes non-naturels  $H_n(X; k) \cong H'_n(X; k)$  pour  $X = |\mathfrak{X}|$ . On ne peut pas tout avoir !

Il nous faut une différentielle  $\beta_{n+1} : D_{n+1}(\mathfrak{X}; k) \rightarrow D_n(\mathfrak{X}; k)$ . On considère tout d'abord la suite exacte de la paire  $(X_{n+1}, X_n)$ , qui donne un homomorphisme

$$\partial_{n+1} : H_{n+1}(X_{n+1}, X_n; k) \longrightarrow H_n(X_n; k).$$

Ensuite l'inclusion de  $(X_n, \emptyset)$  dans  $(X_n, X_{n-1})$  donne

$$j_n : H_n(X_n; k) \longrightarrow H_n(X_n, X_{n-1}; k).$$

On définit alors

$$\beta_{n+1} = j_n \circ \partial_{n+1}.$$

(Autrement dit,  $\beta_{n+1}$  est l'homomorphisme que l'on trouve dans la suite exacte longue du triplet  $(X_{n+1}, X_n, X_{n-1})$ , cf exercices).

La première chose à montrer est :

**Lemme 5.2.2.** *On a  $\beta_n \beta_{n+1} = 0$ . Ainsi,  $D_*(\mathfrak{X}; k)$  équipé de la différentielle  $\beta_*$  est bien un complexe de chaînes.*

*Démonstration.* On a

$$\beta_n \beta_{n+1} = j_{n-1} \partial_n j_n \partial_{n+1} = j_{n-1} \circ 0 \circ \partial_{n+1} = 0.$$

En effet  $\partial_n j_n = 0$  puisque ces deux homomorphismes apparaissent consécutivement dans la suite exacte longue de la paire  $(X_n, X_{n-1})$ .  $\square$

D'après ce lemme, on peut parler de l'homologie de ce complexe.

**Définition 5.2.3.** On pose :

$$H_*^{CW}(\mathfrak{X}, k) = H_*(D_*(\mathfrak{X}; k)) = \ker(\beta_*) / \mathcal{I}m(\beta_{*+1}).$$

Notre mission est donc d'une part de montrer qu'on a un isomorphisme  $H_*^{CW}(\mathfrak{X}, k) = H_*(X; k)$ , et d'autre part de donner une description explicite du complexe  $D_*(\mathfrak{X}; k)$ , qui permet le calcul.

Commençons par :

**Lemme 5.2.4.** *Le  $k$ -module  $D_n(\mathfrak{X}; k) = H_n(X_n, X_{n-1}; k)$  s'identifie au module libre sur les  $n$ -cellules de  $\mathfrak{X}$ .*

*D'autre part pour  $m \neq n$ , on a  $H_m(X_n, X_{n-1}; k) = 0$ .*

*Démonstration.* Pour tout  $m$  on a  $H_m(X_n, X_{n-1}; k) = \tilde{H}_m(X_n/X_{n-1}; k)$  d'après le théorème 4.3.1. Mais  $X_n/X_{n-1}$  est un bouquet de  $n$ -sphères, indexé par les  $n$ -cellules de  $\mathfrak{X}$ . Puisqu'on a  $\tilde{H}_m(S^n; k) = 0$  pour  $m \neq n$ , et  $\tilde{H}_n(S^n; k) = k$ , on a bien le résultat.  $\square$

Ensuite :

**Lemme 5.2.5.** 1. *L'homomorphisme  $j_n$  est injectif sur  $H_n(X_n; k)$ .*

$$2. \ker(\beta_n) = \ker(\partial_n) = \mathcal{I}m(j_n),$$

$$3. \mathcal{I}m(\beta_{n+1}) = j_n(\mathcal{I}m(\partial_{n+1})).$$

$$4. H_n(X_{n+1}; k) = \text{coker}(\partial_{n+1}).$$

*Démonstration.* Le point (3) est trivial.

D'après le lemme précédent, et la suite exacte de  $(X_n, X_{n-1})$ , on constate que l'application induite par inclusion  $H_i(X_{n-1}; k) \rightarrow H_i(X_n; k)$  est surjective pour  $i \neq n$ , est injective pour  $i \neq n-1$ , et donc est un isomorphisme pour  $i \neq n, n-1$ .

Par récurrence sur  $n$ , avec  $i$  fixé, on obtient  $H_i(X_n; k) = 0$  pour  $i > n$  pour tout  $i$  et  $n$ . Noter que la récurrence démarre par l'axiome de la dimension !

En particulier on a  $H_n(X_{n-1}; k) = 0$ , et on se retrouve avec la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow H_n(X_n; k) \xrightarrow{j_n} H_n(X_n, X_{n-1}; k) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(X_{n-1}; k) \rightarrow H_{n-1}(X_n; k) \rightarrow 0.$$

Tout est maintenant très facile. L'injectivité de  $j_n$  (point (1)) est claire, et montre alors que  $\ker(\beta_n) = \ker(\partial_n)$ . L'exactitude de la suite au milieu donne bien  $\ker(\partial_n) = \mathcal{I}m(j_n)$ , ce qui établit (2). Le point (4) est également clair sur la suite exacte.  $\square$

La voie est toute tracée pour prouver :

**Théorème 5.2.6.** *On a un isomorphisme*

$$H_*^{CW}(\mathfrak{X}; k) = H_*(X; k).$$

*Démonstration.* D'après le lemme précédent, l'application  $j_n$  donne un isomorphisme

$$j_n : H_n(X_n; k) \xrightarrow{\sim} \ker \beta_n,$$

et de plus cet isomorphisme envoie  $\mathcal{I}m(\partial_{n+1})$  sur  $\mathcal{I}m(\beta_{n+1})$ . On en déduit des isomorphismes

$$\ker(\beta_n)/\mathcal{I}m(\beta_{n+1}) = \text{coker}(\partial_{n+1}) = H_n(X_{n+1}; k).$$

Or on a également des isomorphismes

$$H_n(X_{n+1}; k) \xrightarrow{\sim} H_n(X_{n+2}; k) \xrightarrow{\sim} H_n(X_{n+3}; k) \xrightarrow{\sim} \dots$$

puisque  $H_n(X_i, X_{i-1}; k) = 0$  pour  $i > n$ . Comme on a  $X = X_m$  pour  $m$  suffisamment grand, on a finalement  $H_n(X; k) = \ker(\beta_n)/\mathcal{I}m(\beta_{n+1})$ .  $\square$

Ce résultat manque encore de sel tant que l'on n'a pas expliqué comment calculer  $H_*^{CW}(\mathfrak{X}; k)$ . Commençons par rétablir les notations du §2.3.

Soient donc  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$  les  $n+1$ -cellules de  $\mathfrak{X}$ , et soient  $\tau_1, \dots, \tau_s$  les  $n$ -cellules. D'après le lemme 5.2.4, on peut voir  $\beta$  comme un homomorphisme du  $k$ -module libre engendré par les  $\sigma_i$ 's vers le  $k$ -module libre engendré par les  $\tau_i$ 's, et on a certainement

$$\beta(\sigma_j) = \sum_i [\sigma_j, \tau_i] \tau_i,$$

où  $[\sigma_j, \tau_i] \in k$  est un scalaire à déterminer. Pour décrire ce nombre, introduisons le concept de *degré*.

**Définition 5.2.7.** Soit  $f : S^n \rightarrow S^n$  une application d'une sphère vers elle-même, et soit (comme dans le reste de ce paragraphe)  $H_*(-; k)$  une homologie ordinaire. Fixons un isomorphisme  $\tilde{H}_n(S^n; k) = k$ . Alors l'homomorphisme  $H_n(f) : k \rightarrow k$ , qui est  $k$ -linéaire par hypothèse, est donné par la multiplication par un scalaire que l'on appelle le *degré* de  $f$ , et que l'on note  $\text{deg}(f)$ .

**Remarque 5.2.8.** À première vue, le degré de  $f$  dépend du choix de  $H_*(-; k)$ , bien sûr ! Mais nous verrons dans les exercices que l'on peut calculer ce nombre d'une manière géométrique, qui ne dépend pas du choix de l'homologie. Notons aussi que, dans de nombreux livres sur le sujet, on définit le degré d'une application  $f$  comme étant le degré pour  $H_*(-; \mathbf{Z})$ , où une certaine définition de  $H_*(-; \mathbf{Z})$  a été arrêtée (ce qui évacue les problèmes d'unicité).

Pour nos calculs avec  $k = \mathbf{F}_2$ , on aura seulement besoin de la remarque suivante : si  $f$  est une équivalence d'homotopie, alors  $H_n(f)$  est un isomorphisme, et  $\deg(f) = 1$  (le seul élément non nul dans  $\mathbf{F}_2$ ). Par contre si  $f$  est constante, elle se factorise  $S^n \rightarrow pt \rightarrow S^n$ , donc  $H_n(f) = 0$  clairement, d'où  $\deg(f) = 0$ . C'est la raison pour laquelle nous avons introduit les CW-complexes réguliers !

Rappelons une notation qui provient de la définition de CW-complexe régulier (définition 1.3.8) : la  $n + 1$ -cellule  $\sigma_j$  est fournie avec une application  $f_j : S^n \rightarrow |\mathfrak{X}_n|$ , et nous avons noté

$$f_{ji} : S^n \rightarrow |\mathfrak{X}_n| \rightarrow |\mathfrak{X}_n|/A_i.$$

On rappelle que  $A_i$  est la réunion de toutes les  $n$ -cellules sauf  $\tau_i$ . On avait alors remarqué que  $|\mathfrak{X}_n|/A_i$  est homéomorphe à une  $n$ -sphère : en fait il y a même un homéomorphisme canonique, et désormais la notation  $f_{ji}$  va désigner la composition

$$f_{ji} : S^n \rightarrow |\mathfrak{X}_n| \rightarrow |\mathfrak{X}_n|/A_i \rightarrow S^n.$$

On a alors :

**Théorème 5.2.9.** *Les nombres  $[\sigma_j, \tau_i]$  sont donnés par*

$$[\sigma_j, \tau_i] = \deg(f_{ji}).$$

*En particulier si  $k = \mathbf{F}_2$  et si  $\mathfrak{X}$  est régulier, alors les complexes de chaînes  $C_*(\mathfrak{X})$  et  $D_*(\mathfrak{X}; \mathbf{F}_2)$  peuvent être identifiés.*

*Démonstration (pourquoi on ne va pas la faire).* Il faut décortiquer à peu près toutes les démonstrations que l'on a faites dans le cours et dans les exercices jusqu'à présent. Par exemple, la définition de  $\beta_*$  fait intervenir  $\partial_*$  ; c'est étroitement lié à l'utilisation de  $\partial_*$  que nous avons faite dans la preuve du théorème 4.3.6. D'ailleurs il faudrait préciser cet énoncé, et remplacer l'existence d'un isomorphisme  $\tilde{H}_n(S^n; k) = k$  par un choix précis et définitif de générateur pour ce module.

Cependant, si cette démonstration est *longue*, elle ne présente rien de fondamentalement *difficile*. Le lecteur est invité à se convaincre de ça.  $\square$

On a finalement établi (ou presque...) tout ce qu'on avait annoncé. On va résumer ça sous la forme d'un théorème. On va tout de même renverser un peu les choses.

**Théorème 5.2.10** (Résumé du paragraphe). *Soit  $H_*(-; k)$  une homologie ordinaire à coefficients dans l'anneau  $k$ , et soit  $\mathfrak{X}$  un CW-complexe fini. Soit alors  $D_n(\mathfrak{X}; k)$  le  $k$ -module libre engendré par les  $n$ -cellules de  $\mathfrak{X}$ . On définit*

$$\beta_{n+1} : D_{n+1}(\mathfrak{X}; k) \longrightarrow D_n(\mathfrak{X}; k)$$

par

$$\beta(\sigma_j) = \sum_i \deg(f_{ji}) \tau_i,$$

où les notations  $\sigma_j$ ,  $\tau_i$  et  $f_{ji}$  sont comme ci-dessus.

Alors  $\beta^2 = 0$ , et  $D_*(\mathfrak{X}; k)$  est un complexe de chaînes. De plus, son homologie est

$$H_*(D_*(\mathfrak{X}; k)) = H_*(|\mathfrak{X}|; k).$$

# Exercices

## Le degré d'une application

On prend une homologie ordinaire  $H_*(-; k)$ .

**Exercice 29.** 1. Montrer que  $\deg(f \circ g) = \deg(f) \deg(g)$ .

2. Montrer que l'application  $S^0 \rightarrow S^0$  qui échange les deux points  $-1$  et  $1$  a pour degré  $-1$ .

3. En utilisant le fait que  $S^n$  est la suspension de  $S^{n-1}$ , montrer le résultat suivant. Soit  $\phi : \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$  une réflexion orthogonale par rapport à un hyperplan, et soit  $f$  sa restriction à  $S^n$ . Alors le degré de  $f$  est  $-1$ .

*On peut choisir l'hyperplan que l'on veut sans changer le degré...*

4. Quel est le degré de  $f$  lorsque  $\phi$  est la composée de  $d$  réflexions ?

5. En déduire le degré de l'application antipodale  $S^n \rightarrow S^n$ ,  $x \mapsto -x$ .

**Exercice 30.** Dans cet exercice on rappelle quelles sont les composantes connexes de  $GL_n(\mathbf{R})$ , et de  $O(n)$ . Vous connaissez peut-être déjà le résultat.

1. Montrer que  $SO(n)$  est connexe.

*Indication : c'est un classique. On peut par exemple montrer que chaque  $g \in SO(n)$  peut être décomposé en produit  $g = r_1 r_2 \dots r_s$  de rotations élémentaires ; par rotation élémentaire  $r$  on entend qu'il y a un plan  $P$  (de dimension 2) dans lequel  $r$  est une rotation usuelle, et que  $r$  est l'identité sur  $P^\perp$ .*

*Ensuite pour chaque  $r_i$  on fait varier l'angle de la rotation progressivement, ce qui donne un chemin vers l'identité.*

2. Montrer que  $O(n)$  a deux composantes connexes.

3. Montrer ou rappeler la *décomposition polaire* de toute matrice  $M \in GL_n(\mathbf{R})$  : on a  $M = OS$  avec  $O$  orthogonale et  $S$  symétrique définie positive.

4. En déduite que  $SL_n(\mathbf{R})$  est connexe, et que  $GL_n(\mathbf{R})$  a deux composantes connexes données par le signe du déterminant.

5. (Application au degré.) Soit  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  une application linéaire inversible. On prolonge  $f$  en une application continue  $S^n \rightarrow S^n$  en identifiant  $S^n$  et  $\mathbf{R}^n \cup \{\infty\}$  (vérifier que ceci a un sens). Montrer que l'application obtenue a pour degré  $+1$  si  $\det(f) > 0$  et  $-1$  sinon.

**Exercice 31.** Soit  $f : S^n \rightarrow S^n$  une application continue. On suppose qu'il existe une "face"  $U \subset S^n$  (au sens de l'exercice 7), telle que  $f^{-1}(U) = \coprod U_i$  est lui-même une union disjointe d'un nombre fini de faces. De plus on suppose que la restriction  $f_i : U_i \rightarrow U$  est un homéomorphisme pour chaque face  $U_i$ .

Pour finir, on suppose que  $f_i$  envoie le bord de  $U_i$  sur le bord de  $U$ . (*En fait on peut montrer que ceci est automatique.*) Donc en identifiant  $U_i/\partial U_i$  avec une sphère  $S_i^n$ , et de même en identifiant  $U/\partial U$  avec  $S^n$ , on obtient canoniquement une application  $S_i^n \rightarrow S^n$  que l'on note encore  $f_i$ .

Montrer que

$$\deg(f) = \sum_i \deg(f_i).$$

*Indication : soit  $U'_i$  l'intérieur de  $U_i$ , et soit  $K = S^n - \cup_i U'_i$ . Alors  $S^n/K$  est homéomorphe à une union pointée de sphères. On sait calculer l'homologie de ça, c'est une somme directe...*

*D'autre part, il va falloir préciser le résultat de l'exercice 7. On y prouve qu'une certaine application  $p : S^n \rightarrow S^n/S_+^n$  est une équivalence d'homotopie. En fait on peut vérifier que, en identifiant canoniquement  $S^n/S_+^n$  à une sphère  $S^n$ , alors l'application obtenue  $S^n \rightarrow S^n$  a pour degré +1. En effet l'identification  $S^n/S_+^n \rightarrow S^n$  est précisément l'équivalence d'homotopie inverse de  $p$ .*

Grâce aux exercices précédents, on peut donner une idée assez précise de démonstration pour le théorème suivant :

**Théorème 5.2.11.** *Le degré d'une application  $f : S^n \rightarrow S^n$  est un entier (vu dans  $k$  par l'unique application  $\mathbf{Z} \rightarrow k$ ). Il ne dépend pas de l'homologie  $H_n(-; k)$  choisie.*

*Idée.* On peut montrer que  $f$  est homotope à une fonction  $C^\infty$ . Puis, le théorème de Sard en géométrie différentielle affirme que l'un des cas suivants se présente :

- Il existe un  $y \in S^n$  tel que  $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$ . Alors  $f$  se factorise comme la composition de fonctions  $S^n \rightarrow S^n - \{y\} \cong \mathbf{R}^n \rightarrow S^n$ , et comme  $\mathbf{R}^n$  est contractile,  $f$  est homotope à une application constante. Son degré est alors 0 (et les conclusions du théorème sont vraies).
- Ou alors, il existe  $y \in S^n$  tel que pour chaque  $x$  vérifiant  $f(x) = y$ , la différentielle  $df_x$  est non-singulière. Le théorème d'inversion locale affirme alors qu'il existe un voisinage  $U$  de  $y$  tel que  $f^{-1}(U) = \coprod U_i$  avec  $U_i$  homéomorphe à  $U$  via  $f$ . Quitte à rapetisser  $U$ , on peut supposer que c'est une "face". En fait on peut montrer qu'on est ramené à la situation de l'exercice 31. D'après cet exercice le degré de  $f$  est la somme des degrés d'applications "locales"  $f_i$ , qui sont des homéomorphismes.

En faisant un développement limité de  $f_i$ , on peut écrire une homotopie entre  $f_i$  et sa différentielle, qui est une application linéaire ; plus précisément, c'est une application comme celles rencontrées dans le (5) de l'exercice 30. D'après cet exercice, le degré de  $f_i$  est  $\pm 1$ , donné par le signe de  $df_i$ . Là encore les conclusions du théorème sont vraies. □

On a également une méthode pour calculer le degré de  $f : S^n \rightarrow S^n$  : on choisit  $U$  et les  $U_i$  pour se trouver dans la situation de l'exercice 31, de telle façon que la restriction de  $f$  à  $U_i$  soit homotope à une application du genre du (5) de l'exercice 30 (sans même évoquer les raisons générales données ci-dessus,

en pratique on trouve toujours). Ensuite on regarde la restriction de  $f$  à  $U_i$ , on compte  $+1$  si  $f$  “préserve l’orientation” et  $-1$  sinon. Enfin on ajoute ces nombres.

## Applications

**Exercice 32.** Soit  $f : S^1 \rightarrow S^1$  donnée par  $z \mapsto z^n$ . Quel est son degré ? (disons pour  $H_*(-; \mathbf{Z})$ )

**Exercice 33.** Calculer  $H_*(X; \mathbf{Z})$  pour  $X =$  le tore, la bouteille de Klein,  $\mathbf{R}P^2$ . Dans chaque cas on peut utiliser la structure de CW-complexe, ou une suite de Mayer-Vietoris bien choisie : essayer les deux méthodes.

**Exercice 34.** 1. Soit  $f : S^n \rightarrow S^n$  n’ayant aucun point fixe. Montrer que  $f$  est homotope à l’application antipodale.

2. Soit  $G$  un groupe non-trivial agissant librement sur la sphère  $S^{2n}$ . (On rappelle que “librement” signifie que si  $g \in G$ ,  $g \neq 1$ , alors  $gx \neq x$  pour tous les  $x$ .)

Montrer que  $G$  est le groupe d’ordre 2.

*Regarder le degré...*

## Chapitre 6

# Existence de l'homologie

À ce stade du cours, il est clair que la *définition* de l'homologie (ordinaire, à coefficients dans un anneau  $k$ ) importe peu : de toute façon, les calculs se feront de la même manière. Par contre, il serait bon de se convaincre de l'existence d'une telle théorie.

Dans ce chapitre, on va donner brièvement la définition de l'homologie singulière, et en tirer quelques conséquences (c'est-à-dire faire quelques calculs qui sont particulièrement faciles avec cette définition spécifique).

### 6.1 Homologie et cohomologie singulières

On note  $\Delta^n$  le «  $n$ -simplexe standard » :

$$\Delta^n = \{(t_1, \dots, t_n) : t_i \geq 0, \sum t_i = 1\}.$$

On a une application “ $i$ -ème face”  $\phi_i : \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$  qui envoie

$$(t_0, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n) \mapsto (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \dots, t_n).$$

Si  $X$  est un espace topologique, un  *$n$ -simplexe singulier* sur  $X$  est une application continue  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ . La  $i$ -ème face de  $\sigma$  est  $\sigma \circ \phi_i$ , c'est un  $(n-1)$ -simplexe singulier ; on va le noter  $d_i(\sigma)$ . On a la « relation simpliciale »

$$d_i d_j(\sigma) = d_{j-1} d_i(\sigma) \text{ si } i < j.$$

On définit  $C_n(X; k)$  comme le  $k$ -module libre sur l'ensemble (largement infini !) de tous les  $n$ -simplexes singuliers sur  $X$ . On a une application bord  $\partial : C_n(X; k) \rightarrow C_{n-1}(X; k)$  définie par

$$\partial(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i(\sigma).$$

Calculons alors :

$$\begin{aligned}
\partial\partial(\sigma) &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i d_i(\partial(\sigma)) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^n (-1)^i (-1)^j d_i d_j(\sigma) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j \leq i} (-1)^{i+j} d_i d_j(\sigma) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j > i} (-1)^{i+j} d_{j-1} d_i(\sigma) \\
&= \sum_{0 \leq j \leq i \leq n-1} (-1)^{i+j} d_i d_j(\sigma) - \sum_{0 \leq i \leq j \leq n-1} (-1)^{i+j} d_j d_i(\sigma) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

On a donc un complexe de chaînes! Son homologie est par définition l'homologie de  $X$  :

$$H_n(X; k) = H_n(C_*(X; k)).$$

On construit un complexe de "cochaînes" comme dans l'exercice 27. La cohomologie obtenue est par définition la cohomologie de  $X$  :

$$H^n(X; k) = H^n(C_*(X; k)).$$

(On rappelle que le membre de droite signifie qu'on regarde le complexe  $C^n(X; k) = \text{Hom}_k(C_n(X; k), k)$ , qui est un complexe de cochaînes (donc un cas particulier de complexe de chaînes, quitte à renuméroter), et c'est de l'homologie de ce complexe dont il s'agit.)

Si  $A$  est un sous-espace de  $X$ , la suite de modules

$$C_n(X, A; k) = C_n(X; k)/C_n(A; k)$$

forme un complexe de chaînes (autrement dit le  $\partial$  sur  $C_*(X; k)$  passe au quotient). On pose donc

$$H_n(X, A; k) = H_n(C_*(X, A; k)),$$

et

$$H^n(X, A; k) = H^n(C_*(X, A; k)).$$

Vous avez vu la preuve de certains axiomes. Tout d'abord, on voit facilement que  $H_n(X, A; k)$  est un foncteur  $\mathcal{Top}^2 \rightarrow \mathcal{Ab}$  (ou même vers les  $k$ -modules si  $k$  est un anneau), alors qu'avec l'homologie cellulaire c'était beaucoup moins clair!

Ensuite, l'axiome de la dimension ne pose pas de difficulté, pas plus que celui d'additivité. L'axiome d'exactitude (qui est particulièrement important) est une conséquence du lemme suivant.

**Lemme 6.1.1** (Lemme du serpent, ou lemme du zig-zag). *Supposons donné un*

diagramme de  $k$ -modules comme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & C_n & \longrightarrow & D_n & \longrightarrow & E_n \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & C_{n-1} & \longrightarrow & D_{n-1} & \longrightarrow & E_{n-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

On suppose que les suites verticales sont des complexes de chaînes, que les suites horizontales sont exactes, et que le diagramme commute.

Alors il existe une suite exacte longue :

$$\cdots \rightarrow H_n(C_*) \rightarrow H_n(D_*) \rightarrow H_n(E_*) \rightarrow H_{n-1}(C_*) \rightarrow \cdots$$

*Démonstration.* Exercice. □

En appliquant ce lemme aux suites exactes

$$0 \rightarrow C_n(A; k) \rightarrow C_n(X; k) \rightarrow C_n(X, A; k) \rightarrow 0,$$

on obtient la suite exacte longue de l'axiome d'exactitude.

Les propriétés qu'on ne démontrera pas sont donc :

1. l'invariance par homotopie, c'est-à-dire le fait que l'homologie est en fait un foncteur  $\mathcal{HoTop}^2 \rightarrow \mathcal{Ab}$ ;
2. l'axiome d'excision.

Une démonstration complète serait assez longue (mais pas si compliquée).

## 6.2 Calculs en degré 0

Même si toutes les définitions de l'homologie donnerait essentiellement les mêmes résultats, profitons de celle que nous avons sous la main pour étudier  $H_0(X)$  (on ne va plus écrire  $H_0(X; k)$ , pour simplifier).

**Proposition 6.2.1.** *Si les composantes connexes par arcs de  $X$  sont au nombre de  $m$ , alors*

$$H_0(X) = k^m.$$

*En particulier  $H_0(X) = k$  si  $X$  est connexe par arcs.*

*Démonstration.* Soient  $X_1, \dots, X_m$  les composantes connexes de  $X$ , et soit  $x_i \in X_i$ . On regarde les applications constantes  $X_i \rightarrow \{x_i\}$ , et on constate que la composition

$$\{x_1, \dots, x_m\} \rightarrow X \rightarrow \{x_1, \dots, x_m\}$$

est l'identité. Prenant l'homologie, on obtient une injection  $i : k^m \rightarrow H_0(X)$  ainsi qu'une surjection  $j : H_0(X) \rightarrow k^m$ .

En utilisant l'homologie singulière, on va montrer que  $j$  est en fait un isomorphisme (et du coup,  $i$  le sera aussi). On a donc

$$H_0(X) = \frac{C_0(X)}{\partial C_1(X)}.$$

Un 0-simplexe est simplement un point de  $X$ , donc  $C_0(X)$  est le  $k$ -module libre sur les points de  $X$ . Si  $x$  et  $y$  appartiennent à la même composante de  $X$ , soit  $\gamma$  un chemin menant de  $x$  à  $y$ . On peut voir  $\gamma$  comme un 1-simplexe singulier, et alors  $\partial\gamma = y - x$ . Ainsi,  $x = y$  dans le quotient  $H_0(X)$ .

On en conclut que  $x_1, \dots, x_m$ , vus comme 0-simplexes singuliers, sont des générateurs de  $H_0(X)$ . L'application  $j$  les envoie sur une base de  $k^m$ , et le résultat suit.  $\square$

### 6.3 Changements de coefficients

**Lemme 6.3.1.** *Soit  $K$  une  $k$ -algèbre commutative. Alors il existe un morphisme naturel*

$$H_n(X; k) \otimes_k K \longrightarrow H_n(X; K).$$

*De même en homologie relative.*

*Démonstration.* C'est l'application

$$[x] \otimes \lambda \mapsto [\lambda x],$$

pour  $\lambda \in K$  et  $x \in C_n(X; k) \subset C_n(X; K)$ .  $\square$

**Théorème 6.3.2.** *Soit  $K$  une  $k$ -algèbre. Si le foncteur  $- \otimes_k K$  préserve les suites exactes, alors on a des isomorphismes*

$$H_n(X; k) \otimes_k K = H_n(X; K),$$

*pour tout entier  $n$  et tout CW-complexe  $X$ . En particulier on a*

$$H_n(X; \mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} = H_n(X; \mathbf{Q}).$$

*Démonstration.* Sous l'hypothèse concernant  $- \otimes_k K$ , les foncteurs

$$X \mapsto H_n(X; k) \otimes_k K$$

forment une homologie, comme on le vérifie facilement (voir l'exercice 20).

Le lemme précédent donne un morphisme d'homologies. On a bien un isomorphisme lorsque  $X$  est réduit à un point, et c'est le théorème 5.1.2 qui donne le résultat.  $\square$

**Remarque 6.3.3.** En fait on peut montrer ça pour tout espace  $X$ , pas seulement (la réalisation d') un CW-complexe. Mais c'est considérablement plus compliqué.

## 6.4 Dualité – le produit de Kronecker

**Définition 6.4.1.** Soit  $\sigma \in H_n(X)$  et  $a \in H^n(X)$ . On prend des représentants  $\sigma' \in C_n(X)$  et  $a' \in C^n(X) = \text{Hom}(C_n(X), k)$ . Le *produit de Kronecker* de  $\sigma$  et  $a$  est

$$\langle a, \sigma \rangle = a'(\sigma').$$

Il faut bien sûr vérifier que ceci ne dépend pas du choix des représentants  $\sigma'$  et  $a'$ . On obtient donc une application

$$H_n(X) \otimes H^n(X) \rightarrow k.$$

**Théorème 6.4.2.** Lorsque  $k$  est un corps, on a un isomorphisme

$$H^n(X; k) = \text{Hom}_k(H_n(X; k), k),$$

pour tout entier  $n$  et tout CW-complexe  $X$ .

*Démonstration.* Grâce à l'hypothèse sur  $k$ , on voit que

$$X \mapsto \text{Hom}_k(H_n(X; k), k)$$

est une cohomologie (cf exercice 19).

À l'aide du produit de Kronecker, on construit un morphisme de cohomologies

$$H^n(X; k) \longrightarrow \text{Hom}_k(H_n(X; k), k).$$

C'est un isomorphisme pour  $X = pt$ , donc on conclut avec le théorème 5.1.2 (ou plutôt une variante de ce théorème en cohomologie, triviale à établir).  $\square$

## 6.5 (Co)homologie d'un produit

**Théorème 6.5.1** (Künneth, version topologique). Si  $k$  est un corps, ou si l'homologie de  $Y$  est libre sur  $k$ , on a des isomorphismes naturels

$$H_n(X \times Y) = \bigoplus_{p+q=n} H_p(X) \otimes_k H_q(Y),$$

au moins lorsque  $X$  est un CW-complexe. Idem en cohomologie.

*Démonstration.* Le modèle de démonstration est le même que pour les deux théorèmes précédents. Fixons l'espace  $Y$ . Alors

$$X \mapsto H_n(X \times Y)$$

est une homologie (non-ordinaire!), ainsi que

$$X \mapsto \bigoplus_{p+q=n} H_p(X) \otimes_k H_q(Y),$$

vues les hypothèses.

La proposition ci-dessous fournit un morphisme d'homologie entre les deux, et c'est un isomorphisme pour  $X = pt$ .  $\square$

**Proposition 6.5.2.** *Il existe une application naturelle en  $X$  et  $Y$*

$$\theta : C_*(X \times Y) \rightarrow C_*(X) \otimes C_*(Y),$$

qui commute avec les bords  $\partial$ . En degré 0, on a  $\theta(x, y) = x \otimes y$ .

*Démonstration.* On va donner tous les détails, puisque cette preuve est assez typique (la démonstration de l'invariance par homotopie de l'homologie singulière, par exemple, utilise des idées comparables). C'est ce qu'on appelle "la méthode des modèles acycliques" : ici, ça veut dire qu'on va d'abord étudier le cas  $X = Y = \Delta^k$ , qui est un espace ayant l'homologie d'un point (on dit parfois que c'est un espace "acyclique").

Précisons d'abord que la naturalité de  $\theta$  signifie que pour  $f : X \rightarrow X'$  et  $g : Y \rightarrow Y'$ , on a  $\theta \circ (f \times g)_* = (f_* \otimes g_*) \circ \theta$ . (On écrit  $f_*$  etc pour l'application induite  $C_*(X) \rightarrow C_*(X')$ .)

On suppose que  $\theta$  est construite en degré  $< k$ , avec  $\partial \circ \theta = \theta \circ \partial$ , et on procède par récurrence.

Comme annoncé, considérons d'abord le cas  $X = Y = \Delta^k$ . Soit  $e : \Delta^k \rightarrow \Delta^k \times \Delta^k$  la diagonale (les lettres  $\Delta$ ,  $d$  et  $\partial$  étant déjà prises). On a  $e \in C_k(\Delta^k \times \Delta^k)$ . L'élément  $\theta(\partial e)$  est défini, par récurrence. De plus  $\partial\theta(\partial e) = \theta(\partial\partial e) = 0$ . Ainsi  $\theta(\partial e)$  est dans le noyau de  $\partial$ , et comme l'espace  $\Delta^k \times \Delta^k$  est contractile (donc a une homologie nulle), on constate que  $\theta(\partial e)$  est un bord :  $\theta(\partial e) = \partial x$  pour au moins un certain  $x$  (on choisit ce  $x$  une fois pour toutes). On pose alors  $\theta(e) = x$ .

Maintenant pour  $X$  et  $Y$  quelconques, on note  $p_X$  et  $p_Y$  les deux projections. Prenons  $\sigma : \Delta^k \rightarrow X \times Y$ , on veut définir  $\theta(\sigma)$ . On écrit  $\sigma$  comme la composition :

$$\Delta^k \xrightarrow{e} \Delta^k \times \Delta^k \xrightarrow{p_X \sigma \times p_Y \sigma} X \times Y.$$

(On a écrit  $p_X \sigma$  pour  $p_X \circ \sigma$ .) En d'autres termes, on a  $\sigma = (p_X \sigma \times p_Y \sigma)_*(e)$ . Puisque nous souhaitons que  $\theta$  soit naturel, nous n'avons guère d'autre choix que poser

$$\theta(\sigma) = ((p_X \sigma)_* \otimes (p_Y \sigma)_*)(\theta(e)).$$

Voilà qui définit  $\theta$  en degré  $k$ , et c'est visiblement une application naturelle.

Il nous reste à vérifier que  $\theta$  commute avec  $\partial$ . C'est un calcul trépidant. Le voici :

$$\begin{aligned} \partial\theta(\sigma) &= \partial((p_X \sigma)_* \otimes (p_Y \sigma)_*)(\theta(e)) \\ &= ((p_X \sigma)_* \otimes (p_Y \sigma)_*)(\partial\theta(e)) \text{ (les applications induites commutent avec } \partial) \\ &= ((p_X \sigma)_* \otimes (p_Y \sigma)_*)(\theta(\partial e)) \text{ (définition de } \theta(e)) \\ &= \theta(p_X \sigma \times p_Y \sigma)_*(\partial e) \text{ (naturalité en degré } < k) \\ &= \theta\partial(p_X \sigma \times p_Y \sigma)_*(e) \text{ (les applications induites commutent avec } \partial) \\ &= \theta(\partial\sigma) \text{ (comme observé ci-dessus)}. \end{aligned}$$

Et le tour est joué. □

**Remarque 6.5.3.** Le théorème de Eilenberg et Zilber affirme que  $\theta$  induit un isomorphisme en homologie. Par conséquent, on peut calculer l'homologie de  $X \times Y$  à partir de  $C_*(X) \otimes C_*(Y)$ ; par suite, on peut déduire le théorème de Künneth ci-dessus de la version "algébrique" prouvée dans les exercices de ce chapitre. C'est sensiblement plus difficile que la démonstration donnée ici !

Pour une analyse plus fine lorsque  $k$  n'est pas un corps, c'est pourtant bien comme ça que l'on procède.

## 6.6 Structures multiplicatives

Soit  $\sigma : \Delta^{n+m} \rightarrow X$  un simplexe singulier sur  $X$ . La  $m$ -face avant de  $\sigma$  est  $\sigma \circ \alpha_m : \Delta^m \rightarrow X$  où

$$\alpha_m(t_0, \dots, t_m) = (t_0, \dots, t_m, 0, \dots, 0).$$

La  $n$ -face arrière de  $\sigma$  est  $\sigma \circ \beta_n : \Delta^n \rightarrow X$  où

$$\beta_n(t_m, t_{m+1}, \dots, t_{m+n}) = (0, \dots, 0, t_m, t_{m+1}, \dots, t_{m+n}).$$

Soient alors  $c \in C^n(X)$  et  $c' \in C^m(X)$ . On définit leur produit  $cc' \in C^{n+m}(X)$  par la formule

$$\langle cc', \sigma \rangle = (-1)^{mn} \langle c, \sigma \circ \alpha_m \rangle \cdot \langle c', \sigma \circ \beta_m \rangle.$$

**Lemme 6.6.1.** On a :

$$d(cc') = (dc)c' + (-1)^m cd(c').$$

(Ici  $d$  est l'opérateur "cobord" du complexe de cochaînes  $C^*(X)$ .)

En conséquence, on a un produit

$$H^n(X) \otimes H^m(X) \longrightarrow H^{n+m}(X).$$

**Lemme 6.6.2.** Dans  $H^{m+n}(X)$ , on a

$$cc' = (-1)^{mn} c'c.$$

**Remarque 6.6.3.** 1. On appelle aussi  $cc'$  le *cup-produit*, ou produit cup, de  $c$  et  $c'$ . On le notait parfois  $c \cup c'$  (le symbole  $\cup$  se prononce "cup" en Anglais).

2. Posons

$$H^\bullet(X) = \bigoplus_n H^n(X).$$

Alors  $H^\bullet(X)$  est un anneau. On dit que c'est un anneau gradué, puisqu'il se décompose en somme directe et que le produit d'un élément de "degré"  $n$  avec un élément de degré  $m$  est de degré  $n + m$ . On exprime aussi le deuxième lemme ci-dessus en disant que  $H^\bullet(X)$  est *commutatif au sens gradué*<sup>1</sup>.

3. La définition ci-dessus est la version rigoureuse (et très compacte) de l'idée intuitive de produit que nous avons examinée à l'occasion de l'exercice 28.

4. Il est clair que pour les calculs, cette définition est totalement impraticable! Dans le prochain chapitre nous verrons un théorème très difficile, qui permet s'en sortir un peu : le théorème de dualité de Poincaré.

---

1. en toute rigueur la définition d'un "anneau gradué" est : une collection de groupes  $H^n$  avec des produits  $H^n \otimes H^m \rightarrow H^{n+m}$ ; ça n'est pas une somme directe. En particulier un anneau gradué n'est pas un anneau, avec cette convention! Mais l'abus de langage que nous faisons est commun.

5. Le théorème de Künneth (6.5.1) en cohomologie est un isomorphisme *d'anneaux*, comme on peut le vérifier. Ici, on emploie la définition suivante. Soient  $A^*$  et  $B^*$  deux anneaux gradués. Sur  $A^* \otimes B^*$  (qui en degré  $n$  est la somme directe des  $A^p \otimes B^q$  avec  $p + q = n$ ) on a la multiplication

$$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = (-1)^{qp'} aa' \otimes bb'$$

avec  $a$  resp.  $a'$ ,  $b$ ,  $b'$ , de degré  $p$  resp.  $p'$ ,  $q$ ,  $q'$ . C'est avec cette définition que  $H^*(X \times Y)$  s'identifie avec  $H^*(X) \otimes H^*(Y)$ .

## 6.7 Le produit cap

Afin de préparer le terrain pour la dualité de Poincaré, nous introduisons une dernière opération.

**Définition 6.7.1.** Soit  $b \in C^i(X)$ , et  $\sigma \in C_n(X)$ . On définit  $b \cap \sigma$  comme étant l'unique élément de  $C_{n-i}(X)$  tel que

$$\langle a, b \cap \sigma \rangle = \langle ab, \sigma \rangle,$$

pour tout  $a \in C^{n-i}(X)$ .

Il faut vérifier que cet élément existe (l'unicité étant claire) : en fait on peut utiliser la formule suivante :

$$b \cap \sigma = (-1)^{i(n-i)} \langle b, \sigma \circ \beta_i \rangle \sigma \circ \alpha_{n-i}.$$

Nous passerons sous silence la démonstration de la proposition suivante :

**Proposition 6.7.2.** *Le produit  $\cap$  satisfait :*

1.  $(bc) \cap \sigma = b \cap (c \cap \sigma)$ .
2.  $1 \cap \sigma = \sigma$ .
3.  $\partial(b \cap \sigma) = d(b) \cap \sigma + (-1)^i b \cap \partial \sigma$ .

On déduit du dernier point qu'il existe une opération bilinéaire

$$\cap : H^i(X) \otimes H_n(X) \longrightarrow H_{n-i}(X).$$

# Exercices

**Exercice 35.** Prouver le lemme du zig-zag/du serpent.

**Exercice 36** (Théorème algébrique de Künneth). On va (finalement) démontrer le théorème de Künneth dans sa version algébrique. Soit donc  $k$  un corps, soient  $C_*$  et  $D_*$  deux complexes de chaînes sur  $k$ , et soit  $C_* \otimes D_*$  comme dans l'exercice 25. On a construit une application

$$\bigoplus_{p+q=n} H_p(C_*) \otimes H_q(D_*) \longrightarrow H_n(C_* \otimes D_*).$$

On va montrer que c'est un isomorphisme.

Les notations suivantes vont être utiles<sup>2</sup> :  $Z_p(C_*) = \ker \partial_p \subset C_p$ , et  $B_p(C_*) = \text{Im}(\partial_{p+1}) \subset C_p$ . De même on a  $Z_p(D_*)$  et  $B_p(D_*)$ .

1. Supposons d'abord que  $C_i = 0$  sauf pour  $i = p$ . Montrer que dans ce cas on a bel et bien un isomorphisme

$$H_{p+q}(C_* \otimes D_*) = C_p \otimes H_q(D_*).$$

2. Que dire dans le cas où la différentielle de  $C_*$  est nulle ?
3. On retourne au cas général. On voit alors  $Z_*(C_*)$  ainsi que  $B_*(C_*)$  comme des complexes de chaînes avec différentielle nulle ( $\partial = 0$ ).

Montrer qu'on a des suites exactes de complexes de chaînes (c'est-à-dire, un diagramme comme dans le lemme du zig-zag) de la forme suivante

$$0 \longrightarrow Z_*(C_*) \otimes D_* \longrightarrow C_* \otimes D_* \longrightarrow B_{*-1}(C_*) \otimes D_* \longrightarrow 0.$$

4. Calculer l'homologie des trois complexes de la suite exacte ci-dessus.
5. Montrer que la suite exacte longue obtenue à l'aide du lemme du zig-zag se scinde en suites exactes courtes. (En d'autres termes, il y a des flèches injectives à repérer dans cette suite exacte longue.)
6. Conclure.

**Exercice 37** (La courbe de Jordan). Soit  $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbf{R}^2$  un plongement (homéomorphisme sur son image). Le *théorème de la courbe de Jordan* affirme que  $\mathbf{R}^2 - \gamma(S^1)$  a précisément deux composantes connexes – intuitivement, l'intérieur et l'extérieur de la courbe.

1. (a) Choisir un point au hasard sur la figure 6.1 et préciser en moins de cinq secondes s'il est à l'intérieur ou à l'extérieur de la courbe.

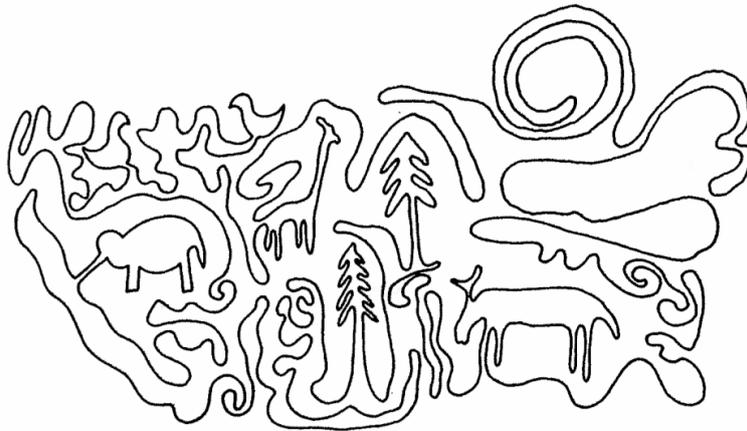


FIGURE 6.1 – Question : où sont les composantes connexes ?

- (b) Voir la réponse sur la figure 6.2.
- (c) Recommencer jusqu'à ce que l'énoncé du théorème de la courbe de Jordan vous apparaisse non-trivial.



FIGURE 6.2 – Réponse : ici.

On va faire l'hypothèse simplificatrice suivante : on suppose que l'on peut étendre  $\gamma$  en un plongement

$$\bar{\gamma} : S^1 \times [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2,$$

de telle sorte que  $\bar{\gamma}(S^1 \times ]-1, 1[)$  est un ouvert, et avec  $\gamma(t) = \bar{\gamma}(t, 0)$ .

- 2. Question subsidiaire de géométrie différentielle, sans rapport avec le cours : montrer que cette hypothèse simplificatrice est automatiquement satisfaite lorsque  $\gamma$  est  $C^\infty$ .
- 3. Montrer le théorème sous cette hypothèse.

Indication : les composantes connexes se déterminent à l'aide de  $H_0$ . Penser à faire une excision.

---

2.  $Z$  pour "cycles" en Allemand ;  $B$  pour "bords" (ou presque sûrement, "boundaries").

# Chapitre 7

## Homologie des variétés

### 7.1 Variétés

**Définition 7.1.1.** On note  $\mathbf{R}_+^n$  le fermé de  $\mathbf{R}^n$  des  $(x_1, \dots, x_n)$  avec  $x_n \geq 0$ . Soit  $X$  un espace topologique. On dit que  $X$  est une *variété* de dimension  $n$  lorsque pour tout  $x \in X$ , on peut trouver un ouvert  $U \subset X$  avec  $x \in U$ , tel qu'il existe homéomorphisme  $\phi : U \rightarrow \Omega$ , où  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbf{R}_+^n$ .

Point technique : on suppose en général aussi, et nous le ferons dans ce cours, que  $X$  possède une base d'ouverts *dénombrable*.

**Exemple 7.1.2.** La sphère  $S^n$  est une variété de dimension  $n$ ; la boule  $B^n$  aussi. Le tore, la bouteille de Klein, l'espace projectif  $\mathbf{R}P^2$  sont des variétés de dimension 2 (des *surfaces*).

**Définition 7.1.3.** Soit  $X$  une variété, et  $x \in X$ . Les *groupes d'homologie locale en  $x$*  sont les groupes  $H_i(X, X - \{x\}; k)$ .

**Proposition 7.1.4.** Soit  $X$  une variété de dimension  $n$ , soit  $x \in X$  et  $\phi : U \rightarrow \Omega$  comme dans la définition.

- *Situation 1* : la dernière coordonnée  $x_n$  de  $\phi(x)$  est  $> 0$ . Alors le groupe  $H_i(X, X - \{x\}; k)$  est trivial pour  $i \neq n$  et vaut  $k$  pour  $i = n$ .
- *Situation 2* :  $\phi(x)$  a pour dernière coordonnée  $x_n = 0$ . Alors le groupe  $H_i(X, X - \{x\}; k)$  est nul pour tout  $i$ .

*Démonstration.* On se place dans le premier cas. Soit  $B \subset U$  homéomorphe à une boule fermée via  $\phi$ , et soit  $V$  son intérieur. On s'arrange pour que  $\phi(B)$  soit contenue dans l'ouvert  $\{x_n > 0\}$ . Clairement  $X - \{x\}$  est homotope à  $X - V$ . Par le lemme des 5 on trouve facilement  $H_i(X, X - \{x\}) = H_i(X, X - V)$ . Par la proposition 4.3.3, on a  $H_i(X, X - V) = \tilde{H}_i(X/X - V) = \tilde{H}_i(B/\delta B)$  où  $\delta B$  est le bord de  $B$ , qui est une sphère. Bien sûr  $B/\delta B$  est aussi une sphère, de dimension  $n$ , et le résultat suit.

Dans le deuxième cas, on procède de la même manière, mais  $B$  est une demi-boule, et  $\delta B$  une demi-sphère. Dans ce cas  $B/\delta B$  est contractile.  $\square$

**Corollaire 7.1.5.** *L'alternative ne dépend que du point  $x$ , pas du choix de  $\phi$ .*

En d'autres termes, soit  $x \in X$ . Alors :

1. Ou bien il existe un  $\phi$  tel qu'on est dans la situation 1 ci-dessus, et on n'est jamais dans la situation 2 pour *aucun*  $\phi$ ; ça se passe exactement lorsque les groupes d'homologie locale (qui dépendent que de  $x$ ) ne sont pas tous triviaux. On dit que  $x$  est à l'intérieur de  $X$ .
2. Ou bien, pour tout choix de  $\phi$  on est dans la situation 2; ça se passe lorsque les groupes d'homologie locale sont tous triviaux. On dit que  $x$  est *sur le bord* de  $X$ . Ces  $x$  forment le sous-ensemble fermé noté  $\partial X$  est appelé, sans surprise, le bord de  $X$ .

**Corollaire 7.1.6.** *Si  $X$  est une variété de dimension  $n$ , et si  $m \neq n$ , alors  $X$  n'est pas une variété de dimension  $m$ .*

En effet on retrouve  $n$  en regardant  $H_i(X, X - \{x\})$ .

**Corollaire 7.1.7.** *Si  $f : X \rightarrow Y$  est un homéomorphisme entre deux variétés, alors  $f$  induit un homéomorphisme entre  $\partial X$  et  $\partial Y$ , et entre l'intérieur de  $X$  et celui de  $Y$ . De plus  $X$  et  $Y$  ont la même dimension.*

En effet,  $H_i(X, X - \{x\}) = H_i(Y, Y - \{f(x)\})$  donc le bord est envoyé sur le bord.

Le résultat suivant est laissé en exercice (facile) :

**Proposition 7.1.8.** *Si  $X$  est une variété de dimension  $n$ , alors  $\partial X$  est une variété de dimension  $n - 1$  sans bord :  $\partial \partial X = \emptyset$ .*

## 7.2 Orientations

**Définition 7.2.1.** Soit  $X$  une variété sans bord de dimension  $n$ . (D'une manière générale la plupart des variétés dans le reste de ce chapitre seront sans bord, et de dimension  $n$ .)

Une  $k$ -orientation (locale) de  $X$  en  $x$  est un choix de générateur pour  $H_n(X, X - \{x\}; k) \cong k$ .

On dit que  $X$  est  $k$ -orientable lorsqu'il existe une  $k$ -orientation (globale) de  $X$ , c'est-à-dire une  $k$ -orientation  $\mu_x$  en  $x$  pour chaque  $x \in X$  vérifiant la condition de continuité suivante.

Soit  $B$  une boule fermée contenant  $x$ . Pour chaque  $y \in B$  on a un isomorphisme  $\rho_y : H_n(X, X - B) \rightarrow H_n(X, X - \{y\})$ . La condition de continuité est alors : pour tout  $x$  il existe une boule  $B$  et  $\mu_B \in H_n(X, X - B)$  tel que  $\rho_y(\mu_B) = \mu_y$  pour tout  $y \in B$ .

**Remarque 7.2.2.** 1. Un cas très simple est celui de  $k = \mathbf{F}_2$  : puisque  $\mathbf{F}_2$  n'a qu'un seul générateur, il est clair que toute variété est  $\mathbf{F}_2$ -orientable. De plus la  $\mathbf{F}_2$ -orientation de  $X$  est unique. C'est notre exemple principal.

2. Voici une esquisse de raisonnement qui donne des exemples de variétés  $\mathbf{Z}$ -orientables (et donc automatiquement  $k$ -orientables pour tout  $k$ , en prenant l'image par  $\mathbf{Z} \rightarrow k$ ). Nous n'avons pas le temps ici de donner tous les détails.
  - $\mathbf{R}^n$  est  $\mathbf{Z}$ -orientable (on prend une orientation en 0 et on la translate ailleurs).
  - Un ouvert de  $\mathbf{R}^n$  est donc aussi orientable.

- Si  $f : U \rightarrow V$  est un difféomorphisme tel que  $df_x$  a un déterminant  $> 0$  pour tout  $x$ , alors  $f$  est compatible avec les orientations canoniques de  $U$  et  $V$  (donc :  $f_*(\mu_x) = \mu_{f(x)}$ ). On dit que  $f$  préserve les orientations. (Il faut faire le lien entre le degré et le signe du déterminant : dans les exercices on a abordé des résultats de ce genre).
- Soit  $X$  une variété, et soit  $\phi_i : U_i \rightarrow \Omega_i$  comme dans la définition, avec  $\cup_i U_i = X$ . Si  $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$  est un difféomorphisme qui préserve les orientations (là où il est défini), alors on peut montrer que  $X$  est  $\mathbf{Z}$ -orientable.
- En particulier, si  $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbf{C}^n = \mathbf{R}^{2n}$ , et si  $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$  est holomorphe, alors la condition est remplie. On dit alors que  $X$  est une variété complexe, et donc les variétés complexes sont  $\mathbf{Z}$ -orientables.

Le théorème principal concernant les variétés orientées, en ce qui nous concerne, est le suivant.

**Théorème 7.2.3.** *Si  $X$  est  $k$ -orientée, et si  $K \subset X$  est compact, alors il existe un unique élément  $\mu_K \in H_n(X, X - K)$  tel que  $\rho_K(\mu_K) = \mu_x$  pour tout  $x \in K$ . Ici  $\rho_K$  est l'application*

$$H_n(X, X - K) \longrightarrow H_n(X, X - \{x\}).$$

Lorsque  $X$  est compacte, on peut prendre  $K = X$ , et on va écrire  $[X]$  pour  $\mu_K \in H_n(X)$ . C'est la *classe fondamentale* de  $X$ .

Par manque de temps, nous ne démontrerons pas ce théorème ici. La stratégie (résoudre le problème localement d'abord, globalement ensuite) est similaire à celle employée pour démontrer le théorème de Poincaré, que nous allons maintenant énoncer.

## 7.3 Dualité de Poincaré

On peut tout de suite énoncer le résultat principal de ce chapitre, dont on va esquisser une démonstration :

**Théorème 7.3.1** (Dualité de Poincaré). *Si  $X$  est une variété compacte de dimension  $n$ , sans bord, et  $k$ -orientée, alors  $H^i(X; k)$  est isomorphe à  $H_{n-i}(X; k)$  via le cap produit  $a \mapsto a \cap [X]$ .*

**Remarque 7.3.2.** Si  $X$  est connexe, on a  $H_0(X; k) = k$  et donc  $H^n(X; k) = k$ . De plus on a  $H^0(X; k) = k$  (calcul similaire à celui en homologie, laissé en exercice); donc  $H_n(X; k) = k$ . En outre  $H_n(X; k)$  est engendré par  $[X]$  (car  $1 \cap [X] = [X]$ ).

**Remarque 7.3.3.** Ce théorème permet de se forger une nouvelle intuition sur le cup produit. En effet, puisqu'on a des isomorphismes  $H^i(X) = H_{n-i}(X)$  et  $H^j(X) = H_{n-j}(X)$ , la multiplication en cohomologie donne une opération

$$H_{n-i}(X) \otimes H_{n-j}(X) \longrightarrow H_{n-(i+j)}(X),$$

qui envoie  $a \cap [X] \otimes b \cap [X]$  sur  $ab \cap [X]$ . Notons  $\sigma \cdot \tau$  le "produit" de  $\sigma \in H_{n-i}(X)$  et  $\tau \in H_{n-j}(X)$ . On peut alors montrer (c'est un peu compliqué) la chose suivante.

Soient  $U$  et  $V$  deux variétés orientées  $\subset X$ , de dimensions  $n - i$  et  $n - j$ . On suppose que  $U$  et  $V$  se “coupent proprement”, ce qui veut essentiellement dire que  $U \cap V$  est encore une variété (sa dimension est alors  $n - (i + j)$ ), et on va supposer qu’elle est orientée, par exemple parce que  $k = \mathbf{F}_2$  ou parce que c’est une variété complexe). Grâce à l’inclusion  $i : U \rightarrow X$ , on peut considérer la classe  $i_*([U]) \in H_{n-i}(X)$ , que l’on note  $[U]$  par simplicité. De même pour  $[V]$ . Alors :

$$[U] \cdot [V] = [U \cap V].$$

D’où la petite phrase sybilline : *le produit cup est le Poincaré-dual de l’intersection.*

Au passage, on peut aussi démontrer (mais alors là pour une fois, c’est franchement dur !) que pour  $k = \mathbf{F}_2$ , alors toute classe dans  $H_*(X; \mathbf{F}_2)$  est de la forme  $i_*([U])$  pour une sous-variété  $U$  avec une application  $i : U \rightarrow X$ , et c’est même vrai si  $X$  n’est pas une variété (théorème démontré par René Thom à Strasbourg).

## 7.4 La cohomologie des espaces projectifs

Avant de se pencher sur la preuve de la dualité de Poincaré, on va tout de suite donner l’application la plus fameuse.

**Définition 7.4.1.** On note  $\mathbf{R}P^n$  le quotient  $S^n/x \sim -x$ . En d’autres termes, on identifie un point sur la sphère avec le point antipodal. (Ou encore,  $\mathbf{R}P^n$  est l’ensemble des orbites du groupe  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  agissant sur  $S^n$  par l’application antipodale.)

Exercice : pour  $n = 2$ , vérifier que ceci est cohérent avec la définition précédente.

**Théorème 7.4.2.** *Les groupes d’homologie modulo 2 de  $\mathbf{R}P^n$  sont donnés par*

$$H_i(\mathbf{R}P^n; \mathbf{F}_2) = \begin{cases} \mathbf{F}_2 & \text{pour } 0 \leq i \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Démonstration.* On peut mettre sur  $S^n$  une structure de CW-complexe avec 2 cellules en chaque dimension. Par suite, on a une structure de CW-complexe sur  $\mathbf{R}P^n$  avec une cellule et une seule en chaque dimension. Le  $m$ -squelette de  $\mathbf{R}P^n$  est précisément  $\mathbf{R}P^m$ , et le complexe cellulaire est de la forme

$$0 \longrightarrow \mathbf{F}_2 \xrightarrow{\partial_n} \mathbf{F}_2 \longrightarrow \dots \xrightarrow{\partial_1} \mathbf{F}_2 \longrightarrow 0.$$

Donc il s’agit de montrer que  $\partial_n = 0$ , pour chaque  $n$ .

Cette application est donné par la multiplication par le degré de l’application suivante :

$$f : S^{n-1} \xrightarrow{p} \mathbf{R}P^{n-1}/\mathbf{R}P^{n-2} \longrightarrow S^{n-1}.$$

Ici  $p$  est l’application quotient qui définit  $\mathbf{R}P^{n-1}$ . La dernière flèche est l’identification canonique.

On vérifie alors les assertions suivantes. Soit  $p$  le pôle nord de  $S^n$ , et  $-p$  le pôle sud. Alors il existe un voisinage  $U$  de  $p$  tel que  $f$  donne un homéomorphisme  $f_U : U \rightarrow f(U)$ . Au voisinage de  $-p$ , on prend  $V = -U$ , et on constate que  $f_V = f_U \circ a$  où  $a$  est l’application antipodale.

On utilise alors la méthode développée dans les exercices du chapitre précédent pour calculer le degré. Soit  $\varepsilon = \pm 1$  le degré local en  $p$  (en choisissant bien l'identification de  $\mathbf{R}P^{n-1}/\mathbf{R}P^{n-2}$  et  $S^{n-1}$  on peut s'arranger pour que  $\varepsilon = +1$ , mais peu importe). Soit  $\varepsilon' = \pm 1$  le degré en  $-p$ . Alors le degré de  $f$  est  $\varepsilon + \varepsilon'$ ; mais on calcule modulo 2, donc le degré est 0. Le résultat suit.

Soyons un peu plus précis (pour le plaisir). Le degré en  $-p$ , d'après ce qui précède, est  $(-1)^n \varepsilon$ , puisque l'application antipodale sur  $S^{n-1}$  est de degré  $(-1)^n$ . Le degré est donc  $\varepsilon(1 + (-1)^n)$ , donc  $\pm 2$  si  $n$  est pair, et 0 sinon. Avec ça vous pouvez calculer l'homologie à coefficients dans  $\mathbf{Z}$  (faites-le!).  $\square$

**Théorème 7.4.3.** *L'anneau de cohomologie modulo 2 de  $\mathbf{R}P^n$  est*

$$H^\bullet(\mathbf{R}P^n; \mathbf{F}_2) = \frac{\mathbf{F}_2[x]}{(x^{n+1})},$$

où  $x \in H^1(\mathbf{R}P^n; \mathbf{F}_2)$ .

*Démonstration.* La cohomologie est duale de l'homologie, donc  $H^i(\mathbf{R}P^n; \mathbf{F}_2) = \mathbf{F}_2$  pour  $0 \leq i \leq n$  (et 0 sinon), d'après le théorème précédent. Soit  $x$  l'élément non-nul de  $H^1(\mathbf{R}P^n; \mathbf{F}_2)$ . Il s'agit de montrer que  $x^i$  est l'élément non-nul de  $H^i$  pour  $1 \leq i \leq n$ .

Commençons par regarder le cas  $n = 2$  : on veut vérifier que  $x^2 \neq 0$ . Par dualité de Poincaré, cela revient à vérifier si  $x^2 \cap [\mathbf{R}P^2] \neq 0 \in H_0$ . Il est également équivalent de vérifier s'il existe une classe de cohomologie  $a \in H^0$  telle que  $\langle a, x^2 \cap [\mathbf{R}P^2] \rangle \neq 0$ . Ici la seule classe de cohomologie non-nulle est  $a = 1$ , et par définition du produit cap on peut écrire

$$\begin{aligned} \langle 1, x^2 \cap [\mathbf{R}P^2] \rangle &= \langle x^2, [\mathbf{R}P^2] \rangle \\ &= \langle x, x \cap [\mathbf{R}P^2] \rangle. \end{aligned}$$

Mais la dualité de Poincaré, encore elle, nous assure que  $x \cap [\mathbf{R}P^2]$  est l'élément non-nul de  $H_1$ . Comme  $x$  est la seule classe non-nulle de  $H^1$ , sa valeur sur  $x \cap [\mathbf{R}P^2]$ , c'est-à-dire  $\langle x, x \cap [\mathbf{R}P^2] \rangle$  doit être  $\neq 0$ . Donc le théorème est vrai pour  $n = 2$ .

Il est très facile maintenant de faire une récurrence. Supposons le théorème montré pour  $n$  et regardons  $\mathbf{R}P^{n+1}$ . Comme le  $n$ -squelette de cet espace est  $\mathbf{R}P^n$ , il est bien clair que l'application  $i^* : H^1(\mathbf{R}P^{n+1}; \mathbf{F}_2) \rightarrow H^1(\mathbf{R}P^n; \mathbf{F}_2)$  induite par l'inclusion  $i : \mathbf{R}P^n \rightarrow \mathbf{R}P^{n+1}$  envoie  $x$  sur  $x$  (d'où l'abus de notations, d'ailleurs). Ce  $i^*$  est un morphisme d'anneaux, donc on a certainement  $x^i \neq 0$  pour  $1 \leq i \leq n$ , dans la cohomologie de  $\mathbf{R}P^{n+1}$ , puisque  $i^*$  l'envoie sur un élément non-nul.

Reste à voir que  $x^{n+1} \neq 0$ . C'est le même raisonnement que pour  $n = 2$ , et on est amenés à écrire :

$$\begin{aligned} \langle 1, x^{n+1} \cap [\mathbf{R}P^{n+1}] \rangle &= \langle x^{n+1}, [\mathbf{R}P^{n+1}] \rangle \\ &= \langle x^n, x \cap [\mathbf{R}P^{n+1}] \rangle \neq 0. \end{aligned}$$

$\square$

## 7.5 Quelques points techniques

**Définition 7.5.1.** Soit  $I$  un ensemble avec un ordre partiel. Soit  $A_i$  un  $k$ -module pour chaque  $i \in I$ , et supposons donné un morphisme  $\phi_{ij} : A_i \rightarrow A_j$  à chaque fois que  $i < j$ .

Alors la *limite directe* de ce “système” est le  $k$ -module

$$A = \varinjlim A_i$$

défini comme suit : on prend  $A' = \bigoplus_{i \in I} A_i$ , et on appelle  $B$  le sous-module de  $A'$  engendré par les éléments de la forme  $a_i - \phi_{ij}(a_j)$ . Ensuite  $A = A'/B$ .

Ce module  $A$  est *caractérisé* par la propriété suivante. Soit  $C$  un module, et supposons que l'on a un morphisme  $f_i : A_i \rightarrow C$  pour chaque  $i \in I$ , de telle sorte que  $f_i = f_j \circ \phi_{ij}$ . Alors il existe un unique morphisme  $f : A \rightarrow C$  tel que  $f \circ \iota_i = f_i$ , où  $\iota_i : A_i \rightarrow A$  est l'application évidente.

**Exemple 7.5.2.** On peut prendre les  $\mathbf{R}^n$ , pour  $n \geq 1$  et avec les applications

$$\phi_{nm}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0).$$

La limite directe, notée  $\mathbf{R}^\infty$ , est le  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel des suites de réels qui sont 0 au-delà d'un certain rang.

**Définition 7.5.3.** Soit  $X$  un espace topologique. La *cohomologie à support compact* de  $X$  est donnée par

$$H_{cpt}^i(X) = \varinjlim H^i(X, X - K),$$

où  $K$  parcourt tous les compacts  $\subset X$ .

**Remarque 7.5.4.** 1. Lorsque  $K_1 \subset K_2$ , on a une inclusion  $(X, X - K_2) \rightarrow (X - K_1)$  et donc bien un morphisme

$$H^i(X, X - K_1) \longrightarrow H^i(X, X - K_2).$$

2. Lorsque  $X$  est compact, on voit facilement que  $H_{cpt}^i(X) = H^i(X)$ .

**Définition 7.5.5.** On va esquisser une généralisation du produit cap. Tout d'abord, on peut construire un produit

$$\cap : H^i(X, A) \otimes H_n(X, A \cup B) \longrightarrow H_{n-i}(X, B).$$

Prenant  $K \subset X$  un compact, on a donc une application

$$H^i(X, X - K) \otimes H_n(X, X - K) \longrightarrow H_{n-i}(X).$$

En particulier lorsque  $X$  est une variété orientée, on peut regarder

$$H^i(X, X - K) \xrightarrow{\cap \mu_K} H_{n-i}(X),$$

où  $\mu_K$  est la classe d'orientation comme ci-dessus. On vérifie que ces applications, lorsque  $K$  varie, vérifient la compatibilité comme dans la définition 7.5.1. Donc on peut les combiner en une seule application

$$D : H_{cpt}^i(X) \longrightarrow H_{n-i}(X).$$

## 7.6 Preuve de la dualité de Poincaré

On va montrer (ou presque) le théorème plus fort suivant :

**Théorème 7.6.1.** *L'application*

$$D : H_{cpt}^i(X; k) \longrightarrow H_{n-i}(X; k),$$

où  $X$  est une variété  $k$ -orientable, est un isomorphisme.

Lorsque  $X$  est une variété compacte, on retrouve le théorème de Poincaré. L'intérêt de la formulation ci-dessus est qu'elle va nous permettre de travailler localement, avec des sous-espaces de  $X$  nécessairement non-compacts, puis de recoller les morceaux.

*Démonstration. Étape 1.* Le cas  $X = \mathbf{R}^n$ . Pour toute boule compacte  $B \subset X$ , on a  $H_n(X, X - B) \cong k$ , et un générateur possible est  $\mu_B$ . On a aussi  $H^n(X, X - B) \cong k$ . On peut montrer que l'on peut choisir un générateur  $a \in H^n(X, X - B)$  tel que  $\langle a, \mu_B \rangle = 1$  : c'est même trivial lorsque  $k$  est un corps. (Pour  $k = \mathbf{Z}$  c'est l'exercice 39.)

On écrit alors

$$\langle 1, a \cap \mu_B \rangle = \langle a, \mu_B \rangle = 1.$$

Il est donc bien clair que  $a \cap \mu_B$  est un générateur de  $H_0(\mathbf{R}^n) = k$ . Ainsi  $\cap \mu_B$  établit un isomorphisme entre  $H^*(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - B)$  et  $H_{n-*}(\mathbf{R}^n)$ . Ensuite on passe à la limite sur  $B$ .

*Étape 2.* Supposons que  $X = U \cup V$  et que le théorème est vrai pour  $U, V$  et  $U \cap V$ . Alors on montre que le résultat est vrai pour  $X$  à l'aide d'un argument à la Mayer-Vietoris (avec évidemment le lemme des 5 au dernier moment).

*Étape 3.* Supposons que  $X = \cup_n V_n$  avec  $V_n \subset V_{n+1}$ , où  $V_n$  est un ouvert pour lequel le théorème est vrai. Alors on montre que

$$H_{cpt}^i(X) = \varinjlim H_{cpt}^i(V_n)$$

et

$$H_i(X) = \varinjlim H_i(V_n).$$

On en déduit que le résultat est vrai pour  $X$ .

*Étape 4.*  $X$  est un ouvert quelconque de  $\mathbf{R}^N$ . Alors  $X$  est une union dénombrable de boules ouvertes  $B_i$ , qui sont homéomorphes à  $\mathbf{R}^N$ . Le théorème est donc vrai pour  $B_i$ . On pose  $V_n = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$ . Si on peut montrer que le théorème est vrai pour  $V_n$ , alors il le sera pour  $X$  d'après l'étape 3. On fait alors une récurrence sur  $n$  pour montrer la chose suivante : le théorème est vrai pour une réunion de  $n$  ouverts convexes de  $\mathbf{R}^n$ . Pour  $n = 1$ , on note que si  $C$  est convexe, alors  $C$  est homéomorphe à  $\mathbf{R}^N$ . Pour passer de  $n$  à  $n + 1$  on utilise l'étape 2.

*Étape 5.* Cas général (presque pareil que l'étape précédente). La variété  $X$  est une union dénombrable de boules ouvertes  $B_i$ , qui sont homéomorphes à  $\mathbf{R}^n$ . Le théorème est donc vrai pour  $B_i$  (étape 1). On pose  $V_n = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$ . D'après l'étape 2, le théorème est vrai pour  $V_n$ , puisque les intersections sont des ouverts de  $\mathbf{R}^n$  (cf étape 4). D'après l'étape 3, il est vrai pour  $X$ .  $\square$

# Exercices

**Exercice 38.** (Espaces projectifs complexes.)

Soit  $K$  un corps. On note

$$\mathbf{P}^n(K) = \{\text{lignes dans } K^{n+1}\}.$$

C'est donc le quotient de  $K^{n+1} - \{0\}$  par la relation  $v \sim \lambda v$  pour tout  $\lambda \in K$ .

1. Pour  $K = \mathbf{R}$ , l'espace  $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$  est noté  $\mathbf{R}P^n$ . Vérifier que ceci coïncide avec la définition donnée dans le cours.
2. On se concentre sur le cas  $K = \mathbf{C}$ , et on note  $\mathbf{C}P^n$  pour  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  (c'est la tradition). Montrer que  $\mathbf{C}P^n$  est un quotient de la sphère  $S^{2n+1}$ .
3. On regarde  $\mathbf{C}P^n$  comme un quotient de  $\mathbf{C}^{n+1} - \{0\}$ . Soit alors  $f : B^{2n} \rightarrow \mathbf{C}P^n$  définie par

$$f(z_0, z_1, \dots, z_{n-1}) = [z_0 : z_1 : \dots : z_{n-1} : \left(1 - \sum |z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}].$$

(On note  $[z_0 : z_1 : \dots : z_n]$  la classe de  $(z_0, \dots, z_n)$  dans le quotient.)

Montrer que  $f$  envoie le bord de  $B^{2n}$  sur  $\mathbf{C}P^{n-1} \subset \mathbf{C}P^n$ .

Soit  $f_0$  la restriction de  $f$  au bord de  $B^{2n}$ . Montrer qu'on a un homéomorphisme

$$\mathbf{C}P^{n-1} \cup_{f_0} B^{2n} \longrightarrow \mathbf{C}P^n.$$

4. En déduire que  $\mathbf{C}P^n$  a une structure de CW-complexe avec une cellule en chaque dimension *paire*  $2j$  pour  $0 \leq j \leq n$ . Puis, établir que

$$H_i(\mathbf{C}P^n; \mathbf{Z}) = \begin{cases} \mathbf{Z} & \text{pour } i = 2j, 1 \leq j \leq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

5. On va admettre que  $\mathbf{C}P^n$  est une variété complexe (de "dimension complexe"  $n$ , c'est-à-dire que sa dimension en tant que variété est  $2n$ ). Elle est donc  $\mathbf{Z}$ -orientée, et donc  $k$ -orientée pour tout anneau  $k$ .

Montrer alors que

$$H^i(\mathbf{C}P^n; k) = \begin{cases} k & \text{pour } i = 2j, 1 \leq j \leq n, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour tout anneau  $k$ .

*Attention, lorsque  $k$  n'est pas un corps, la cohomologie n'est pas le dual de l'homologie en général. On a au moins trois options : la cohomologie cellulaire, en faisant  $\text{Hom}(-, k)$  sur le complexe cellulaire ; l'exercice 39 ci-dessous ; ou alors la dualité de Poincaré.*

6. À l'aide de la dualité de Poincaré, montrer que, lorsque  $k$  est un corps,

$$H^\bullet(\mathbf{C}P^n; k) = \frac{k[x]}{(x^{n+1})},$$

où  $x \in H^2(\mathbf{C}P^n; k)$ .

*C'est assez similaire au cas de  $\mathbf{R}P^n$ .*

7. Montrer que

$$H^\bullet(\mathbf{C}P^n; \mathbf{Z}) = \frac{\mathbf{Z}[x]}{(x^{n+1})},$$

où  $x \in H^2(\mathbf{C}P^n; \mathbf{Z})$ .

*La seule différence, c'est que l'on a besoin de savoir que  $H^i(\mathbf{C}P^n; \mathbf{Z}) = \text{Hom}(H_i(\mathbf{C}P^n; \mathbf{Z}), \mathbf{Z})$ . C'est une conséquence de l'exercice 39 ci-dessous.*

*Pour une autre approche, qui est souvent employée aussi, voir les questions suivantes.*

8. Soit  $p$  un nombre premier et  $\mathbf{F}_p$  le corps à  $p$  éléments. Pour tout espace  $X$  on a un morphisme

$$H^i(X; \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{F}_p \longrightarrow H^i(X; \mathbf{F}_p).$$

Montrer lorsque  $X$  est une sphère  $S^m$ , l'application ci-dessus est un isomorphisme.

*On peut regarder directement le complexe singulier ; c'est purement algébrique.*

9. Vérifier que  $\mathbf{C}P^1 = S^2$ .  
10. A l'aide des deux questions précédentes montrer que

$$H^\bullet(\mathbf{C}P^n; \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{F}_p \rightarrow H^\bullet(\mathbf{C}P^n; \mathbf{F}_p)$$

est un morphisme surjectif, pour tout  $p$ .

11. En déduire comme ci-dessus que

$$H^\bullet(\mathbf{C}P^n; \mathbf{Z}) = \frac{\mathbf{Z}[x]}{(x^{n+1})},$$

où  $x \in H^2(\mathbf{C}P^n; \mathbf{Z})$ .

**Exercice 39.** On va montrer le résultat suivant. *L'application*

$$\theta : H^n(X; \mathbf{Z}) \rightarrow \text{Hom}(H_n(X; \mathbf{Z}), \mathbf{Z})$$

*est toujours surjective. Si de plus  $H_{n-1}(X; \mathbf{Z})$  est libre (ou 0), alors c'est un isomorphisme.* Il existe également une version en homologie relative.

1. Montrer le résultat préliminaire suivant : soient  $A \subset B$  des groupes abéliens tels que  $B/A$  est un  $\mathbf{Z}$ -module libre. Alors il existe  $A'$  tel que  $A \oplus A' = B$ .
2. Montrer qu'il existe  $E$  tel que  $\ker \partial_n \oplus E = C_n(X)$ . En déduire que  $\theta$  est surjective.

3. Soit  $a \in \ker d_n$  tel que  $\langle a, \sigma \rangle = 0$  pour tous les  $\sigma \in \ker \partial_n$ . On veut montrer que  $a = d(b)$  pour un certain  $b$  : ceci montrera que  $\theta$  est injective. Pour commencer, montrer que  $a$  définit une application

$$\tilde{b} : \mathcal{I}m(\partial_n) \longrightarrow \mathbf{Z},$$

que l'on pourrait aussi noter  $a \circ \partial^{-1} \dots$

4. Montrer que  $\mathcal{I}m(\partial_n) \oplus F = C_{n-1}(X)$  pour un certain  $F$ . En déduire que  $a = d(b)$  pour un certain  $b$ .

Deuxième partie

**Groupe fondamental**

## Chapitre 8

# Groupes d'homotopie

### 8.1 Homotopies relatives

**Définition 8.1.1.** Si  $f$  et  $g$  sont des applications  $X \rightarrow Y$  qui sont égales sur  $A \subset X$ , on dit qu'une homotopie  $F: X \times I \rightarrow Y$  entre  $f$  et  $g$  est une homotopie relativement à  $A$ , où  $\text{rel } A$  pour abrégé, lorsque  $F(a, t) = f(a) = g(a)$  pour tout  $a \in A$  et  $0 \leq t \leq 1$ .

**Exemple 8.1.2.** Par exemple, si  $f, g: [0, 1] \rightarrow X$  sont deux chemins tels que  $f(0) = g(0)$  et  $f(1) = g(1)$ , dire que  $f$  et  $g$  sont homotopes  $\text{rel } \{0, 1\}$  signifie qu'il existe une homotopie  $F: [0, 1]^2 \rightarrow X$  entre les deux (donc  $F(t, 0) = f(t)$ ,  $F(t, 1) = g(t)$ ) avec  $F(0, t) = f(0) = g(0)$  et  $F(1, t) = f(1) = g(1)$ .

Lorsque  $A = \{*\}$  on se passe souvent des accolades, et on écrit

$$[(X, *), (Y, *)]$$

pour l'ensemble des *applications pointées* (i.e. qui envoient  $*$  sur  $*$ ) modulo les *homotopies pointées* (i.e.  $\text{rel } \{*\}$ ). Tout ceci définit la catégorie homotopique pointée  $\mathcal{HoTop}_*$ .

### 8.2 Groupes d'homotopie

On fixe un choix de point-base  $* \in S^n$  pour tout  $n \geq 0$ .

**Définition 8.2.1.** Soit  $X$  un espace topologique et soit  $* \in X$ . Pour  $n \geq 0$  on note

$$\pi_n(X, *) = [(S^n, *), (X, *)].$$

**Exemple 8.2.2.** Explorons d'abord le cas  $n = 0$ . On a  $S^0 = \{1, -1\}$ , et disons que le point-base est  $* = 1$ . Une application  $f: (S^0, *) \rightarrow (X, *)$  est donc la donnée du point  $x = f(-1)$ . Une homotopie pointée entre  $f$  et  $g$  est une application  $F: S^0 \times [0, 1] \rightarrow X$  qui est constante (de valeur  $*$ ) sur  $\{1\} \times [0, 1]$ , alors que sur  $\{-1\} \times [0, 1]$  la restriction de  $F$  donne un chemin entre  $x = f(-1)$  et  $y = g(-1)$ .

Conclusion :  $\pi_0(X, *)$  est l'ensemble des composantes connexes par arcs de  $X$ . (Et l'apparition du point  $*$  est tout-à-fait artificielle dans la définition, mais elle est importante pour les autres valeurs de  $n$  et on souhaite une théorie unifiée.)

Nous allons voir maintenant que pour  $n \geq 1$ , l'ensemble  $\pi_n(X, *)$  est en fait un groupe. Pour cela commençons par noter  $I = [0, 1]$ , de sorte que  $I^n$  est homéomorphe à la boule unité  $B^n$ ; la sphère  $S^n$  sera identifiée dans la discussion qui suit avec  $I^n/\partial I^n$  (où  $\partial I^n$  désigne la frontière dans  $\mathbf{R}^n$ , homéomorphe à  $S^{n-1}$ ). On a

$$\pi_n(X, *) = [(I^n, \partial I^n), (X, *)].$$

**Définition 8.2.3.** Soient  $f$  et  $g$  deux éléments de  $\pi_n(X, *)$ . Leur produit  $f \star g$  est défini par (la classe d'homotopie de l'application suivante)

$$(f \star g)(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} f(t_1, \dots, 2t_n) & \text{pour } t_n \leq \frac{1}{2}, \\ g(t_1, \dots, 2t_n - 1) & \text{pour } t_n \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

**Lemme 8.2.4.** *Le produit défini ci-dessus est une loi de groupe sur  $\pi_n(X, *)$ , pour  $n \geq 1$ .*

*Démonstration.* Il faut montrer l'existence d'un élément neutre (c'est la fonction constante) et d'un inverse (c'est la fonction obtenue en « remplaçant  $t_n$  par  $1 - t_n$  »), et nous laissons ceci en exercice; montrons l'associativité. On fait la démonstration pour  $n = 1$  par simplicité (c'est clairement pareil pour les autres valeurs de  $n$ ).

La différence entre  $f \star (g \star h)$  et  $(f \star g) \star h$  est une reparamétrisation. Pour être plus précis, soit  $\psi: I \rightarrow I$  la fonction affine par morceaux telle que  $\psi(0) = 0$ ,  $\psi(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ ,  $\psi(\frac{3}{4}) = \frac{1}{2}$  et  $\psi(1) = 1$ . Alors  $f \star (g \star h) \circ \psi = (f \star g) \star h$ .

Mais  $\psi$  est homotope à l'identité de  $I$  (faire un dessin!). Si  $F$  est une telle homotopie, alors  $f \star (g \star h) \circ F$  est une homotopie entre  $f \star (g \star h)$  et  $(f \star g) \star h$  qui est constante sur  $\{0, 1\} \times I$ , comme on le souhaitait.  $\square$

Dans les exercices nous montrerons :

**Proposition 8.2.5.** *Pour  $n \geq 2$ , le groupe  $\pi_n(X, *)$  est commutatif.*

Dans ce cours nous allons surtout étudier  $\pi_1(X, *)$ , qui est très particulier. On l'appelle le *groupe fondamental de  $X$*  (en  $*$ ). Soyons donc explicites : le groupe fondamental de  $X$  est le groupe des « lacets », c'est-à-dire les fonctions

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow X$$

telles que  $\gamma(0) = \gamma(1) = *$ ; deux lacets sont considérés égaux dans ce groupe s'il existe une homotopie entre eux, qui fixe le point-base  $*$  à chaque instant; et la loi de groupe est définie en « concaténant » les lacets. (Dans les exercices nous verrons comment le choix du point-base  $*$  dans  $X$  influence le groupe fondamental – en fait, très peu.) L'inverse de  $\gamma$  est le lacet  $t \mapsto \gamma(1-t)$ , noté  $\gamma^{-1}$ . Le groupe fondamental est un foncteur de  $\mathcal{H}o\mathcal{T}op_*$  vers la catégorie des groupes. Il est bon de faire tout de suite quelques dessins pour se convaincre que  $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$  possède un groupe fondamental non-trivial.

Finissons ce paragraphe avec quelques commentaires sur les liens entre les  $\pi_n$  lorsque  $n$  varie. Appelons

$$\Omega X = \{f: (S^1, *) \rightarrow (X, *)\},$$

l'ensemble des lacets sur  $X$ , un point-base  $*$   $\in X$  ayant été choisi; il y a également un point-base dans  $\Omega X$ , à savoir le lacet constant. D'autre part,

rappelons que  $S^1 \wedge X$  est la « suspension réduite » de  $X$  (cf exercice 2), munie de son point-base canonique  $*$ . On s'aperçoit alors que se donner une application

$$(X, *) \longrightarrow (\Omega Y, *)$$

revient exactement à se donner une application

$$(S^1 \wedge X, *) \longrightarrow (Y, *).$$

(D'une manière générale si  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des ensembles, se donner une fonction  $A \rightarrow C^B$ , où  $C^B$  est l'ensemble des fonctions  $B \rightarrow C$ , revient à se donner une fonction  $A \times B \rightarrow C$ ; le résultat ci-dessus découle de ça).

Mais nous avons évité de parler de continuité. Dans les exercices nous décrirons la topologie « compacte-ouverte » sur  $\Omega X$  et nous montrerons que l'équivalence ci-dessus est valable pour les applications continues; il y a même une bijection

$$[(S^1 \wedge X, *), (Y, *)] = [(X, *), (\Omega Y, *)].$$

Or on a :

**Lemme 8.2.6.**  $S^1 \wedge S^{n-1}$  est homéomorphe à  $S^n$ .

*Démonstration.* En effet  $S^1 \wedge S^{n-1} \setminus \{*\} \cong \mathbf{R}^{n-1} \times ]0, 1[ \cong \mathbf{R}^n$ . Il n'y a qu'une façon de rajouter un point à  $\mathbf{R}^n$  pour obtenir un espace compact, à homéomorphisme près (exercice facile), donc en particulier  $S^1 \wedge S^{n-1}$  est homéomorphe à  $S^n$ .  $\square$

On a donc des bijections

$$\pi_n(X, *) = [(S^1 \wedge S^{n-1}, *), (X, *)] = [(S^{n-1}, *), (\Omega X, *)] = \pi_{n-1}(\Omega X, *).$$

Pour  $n = 1$  par exemple, on voit bien qu'un élément du groupe fondamental de  $X$  est une composante connexe de  $\Omega X$ .

Finalement nous montrerons que ces bijections sont en fait des isomorphismes de groupes (y compris pour  $n = 1$ , alors même que  $\pi_0$  n'est pas un groupe en général, mais  $\pi_0$  d'un espace de lacets possède une structure de groupe). En principe donc, il n'y pas de restriction à n'étudier que  $\pi_1$ , ou même que  $\pi_0$ ... En pratique ceci dit, les techniques pour étudier  $\pi_1(X)$  sont bien spécifiques, et fonctionnent particulièrement bien lorsqu'on sait faire des dessins avec  $X$ , ce qui est difficile lorsque  $X = \Omega Y$ .

### 8.3 Le théorème de Hurewicz

Rappelons que pour tout groupe  $G$ , on note  $G^{ab} = G/[G, G]$  l'abélianisé de  $G$  (cf exercice 18). Nous allons montrer :

**Théorème 8.3.1 (Hurewicz).** *Soit  $X$  connexe par arcs. Il existe un isomorphisme*

$$\pi_1(X, *)^{ab} \cong H_1(X, \mathbf{Z}).$$

*Cet isomorphisme est naturel (c'est-à-dire que l'on a une transformation de foncteurs).*

La démonstration va occuper la fin de cette partie. On va utiliser la définition « singulière » de l'homologie, c'est-à-dire

$$H_1(X, \mathbf{Z}) = Z_1(X)/B_1(X),$$

où  $Z_1(X) = \ker \partial_1$  et  $B_1(X) = \text{Im } \partial_2$  sont des sous-groupes de  $C_1(X)$ , lui-même le groupe abélien libre sur les 1-simplexes singuliers  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ .

On va choisir un point-base  $*$   $\in X$ , et pour tout  $x \in X$  on choisit une fois pour toutes un chemin  $\lambda_x$  de  $*$  à  $x$ . Pour  $\lambda_*$  on choisit le chemin constant. On peut alors tout de suite définir

$$\psi: C_1(X) \longrightarrow \pi_1(X, *)^{ab}$$

en envoyant  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  vers  $\lambda_{\gamma(0)} \star \gamma \star \lambda_{\gamma(1)}^{-1}$ . Attention, ici on écrit  $\star$  pour la concaténation de deux chemins exactement comme dans la définition 8.2.3, même s'il ne s'agit pas de lacets : l'opération  $f \star g$  a un sens dès que  $f(1) = g(0)$ .

**Lemme 8.3.2.** *L'application  $\psi$  envoie  $B_1(X)$  sur  $\{1\}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\sigma$  un 2-simplexe ; on veut montrer que  $\psi(\partial\sigma)$  est représenté par le chemin constant.

Appelons  $f, g, h$  les 1-simplexes sur les 3 côtés de  $\sigma$ , dans l'ordre des aiguilles d'une montre. Un calcul direct montre que  $\psi(\partial\sigma)$  est par définition représenté par  $\lambda_x \star f \star g \star h \star \lambda_x^{-1}$ , où  $x = f(0)$ . Or l'existence même de  $\sigma: \Delta^2 \rightarrow X$  donne une homotopie entre  $f \star g \star h$  et le chemin constant en  $x$ .  $\square$

On en déduit l'existence d'une application, que l'on va encore appeler  $\psi$  :

$$\psi: H_1(X, \mathbf{Z}) \longrightarrow \pi_1(X, *)^{ab}.$$

Il nous faut une application dans l'autre sens. Étant donné  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  représentant un lacet, donc un élément de  $\pi_1(X, *)$ , on peut le voir aussi comme un cycle, c'est-à-dire un élément de  $Z_1(X)$ . On a envie de définir  $\phi$  en posant  $\phi(\gamma) = \gamma \in Z_1(X)$ , mais il faut vérifier que cela ne dépend que de l'élément correspondant  $[\gamma] \in \pi_1(X, *)$ .

**Lemme 8.3.3.** *1. Si  $\gamma$  et  $\gamma'$  représentent le même élément de  $\pi_1(X, *)$ , alors  $\gamma - \gamma' \in B_1(X)$ . Donc  $\phi$  est bien définie comme application  $\pi_1(X, *) \rightarrow H_1(X, \mathbf{Z})$ .*

*2.  $\phi(\gamma \star \gamma') = \gamma + \gamma'$  modulo  $B_1(X)$ . Donc  $\phi$  est un homomorphisme.*

*Démonstration.* (1) Soit  $I = [0, 1]$ , et soit  $p: I \times I \rightarrow \Delta^2$  l'application qui écrase le côté  $\{0\} \times I$ . Une homotopie  $F: I \times I \rightarrow X$  entre  $\gamma$  et  $\gamma'$  qui garde les extrémités fixes se factorise par  $p$ , et donne une application  $\sigma: \Delta^2 \rightarrow X$ , donc un 2-simplexe. Le bord de ce 2-simplexe est  $\partial\sigma = \gamma - \gamma' +$  chemin constant. Or le chemin constant est un bord, et même le bord du 2-simplexe constant. Finalement  $\gamma - \gamma'$  est un bord.

(2) Sur le triangle  $\Delta^2$ , on définit une application  $\sigma$  vers  $X$  comme suit. On met  $\gamma$  sur un côté,  $\gamma'$  sur le côté suivant, et on impose à  $\sigma$  d'être constante sur les lignes perpendiculaires au troisième côté. En particulier,  $\sigma$  coïncide avec  $\gamma \star \gamma'$  sur le troisième côté, et son bord est  $\gamma - \gamma \star \gamma' + \gamma'$ .  $\square$

Puisque  $H_1(X, \mathbf{Z})$  est abélien,  $\phi$  donne un homomorphisme

$$\phi: \pi_1(X, *)^{ab} \longrightarrow H_1(X, \mathbf{Z}).$$

On a clairement  $\psi(\phi(\gamma)) = \gamma$ . Dans l'autre sens,  $\phi(\psi(\gamma))$  est le 1-simplexe défini par  $\lambda_{\gamma(0)} \star \gamma \star \lambda_{\gamma(1)}^{-1}$ , et bien sûr  $\gamma(0) = \gamma(1)$  pour  $\gamma \in Z_1(X)$ . Par le (2) du lemme précédent, qui s'applique aux chemins qui ne sont pas des lacets avec la même démonstration, on a donc

$$\phi(\psi(\gamma)) = \lambda_{\gamma(0)} + \gamma + \lambda_{\gamma(0)}^{-1}.$$

Pour achever complètement la démonstration du théorème, on montre :

**Lemme 8.3.4.** *Soit  $f$  un chemin dans  $X$ . Alors l'élément  $f + f^{-1} \in B_1(X)$ .*

*Démonstration.* On construit  $\sigma: \Delta^2 \rightarrow X$  en mettant  $f$  sur un côté, et en imposant à  $\sigma$  d'être constante sur les lignes parallèles à un autre côté. Sur le troisième côté on a  $f^{-1}$ , et le bord  $\partial\sigma$  est, au signe près,  $f + f^{-1} +$  chemin constant.  $\square$

## 8.4 Quelques théorèmes sans démonstration

Pour votre culture générale, voici quelques théorèmes sans démonstration aucune. Tout d'abord le théorème de Hurewicz, qui donne des informations sur  $\pi_1(X)$  sous l'hypothèse que  $\pi_0(X)$  est trivial, possède une variante pour les autres valeurs de  $n$ .

**Théorème 8.4.1** (Hurewicz). *Soit  $X$  un espace tel que  $\pi_0(X) = \pi_1(X, *) = 1$ . Alors pour  $n \geq 2$  les conditions suivantes sont équivalentes :*

1.  $\pi_k(X, *) = 1$  pour  $0 \leq k < n$ ,
2.  $H_k(X, \mathbf{Z}) = 0$  pour  $0 \leq k < n$ .

*De plus (et surtout!), si ces conditions sont remplies, il existe un isomorphisme*

$$\pi_n(X, *) \cong H_n(X, \mathbf{Z}).$$

Dans un chapitre ultérieur, nous montrerons que  $\pi_1(S^n) = 1$  pour  $n \geq 2$ . On déduit donc du théorème :

**Corollaire 8.4.2.**  $\pi_n(S^n) \cong \mathbf{Z}$ .

(A priori c'est pour  $n \geq 2$ , mais déjà dans les exercices de ce chapitre nous établirons que  $\pi_1(S^1) \cong \mathbf{Z}$ .)

Citons aussi le très célèbre théorème de Whitehead :

**Théorème 8.4.3** (Whitehead). *Soient  $X$  et  $Y$  des CW-complexes, et soit  $f: X \rightarrow Y$  telle que  $\pi_n(f)$  est un isomorphisme pour tout  $n \geq 0$ . Alors  $f$  est une équivalence d'homotopie.*

Les groupes d'homotopie recèlent donc une information assez fine. Mais ils sont beaucoup plus durs à calculer que les groupes d'homologie, à part  $\pi_1$  ! On a quand même le résultat suivant :

**Théorème 8.4.4** (Whitehead). *Soient  $X$  et  $Y$  des CW-complexes tels que  $\pi_1(X) = \pi_1(Y) = 1$ , et soit  $f: X \rightarrow Y$  telle que  $H_n(f)$  est un isomorphisme pour tout  $n \geq 0$ . Alors  $f$  est une équivalence d'homotopie.*

**Corollaire 8.4.5.** *Soit  $X$  un CW-complexe. Alors  $X$  est contractile  $\iff$  on a  $\pi_1(X) = 1$  et  $\tilde{H}_n(X, \mathbf{Z}) = 0$  pour  $n \geq 0$ .*

Le corollaire se montre en considérant l'inclusion d'un point dans  $X$ . Ces deux derniers résultats montrent bien qu'en étudiant les groupes d'homologie et le groupe fondamental  $\pi_1$ , nous sommes en possession de très bons outils pour comprendre l'homotopie des espaces topologiques.

## 8.5 Dualité

Nous allons mettre en évidence une espèce de « dualité » (encore que le nom n'est pas vraiment bon) entre les groupes d'homotopie et la cohomologie à coefficients dans  $\mathbf{Z}$ . Nous ne tenterons pas de donner de démonstration.

Commençons par une remarque simple. Pour la théorie  $\tilde{H}^*(-, \mathbf{Z})$ , il y a des espaces pour lesquels la situation est très simple, à savoir les sphères  $S^n$  :

$$\tilde{H}^k(S^n, \mathbf{Z}) = \begin{cases} \mathbf{Z} & \text{si } k = n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La même chose est vraie pour les groupes d'homotopie. Il existe des espaces, appelés *espaces d'Eilenberg-MacLane* et notés  $K(\mathbf{Z}, n)$ , tels que

$$\pi_k(K(\mathbf{Z}, n), *) = \begin{cases} \mathbf{Z} & \text{si } k = n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ils sont d'ailleurs uniques à homotopie près avec cette propriété. C'est notre principale omission dans ce paragraphe : nous ne dirons rien de l'existence et de l'unicité de  $K(\mathbf{Z}, n)$ .

Les choses se compliquent quand on constate que, par définition

$$\pi_n(X, *) = [(S^n, *), (X, *)],$$

c'est-à-dire que les espaces « faciles » pour la cohomologie servent à définir les groupes d'homotopie. Or en y réfléchissant, le contraire est également vrai ! En effet on peut montrer que

$$\tilde{H}^n(X, \mathbf{Z}) \cong [(X, *), (K(\mathbf{Z}, n), *)],$$

donc les espaces « faciles » pour l'homotopie peuvent être utilisés pour définir la cohomologie. L'idée de démonstration est claire : on montre que

$$X \mapsto [(X, *), (K(\mathbf{Z}, n), *)]$$

est une cohomologie<sup>1</sup>, et le résultat suit par unicité. Il faut des outils que nous n'avons pas introduits, mais c'est relativement facile. Au passage, on obtient une

1. en fait une « cohomologie réduite », définie pour les espaces avec points-bases, mais on peut en déduire une cohomologie non réduite facilement

définition de la cohomologie (si on n'en a pas déjà une) qui est très différente de la « singulière ».

Que se passe-t-il si on « croise » ? Que donne la cohomologie des espaces d'Eilenberg-MacLane, que donne l'homotopie des sphères ? Dans le premier cas, le calcul a été fait, par Henri Cartan et Jean-Pierre Serre, deux très grands noms des mathématiques au vingtième siècle. Le résultat est trop complexe pour être cité ici, mais indiquons simplement qu'il existe une présentation de l'anneau de cohomologie de chaque  $K(\mathbf{Z}, n)$ . Par contre, le calcul de  $\pi_k(S^n)$  reste à faire ! Il existe énormément de résultats partiels (par exemple on a vu que  $\pi_k(S^n) = 0$  si  $k < n$ , que  $\pi_n(S^n) = \mathbf{Z}$ , et on peut montrer que  $\pi_k(S^n)$  est fini si  $k > n$ ), mais on n'a certainement pas de résultat définitif. Le problème reste ouvert.

Voici une dernière analogie. Si  $X$  est un CW-complexe, alors les squelettes  $X_n$  sont tels que  $X_n/X_{n-1}$  est un bouquet de  $n$ -sphères ; ceci donne des applications

$$X_{n-1} \longrightarrow X_n \longrightarrow \bigvee_i S_i^n$$

que l'on appelle des *cofibrations*, pour diverses raisons que nous ne pouvons expliciter ici. De plus, le squelette  $X_n$  a la même cohomologie que  $X$  en bas degrés. De manière duale, chaque espace  $X$  possède un « cosquelette »  $X \rightarrow P_n(X)$ , on a des applications

$$K(\pi_n(X), n) \longrightarrow P_n(X) \longrightarrow P_{n-1}(X)$$

qui sont des *fibrations*, et  $P_n(X)$  a les mêmes groupes d'homotopie que  $X$  en bas degrés. Cette décomposition s'appelle la *tour de Postnikov* (d'où la lettre  $P$ ).

# Exercices

## *H*-groupes et *H*-cogroupes

Un *H*-groupe est un espace topologique  $X$  avec un point distingué  $e \in X$ , une « multiplication »  $\mu: X \times X \rightarrow X$ , et une application « inverse »  $\iota: X \rightarrow X$  vérifiant les propriétés suivantes :

1. (associativité) Les deux applications  $X \times X \times X \rightarrow X$  données respectivement par  $(x, y, z) \mapsto \mu(\mu(x, y), z)$  et  $(x, y, z) \mapsto \mu(x, \mu(y, z))$  sont homotopes rel  $\{e, e, e\}$ .
2. (inverses) Les deux applications  $X \rightarrow X$  données respectivement par  $x \mapsto \mu(x, \iota(x))$  et  $x \mapsto \mu(\iota(x), x)$  sont homotopes à l'application constante rel  $\{e\}$ .
3. (élément neutre) Les deux applications  $X \rightarrow X$  données respectivement par  $x \mapsto \mu(x, e)$  et  $x \mapsto \mu(e, x)$  sont homotopes à l'identité rel  $\{e\}$ .

L'exemple de base est celui où  $X = G$  est un groupe de Lie.

En inversant le sens des flèches, et en ne faisant rien d'autre, on obtient la définition suivante. Un *H*-cogroupe est un espace topologique  $X$  avec un point distingué  $e \in X$ , une « comultiplication »  $\gamma: X \rightarrow X \vee X$ , et une application « inverse »  $\iota: X \rightarrow X$  vérifiant les propriétés suivantes :

1. (coassociativité) Les deux applications  $X \rightarrow X \vee X \vee X$  données respectivement par  $(\gamma \vee Id) \circ \gamma$  et  $(Id \vee \gamma) \circ \gamma$  sont homotopes rel  $\{e\}$ .
2. (inverses) Les deux applications  $X \rightarrow X$  données respectivement par  $(Id \vee \iota) \circ \gamma$  et  $(\iota \vee Id) \circ \gamma$  sont homotopes à l'application constante rel  $\{e\}$ . Ici  $f \vee g: X \vee Y \rightarrow Z$  désigne l'application égale à  $f$  sur  $X$  et à  $g$  sur  $Y$ .
3. (élément neutre) Les deux applications  $X \rightarrow X$  données respectivement par  $(Id \vee *) \circ \gamma$  et  $(* \vee Id) \circ \gamma$  sont homotopes à l'identité rel  $\{e\}$ . Ici  $*$  est l'application constante égale à  $e$ .

**Exercice 40.** Écrivons  $SX$  pour la suspension *réduite* de  $X$  (notée  $S^1 \wedge X$  ailleurs). Montrer que  $SX$  est un *H*-cogroupe avec la comultiplication  $\gamma: SX \rightarrow SX \vee SX$  suivante :

$$\gamma(t, x) = \begin{cases} (2t, x)_1 & \text{if } t \leq \frac{1}{2}, \\ (2t - 1, x)_2 & \text{if } t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

(L'indice 1 ou 2 indique dans quelle copie de  $SX$  on se trouve.) Faire un dessin.

**Exercice 41.** On suppose que  $G$  est un ensemble avec deux lois de groupe, notées  $\cdot$  et  $\star$ , et vérifiant

$$(\alpha \cdot \beta) \star (\gamma \cdot \delta) = (\alpha \star \gamma) \cdot (\beta \star \delta),$$

pour tout  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in G$ . On suppose de plus que les deux lois de groupe ont le même élément neutre.

Montrer alors que les deux lois coïncident, et sont commutatives.

**Exercice 42.** Montrer que :

1. Si  $Y$  est un  $H$ -groupe, alors  $[(X, *), (Y, e)]$  est un groupe, avec multiplication donnée par  $(f \cdot g)(x) = \mu(f(x), g(x))$ ; l'élément neutre est l'application constante.
2. Si  $X$  est un  $H$ -cogroupe, alors  $[(X, e), (Y, *)]$  est un groupe, avec multiplication donnée par  $(f \star g)(x) = (f \vee g)(\gamma(x))$ ; l'élément neutre est l'application constante.
3. Si  $X$  est un  $H$ -cogroupe et  $Y$  est un  $H$ -groupe, les deux multiplications coïncident et sont commutatives.

**Exercice 43.** Montrer que si  $X$  est un  $H$ -groupe, alors  $\pi_n(X)$  est abélien pour  $n \geq 1$ , et de plus on a deux définitions de la loi de groupe.

En déduire le calcul de  $\pi_1(S^1, *)$ .

*Il est probable qu'en utilisant des connaissances du cours sur les groupes de Lie, vous soyez capables de calculer également  $\pi_1(S^3, *)$ .*

## La topologie compacte-ouverte

Si  $X$  et  $Y$  sont des espaces topologiques, on note  $Y^X$  l'ensemble des applications continues  $X \rightarrow Y$ ; on note  $(Y, *)^{(X, *)}$  l'ensemble des applications continues pointées  $(X, *) \rightarrow (Y, *)$ . Sur l'un ou l'autre, on définit la *topologie compacte-ouverte* comme étant la plus petite contenant les ouverts de la forme

$$\{f \in Y^X \mid f(K) \subset U\}$$

avec  $K$  compact et  $U$  ouvert.

En particulier, on munit  $\Omega X = (X, *)^{(S^1, *)}$  de cette topologie.

**Exercice 44.** Aller à la bibliothèque et trouver des démonstrations des faits suivants :

1.  $\Omega X$  est un  $H$ -groupe, avec les opérations sur les lacets décrites dans ce chapitre.
2. Il y a un isomorphisme de groupes

$$[(SX, *), (Y, *)] \cong [(X, *), (\Omega Y, *)].$$

(Les structures de groupe utilisent le fait que  $SX$  est un  $H$ -cogroupe et que  $\Omega Y$  est un  $H$ -groupe.)

*Par exemple Bredon, Topology and Geometry, §VII, 2 et lemme VII 4.2.*

**Exercice 45.** Montrer que  $\pi_n(X)$  est abélien pour  $n \geq 2$ .

**Exercice 46.** Montrer que l'on aurait pu utiliser n'importe quelle coordonnée dans la définition de la loi de groupe sur  $\pi_n(X, *)$ , au lieu de la dernière.

## Propriétés du groupe fondamental

**Exercice 47.** Soit  $X$  connexe par arcs. On dit que  $X$  est *simplement connexe* lorsque  $\pi_1(X) = 1$ . Montrer que  $X$  est simplement connexe si et seulement si, pour tous chemins  $\gamma, \gamma'$  dans  $X$  tels que  $\gamma(0) = \gamma'(0)$  et  $\gamma(1) = \gamma'(1)$ , il existe une homotopie

$$F: I \times I \rightarrow X$$

telle que  $F(s, 0) = \gamma(s)$ ,  $F(s, 1) = \gamma'(s)$  et  $F(0, t) = \gamma(0)$ ,  $F(1, t) = \gamma(1)$  (en d'autres termes,  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont homotopes rel  $\{0, 1\}$ ).

**Exercice 48.** Soit  $X$  connexe par arcs. Montrer que, pour tout chemin  $p$  dans  $X$ , on a un homomorphisme de groupes

$$h_p: \pi_1(X, p(1)) \rightarrow \pi_1(X, p(0))$$

tel que

1.  $h_q \circ h_p = h_{p \star q}$ ,
2. si  $p$  et  $q$  sont homotopes rel  $\{0, 1\}$ , alors  $h_p = h_q$ ,
3. si  $p$  est un lacet,  $h_p([\gamma]) = [p] \star [\gamma] \star [p^{-1}]$ .

En déduire que chaque  $h_p$  est un isomorphisme, et que « le groupe fondamental de  $X$  ne dépend pas du point-base, à conjugaison près ».

**Exercice 49.** Soit  $p, \gamma$  et  $\gamma'$  des chemins dans  $X$ . On écrit  $\gamma \simeq_p \gamma'$  lorsqu'il existe une homotopie

$$F: I \times I \longrightarrow X$$

telle que  $F(s, 0) = \gamma(s)$ ,  $F(s, 1) = \gamma'(s)$ , et  $F(0, t) = F(1, t) = p(t)$  (en particulier dans ce cas  $\gamma$  est un lacet en  $p(0)$  et  $\gamma'$  est un lacet en  $p(1)$ ).

Montrer que  $\gamma \simeq_p \gamma' \Leftrightarrow h_p([\gamma']) = [\gamma]$ , avec les notations de l'exercice précédent.

**Exercice 50.** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces connexes par arcs, et  $\phi$  une équivalence d'homotopie. Soit  $\psi$  une inverse pour  $\phi$ , c'est-à-dire que  $\phi \circ \psi$  est homotope à l'identité, ainsi que  $\psi \circ \phi$ . *On ne suppose pas que les homotopies préservent les points bases.*

Montrer néanmoins que  $\phi$  induit un isomorphisme entre  $\pi_1(X, x_0)$  et  $\pi_1(Y, \phi(x_0))$ , pour tout  $x_0 \in X$ .

*Exercice précédent...*

# Chapitre 9

## Revêtements

Pour l'instant nous ne savons pas calculer le  $\pi_1$  de beaucoup d'espaces. Essentiellement nous savons que lorsqu'un espace est contractile, alors son groupe fondamental est trivial, et nous avons vu que  $\pi_1(S^1) \cong \mathbf{Z}$ , mais de manière très détournée.

Dans ce chapitre nous introduisons les revêtements. Le théorème principal va énoncer, grosso modo, que si  $\pi_1(E) = 1$ , et si  $G$  est un groupe qui agit de manière raisonnable sur  $E$ , alors  $\pi_1(E/G) = G$ . Pour calculer le groupe fondamental d'un espace  $X$ , on pourra alors chercher  $E$  et  $G$  tels que  $X = E/G$ . Ainsi pour le cercle  $S^1$ , on a  $S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$  et on retrouvera  $\pi_1(S^1) = \mathbf{Z}$  de manière plus « visuelle ».

Le chapitre suivant démontrera que  $E$  et  $G$  existent toujours, tels que  $E/G = X$  et  $\pi_1(E) = 1$ .

### 9.1 Revêtements

**Définition 9.1.1.** Soit  $p: E \rightarrow X$  une application continue. On dit que  $p$  est un *revêtement* lorsque chaque point  $x \in X$  possède un voisinage  $U \subset X$  tel que  $p^{-1}(U)$  est l'union disjointe d'ouverts  $U_\alpha$  (avec  $\alpha \in A$ ) tels que la restriction de  $p$  à chaque  $U_\alpha$  est un homéomorphisme  $U_\alpha \rightarrow U$ .

(En particulier, un revêtement est une application surjective et ouverte.)

Pour donner des exemples, le mieux est de considérer la situation suivante.

**Définition 9.1.2.** Soit  $G$  un groupe (discret) agissant sur l'espace  $E$ . On dit que l'action est *proprement discontinue* si chaque point  $y \in E$  possède un voisinage  $U \subset E$  tels que les ensembles  $gU$ , pour  $g \in G$ , sont tous disjoints.

**Lemme 9.1.3.** Si  $G$  agit proprement discontinument sur  $E$ , alors l'application quotient  $E \rightarrow X = E/G$  est un revêtement.

*Démonstration.* Chaque application  $y \mapsto gy$  est un homéomorphisme (d'inverse  $y \mapsto g^{-1}y$ ). Donc si  $U$  est comme dans la définition, les ensembles  $gU$  sont tous ouverts, et  $p(U)$  aussi d'après la définition de la topologie quotient. Il est clair que l'application  $gU \rightarrow p(U)$  induite par  $p$  est bijective, continue et ouverte.  $\square$

**Exemple 9.1.4.** L'action de  $G = \mathbf{Z}$  sur  $E = \mathbf{R}$  par  $n \cdot y = n + y$  est proprement discontinue. Donc  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z}$  est un revêtement, ainsi que l'application  $\mathbf{R} \rightarrow S^1$  donnée par  $x \mapsto e^{2i\pi x}$  (c'est la composée d'un revêtement et d'un homéomorphisme).

De la même manière, on a un revêtement  $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}/\mathbf{Z}$ ; et l'application  $z \mapsto e^{2i\pi z}$  donne un revêtement  $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^\times$ , comme composée d'un revêtement et d'un homéomorphisme.

Un petit lemme pour faire encore plus d'exemples :

**Lemme 9.1.5.** *Si deux des trois applications  $f$ ,  $g$  et  $f \circ g$  sont des revêtements, alors la troisième aussi.*

*Démonstration.* Exercice. □

**Exemple 9.1.6.** En partant d'un revêtement  $E \rightarrow E/G$  comme précédemment, on peut considérer un sous-groupe  $H \subset G$  et regarder les deux applications  $E \rightarrow E/H$  et  $E/H \rightarrow E/G$ , qui sont des revêtements par le lemme.

En revenant au cas  $E = \mathbf{R}$  et  $G = \mathbf{Z}$ , prenons le sous-groupe  $H = n\mathbf{Z}$ . On a donc un revêtement  $p: \mathbf{R}/n\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ . Regardons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}/n\mathbf{Z} & \xrightarrow{x \mapsto e^{\frac{2i\pi x}{n}}} & S^1 \\ p \downarrow & & \downarrow z \mapsto z^n \\ \mathbf{R}/\mathbf{Z} & \xrightarrow{x \mapsto e^{2i\pi x}} & S^1 \end{array}$$

Les applications horizontales sont des homéomorphismes, et on en déduit que  $z \mapsto z^n$  est un revêtement  $S^1 \rightarrow S^1$ .

**Exemple 9.1.7.** Prenons  $E = \mathbf{R} \times [-1, 1] \subset \mathbf{C}$ , et soit  $\phi: E \rightarrow E$  définie par  $\phi(z) = 1 + \bar{z}$ . On fait agir  $\mathbf{Z}$  sur  $E$  par  $n \cdot y = \phi^{\circ n}(y)$ . Alors l'action est proprement discontinue, et  $E/\mathbf{Z}$  s'identifie au ruban de Moebius  $M$  (faire un dessin!).

En argumentant comme dans le cas de  $S^1$ , on trouve pour chaque  $n \in \mathbf{Z}$  un revêtement  $E/n\mathbf{Z} \rightarrow M$ . Pour  $n = 2$  on voit que  $E/2\mathbf{Z}$  est un cylindre (là encore, faire un dessin).

**Exemple 9.1.8.** Soit  $X$  une variété, et soit

$$\tilde{X} = \{(x, \mu_x) : x \in X, \mu_x \text{ orientation de } X \text{ en } x\}.$$

Il y a une application  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  qui envoie  $(x, \mu_x)$  sur  $x$ .

On peut montrer les choses suivantes (exercice). Il existe une topologie sur  $\tilde{X}$  telle que  $p$  est un revêtement; et de plus,  $X$  est orientable si et seulement si  $\tilde{X}$  n'est pas connexe.

Par exemple, si on parle de  $\mathbf{Z}$ -orientation, alors  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  est telle que  $p^{-1}(x)$  possède deux éléments pour tout  $x$ , on dit que  $p$  est un revêtement « à deux feuillets ». Pour  $X = M$ , le ruban de Moebius, on a vu un revêtement à deux feuillets  $C \rightarrow M$  ci-dessus, où  $C$  est un cylindre, donc est connexe. En fait on peut montrer que ce revêtement s'identifie à  $\tilde{M} \rightarrow M$ , ce qui montre que le ruban n'est pas orientable.

On dira qu'un espace  $X$  est *localement connexe* lorsque, pour chaque  $x \in X$  et chaque ouvert  $U$  tel que  $x \in U$ , il existe un ouvert connexe par arcs  $V \subset U$  tel que  $x \in V$ . Le théorème principal de ce chapitre est le suivant :

**Théorème 9.1.9.** *Soit  $p: E \rightarrow X$  un revêtement, avec  $X$  connexe et localement connexe, et  $E$  connexe par arcs. Alors :*

1. *L'application  $\pi_1(p)$  induite par  $p$  au niveau de  $\pi_1$  est injective.*
2. *Soit  $*$   $\in X$  un point-base, et  $*$   $\in E$  tel que  $p(*) = *$ . Alors il existe une bijection*

$$p^{-1}(*) \cong \pi_1(E, *) \backslash \pi_1(X, *).$$

*(En identifiant  $\pi_1(E)$  à un sous-groupe de  $\pi_1(X)$  ; voir la remarque ci-dessous.)*

3. *Le sous-groupe  $\pi_1(E, *)$  est distingué dans  $\pi_1(X, *) \iff$  on peut trouver un groupe  $G$  agissant proprement discontinument sur  $E$ , de sorte que  $p$  s'identifie à l'application quotient  $E \rightarrow E/G \cong X$ .*

*Lorsque cette condition est remplie, on a un isomorphisme de groupes  $G \cong \pi_1(X, *) / \pi_1(E, *)$ .*

Les revêtements remplissant la condition du (3) sont appelés *réguliers*, ou encore *galoisiens*.

**Corollaire 9.1.10.** *Si  $E$  est simplement connexe, et si  $G$  agit proprement discontinument sur  $E$ , alors  $\pi_1(E/G) \cong G$ .*

En plus de fournir la « bonne » démonstration du fait que  $\pi_1(S^1) = \mathbf{Z}$ , ce corollaire permet par exemple le calcul du  $\pi_1$  de la bouteille de Klein (voir les exercices), et de beaucoup d'autres espaces. En fait c'est l'outil numéro un.

Les paragraphes suivants vont démontrer les points (1), (2) et (3) successivement.

**Remarque 9.1.11** (Actions à gauche et à droite). Lorsqu'on parle d'une action du groupe  $G$  sur l'ensemble  $X$ , du moins dans ce cours, il s'agit d'une action à gauche, c'est-à-dire qu'on a des applications  $x \mapsto g \cdot x$ , de sorte que  $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$ . L'ensemble « quotient » (en d'autres termes l'ensemble des orbites) devrait en toute logique être noté  $G \backslash X$  pour rappeler que l'action est à gauche. Cependant la plupart du temps, et lorsqu'il n'y a pas de confusion, on écrit  $X/G$  en suivant une vieille habitude. Nous l'avons fait ci-dessus avec les espaces  $E/G$ .

On pourrait aussi considérer une action à droite de  $G$  sur  $X$ , donnée par des applications  $x \mapsto x \cdot g$  telles que  $(x \cdot g) \cdot h = x \cdot (gh)$ . Dans ce cas le quotient se note tout naturellement  $X/G$ .

Par exemple, si  $G$  est un sous-groupe d'un groupe  $\Gamma$ , il agit sur  $\Gamma$  à gauche et à droite par multiplication, et on a des quotients  $G \backslash \Gamma$  et  $\Gamma/G$ . Petit exercice :  $G$  est distingué dans  $\Gamma$  si et seulement si ces deux ensembles sont égaux :  $G \backslash \Gamma = \Gamma/G$  (ce n'est pas une bijection, mais une égalité d'ensembles de parties de  $\Gamma$ ).

On a parfois, comme dans cet exemple, deux actions sur  $X$ , une à gauche et une à droite, qui « commutent » dans le sens où  $(g \cdot x) \cdot h = g \cdot (x \cdot h)$ . Dans ce cas  $G$  agit à droite sur  $G \backslash X$  et à gauche sur  $X/G$  (attention!) ; le quotient est le même dans les deux cas, on le note  $G \backslash X/G$ .

Dans le théorème par exemple, on voit d'après le (2) qu'il y a une action de  $\pi_1(X, *)$  sur  $p^{-1}(*)$  à droite, puisqu'il y en a une sur  $\pi_1(E, *) \backslash \pi_1(X, *)$ . En fait nous montrerons ça en premier et le (2) du théorème suivra. Ce qui veut dire que, par la suite, nous devons inévitablement parler d'actions à droite !

## 9.2 Relèvements

Un peu de vocabulaire : si  $p: E \rightarrow X$  est un revêtement, on dit d'un ouvert  $U \subset X$  qu'il est « trivial pour  $p$  » lorsque  $p^{-1}(U) = \coprod_{\alpha} U_{\alpha}$ , comme dans la définition de « revêtement ».

**Théorème 9.2.1** (Le théorème du relèvement). *Soit  $p: E \rightarrow X$  un revêtement, avec  $X$  localement connexe. Si  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  est un chemin dans  $X$ , et si  $e \in E$  est tel que  $p(e) = \gamma(0)$ , alors il existe un unique chemin  $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow E$  tel que  $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$  et  $\tilde{\gamma}(0) = e$ .*

Comme d'habitude, nous sous-entendons le fait que  $\gamma$  et  $\tilde{\gamma}$  sont continus (évidemment c'est essentiel pour l'unicité).

*Démonstration.* Avec un argument de compacité, on trouve une subdivision

$$t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = 1$$

telle que sur l'intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$ , le chemin  $\gamma$  prend ses valeurs dans un ouvert  $U \subset X$  qui est trivial pour  $p$ . En composant  $\gamma$  avec un homéomorphisme  $U \rightarrow U_{\alpha}$ , on peut donc trouver un « relèvement »  $\tilde{\gamma}_i$  sur chacun de ces intervalles. De plus, en ajustant l'indice  $\alpha$ , on peut choisir librement  $\tilde{\gamma}_i(t_i)$  parmi tous les éléments de  $p^{-1}(\gamma(t_i))$ . En procédant de proche en proche, l'existence de  $\tilde{\gamma}$  est démontrée.

Soit  $\gamma'$  un autre relèvement. L'ensemble  $A$  des  $t \in [0, 1]$  tels que  $\gamma'(t) = \tilde{\gamma}(t)$  est fermé, par continuité. Montrons qu'il est ouvert aussi. Pour ça, on prend  $t$  tel que  $\gamma'(t) = \tilde{\gamma}(t)$ , et un ouvert  $U$  contenant  $\gamma(t)$  choisi à la fois connexe et trivial pour  $p$ ; les  $U_{\alpha}$  sont les composantes connexes de  $p^{-1}(U)$ . Il existe un intervalle  $I_t$  contenant  $t$  sur lequel  $\gamma$  est à valeurs dans  $U$ , donc  $\gamma'$  et  $\tilde{\gamma}$  sont à valeurs dans  $p^{-1}(U)$ ; par connexité de  $I_t$ , les chemins  $\gamma'$  et  $\tilde{\gamma}$  prennent en fait leurs valeurs dans un seul  $U_{\alpha}$ , pour le même  $\alpha$  puisqu'en  $t$  ces deux chemins passent par le même point. Ceci montre que sur  $I_t$  on a  $\gamma' = \tilde{\gamma} = \gamma$  composé avec l'homéomorphisme  $U \rightarrow U_{\alpha}$  inverse de  $p$ . Donc  $A$  est ouvert.

Par connexité de  $[0, 1]$ , on a  $A = [0, 1]$  ou  $A = \emptyset$ , donc si  $\gamma'$  et  $\tilde{\gamma}$  prennent la même valeur en 0, ce sont les mêmes chemins.  $\square$

**Exemple 9.2.2.** Rappelons que l'on a un revêtement  $p: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^{\times}$  où  $p(z) = e^{2i\pi z}$ . Si  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}^{\times}$  est un chemin dans le plan ne passant pas par l'origine, le théorème montre que l'on peut écrire

$$\gamma(t) = e^{2i\pi\theta(t)}$$

où  $\theta$  est une fonction continue; de plus si on écrit  $\gamma(0) = e^{2i\pi\alpha}$  pour un certain angle  $\alpha$ , alors la fonction  $\theta$  peut être choisie telle que  $\theta(0) = \alpha$ , et elle est alors unique.

**Corollaire 9.2.3.** *Soit  $Y$  un espace connexe par arcs, soit  $y_0 \in Y$ , et soit  $f: Y \rightarrow X$ . S'il existe un relèvement  $\tilde{f}: Y \rightarrow E$  tel que  $f = p \circ \tilde{f}$  et tel que  $\tilde{f}(y_0) = e$ , alors il est unique.*

*Démonstration.* Soit  $y \in Y$ , soit  $c$  un chemin dans  $Y$  telle que  $\gamma(0) = y_0$  et  $\gamma(1) = y$ , et soit  $\gamma = f \circ c$ . Soit  $\tilde{\gamma}$  l'unique relèvement de  $\gamma$  tel que  $\tilde{\gamma}(0) = e$ , comme ci-dessus. Puisque  $\tilde{f} \circ c$  est un relèvement aussi, qui part du même point, on a  $\tilde{f} \circ c = \tilde{\gamma}$ , et il est nécessaire que  $\tilde{f}(y) = \tilde{\gamma}(1)$ .  $\square$

En observant cette démonstration, on aurait envie de montrer l'existence d'un relèvement  $\tilde{f}$  en posant  $\tilde{f}(y) = \tilde{\gamma}(1)$ . On a deux problèmes : vérifier que ceci ne dépend pas du choix du chemin  $c$ , et si on peut franchir ce premier obstacle, vérifier que  $\tilde{f}$  est continue.

On va voir que le point essentiel est de traiter le cas des homotopies :

**Théorème 9.2.4.** *Soit  $p: E \rightarrow X$  un revêtement, avec  $X$  localement connexe. Si  $F: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  est une homotopie dans  $X$ , et si  $e \in E$  est tel que  $p(e) = F(0, 0)$ , alors il existe une unique homotopie  $\tilde{F}: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow E$  telle que  $F = p \circ \tilde{F}$  et  $\tilde{F}(0, 0) = e$ .*

*Démonstration.* On pourrait prendre un chemin canonique entre  $(0, 0)$  et n'importe quel point  $(x, y)$  (par exemple un segment), et définir  $\tilde{F}$  en utilisant le théorème précédent ; mais il resterait le problème de montrer la continuité de  $\tilde{F}$ , et c'est loin d'être évident.

Alors on procède comme dans la démonstration précédente. On trouve des nombres  $t_i$  tels que sur chaque rectangle  $K_{ij} = [t_i, t_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}]$ , la fonction  $F$  prend ses valeurs dans un ouvert trivial pour  $p$ . On peut donc trouver un relèvement  $\tilde{F}_{ij}$  sur  $K_{ij}$ , et on peut ajuster  $\tilde{F}_{ij}(t_i, t_j)$  à notre guise.

Prenons deux rectangles  $K_{ij}$  et  $K_{k\ell}$  avec un côté en commun, disons  $k = i + 1$  et  $\ell = j$  par exemple. On peut choisir  $\tilde{F}_{k\ell}$  de façon à ce qu'il prenne en  $(t_{i+1}, t_j)$  la même valeur que  $\tilde{F}_{ij}$ . Mais alors, ces deux relèvements doivent prendre les mêmes valeurs tout le long de leur côté commun, par la partie unicité du théorème précédent.

Ainsi on peut ajuster les  $\tilde{F}_{ij}$  de proche en proche afin de définir  $\tilde{F}$ .  $\square$

**Corollaire 9.2.5.** *Si  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  sont deux chemins homotopes dans  $X$ , par une homotopie  $F$  telle que  $F(0, t)$  et  $F(1, t)$  restent constants, et si  $\tilde{\gamma}_0$  et  $\tilde{\gamma}_1$  désignent les relèvements tels que  $\tilde{\gamma}_0(0) = \tilde{\gamma}_1(0) = e$ , alors on a  $\tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(1)$ .*

*De plus, le relèvement  $\tilde{F}$  de l'homotopie  $F$  tel que  $\tilde{F}(0, 0) = e$  est une homotopie entre  $\tilde{\gamma}_0$  et  $\tilde{\gamma}_1$ , qui fixe les extrémités.*

*Démonstration.* L'homotopie  $F$  entre  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  se relève en une homotopie  $\tilde{F}$ , par le théorème. On peut choisir  $\tilde{F}(0, 0) = e$  donc  $t \mapsto \tilde{F}(t, 0)$  n'est autre que le chemin  $\tilde{\gamma}_0$ .

Les chemins  $t \mapsto \tilde{F}(0, t)$  et  $t \mapsto \tilde{F}(1, t)$  sont à valeurs dans les ensembles discrets  $p^{-1}(\gamma_0(0))$  et  $p^{-1}(\gamma_0(1))$  respectivement, ils sont donc constants par connexité. Ainsi  $t \mapsto \tilde{F}(t, 1) \ll \text{part} \gg$  du point  $e$ , c'est donc le chemin  $\tilde{\gamma}_1$ . Finalement  $\tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{F}(1, 0) = \tilde{F}(1, 1) = \tilde{\gamma}_1(1)$ . La dernière phrase du corollaire a été montrée au passage.  $\square$

**Exemple 9.2.6.** Revenons au cadre de l'exemple 9.2.2. Prenons  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}^\times$  et supposons que  $\gamma(0) = 1$ . Alors comme précédemment on peut écrire  $\gamma(t) = e^{2i\pi\theta(t)}$  avec  $\theta(0) = 0$ , et le corollaire montre que le nombre complexe  $\theta(1)$  ne dépend que de la classe d'homotopie de  $\gamma$ .

Prenons maintenant pour  $\gamma$  un lacet, c'est-à-dire que  $\gamma(1) = 1$ . Alors  $\theta(1) = n$  est un entier puisque  $e^{2i\pi\theta(1)} = 1$ , et  $n$  ne dépend que de la classe de  $\gamma$  dans  $\pi_1(\mathbf{C}^\times, 1)$ . Tout ceci donne une application

$$\pi_1(\mathbf{C}^\times, 1) \longrightarrow \mathbf{Z}.$$

Les techniques du reste du chapitre vont montrer que c'est un isomorphisme de groupes. L'entier  $n$  associé à  $\gamma$  est appelé l'indice de  $\gamma$  (par rapport à l'origine), et vous l'avez peut-être déjà vu en analyse complexe.

Plus loin, nous montrerons un théorème de relèvement très général, en combinant les deux cas particuliers des chemins et des homotopies. Mais avec les résultats de ce paragraphe, on peut déjà montrer le (1) du théorème 9.1.9. En effet, supposons que  $p: E \rightarrow X$  soit un revêtement, et utilisons la notation  $p_*$  pour  $\pi_1(p)$ . Supposons que  $p_*([c]) = 1$  pour un lacet  $c$  dans  $E$ , basé au point  $e \in E$ . Par définition, cela signifie que le lacet  $\gamma = p \circ c$  dans  $X$  est homotope au lacet constant en  $p(e)$ , disons par une homotopie  $F$ .

Noter que  $c$  est le relèvement de  $\gamma$ , bien sûr. L'homotopie  $F$  se relève en une homotopie  $\tilde{F}$  entre  $c$  et le relèvement du lacet constant en  $p(e)$ ; mais par unicité, ce relèvement est le lacet constant en  $e$ . Donc  $[c] = 1$  dans  $\pi_1(E, e)$ , ce qui montre que  $\ker p_* = \{1\}$ , c'est-à-dire que  $p_*$  est injective.

### 9.3 Monodromie

On va maintenant démontrer le (2) du théorème 9.1.9. Introduisons pour cela une action à droite de  $\pi_1(X, *)$  sur  $p^{-1}(*)$ , appelée *l'action de monodromie*.

Étant donné  $e \in p^{-1}(*)$  et  $g = [\gamma] \in \pi_1(X, *)$ , considérons  $\tilde{\gamma}$ , l'unique relèvement dans  $E$  tel que  $\tilde{\gamma}(0) = e$ . Le point  $\tilde{\gamma}(1)$  ne dépend que de la classe de  $\gamma$  à homotopie près, c'est-à-dire de  $g$ , par le corollaire 9.2.5. On peut donc poser sans ambiguïté  $e \cdot g = \tilde{\gamma}(1)$ .

**Proposition 9.3.1.** *On a une action à droite du groupe  $\pi_1(X, *)$  sur l'ensemble  $p^{-1}(*)$ . Cette action est transitive, et le stabilisateur de  $* \in E$  est le sous-groupe  $p_*(\pi_1(E, *))$ .*

Le (2) du théorème 9.1.9 est alors immédiat.

*Démonstration.* On doit d'abord vérifier que

$$e \cdot (gh) = (e \cdot g) \cdot h.$$

En termes de chemins, on veut montrer la chose suivante. Soit  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  deux lacets, soit  $\tilde{\gamma}_1$  le relèvement tel que  $\tilde{\gamma}_1(0) = e$ , et soit  $\tilde{\gamma}_2$  le relèvement tel que  $\tilde{\gamma}_2(0) = \tilde{\gamma}_1(1)$ . Alors  $\tilde{\gamma}_1 \star \tilde{\gamma}_2$  est le relèvement de  $\gamma_1 \star \gamma_2$  qui part de  $e$ . Mais c'est évident!

Puisque  $E$  est supposé connexe par arcs, si on a deux points  $e, f \in p^{-1}(*)$ , on peut trouver un chemin  $c$  qui mène de l'un à l'autre. Mais alors  $\gamma = p \circ c$  est un lacet en  $*$ , qui représente un élément  $g \in \pi_1(X, *)$ ; par définition même  $e \cdot g = f$ . Donc l'action est transitive.

Enfin, si  $g = [\gamma]$  est tel que  $* \cdot g = *$ , alors  $\gamma$  se relève en un lacet  $\tilde{\gamma}$  en  $* \in p^{-1}(*)$ . Ce qui veut bien dire que  $g = p_*([\tilde{\gamma}])$ , c'est-à-dire que  $g$  appartient au sous-groupe  $p_*(\pi_1(E, *))$ .  $\square$

### 9.4 Le théorème général du relèvement

**Théorème 9.4.1.** *Soit  $p: E \rightarrow X$  un revêtement, avec  $X$  localement connexe, soit  $Y$  connexe par arcs et localement connexe, et soit  $f: Y \rightarrow X$  une application. Choisissons  $x_0 = f(y_0) \in X$  et  $e \in E$  tel que  $p(e) = x_0$ .*

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. il existe une unique application  $\tilde{f}: Y \rightarrow E$  telle que  $f = p \circ \tilde{f}$  et  $\tilde{f}(y_0) = e$ ,
2.  $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e))$ .

En particulier, ce théorème montre que si  $\pi_1(Y) = 1$ , le relèvement  $\tilde{f}$  existe toujours !

*Démonstration.* Le fait que (1)  $\implies$  (2) est évident, puisque dans ce cas  $f_* = p_* \circ \tilde{f}_*$ . Montrons (2)  $\implies$  (1). L'unicité étant garantie par le corollaire 9.2.3, il faut montrer l'existence de  $\tilde{f}$ .

Soit  $c_0$  un chemin dans  $Y$  entre  $y_0$  et  $y$ , soit  $\gamma_0 = f \circ c_0$ . Si  $\tilde{f}$  existe, alors  $\tilde{f} \circ c_0 = \tilde{\gamma}_0$ , l'unique relèvement de  $\gamma_0$  qui part de  $e$ . Pour définir  $\tilde{f}$  en posant  $\tilde{f}(y) = \tilde{\gamma}_0(1)$ , il faut montrer que cette expression ne dépend pas du choix de  $c_0$ .

Soit donc  $c_1$  un autre chemin entre  $y_0$  et  $y$ , soit  $\gamma_1 = f \circ c_1$ , et soit  $c = c_1^{-1} \star c_0$ , qui est un lacet en  $y_0$ . Soit  $\gamma = f \circ c$ , de sorte que  $[\gamma] = f_*([c])$ . Par hypothèse on peut donc trouver un lacet  $\tau$  dans  $E$ , basé en  $e$ , tel que  $p_*([\tau]) = [\gamma]$ . En d'autres termes  $p \circ \tau$  est homotope à  $\gamma$ , et le corollaire 9.2.5 montre que le relèvement  $\tilde{\gamma}$  de  $\gamma$  est un lacet. La restriction de  $\tilde{\gamma}$  à  $[\frac{1}{2}, 1]$  est le relèvement de  $\gamma_1^{-1}$  qui part de  $\tilde{\gamma}_0(1)$ , et ce relèvement arrive donc en  $e$ . En prenant l'inverse, on constate que le relèvement de  $\gamma_1$  qui part de  $e$  arrive en  $\tilde{\gamma}_0(1)$ , donc finalement  $\tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(1)$ .

Il faut vérifier que  $\tilde{f}$ , ainsi définie, est continue. En effet, soit  $V$  un ouvert connexe par arcs de  $Y$  et soit  $y_1 \in V$ . Pour tout  $y \in V$ , on choisit un chemin  $c$  dans  $V$  entre  $y_1$  et  $y$ . Alors  $\tilde{f}(y)$  est l'extrémité de l'unique relèvement de  $c$  en un chemin dans  $E$  qui démarre en  $\tilde{f}(y_1)$ .

Avec cette description, ajustons maintenant  $V$  de sorte que  $f(V)$  est contenu dans un ouvert  $U$  trivial pour  $p$  dans  $X$ . Prenons un homéomorphisme  $\phi_\alpha: U \rightarrow U_\alpha$  inverse de  $p$ . Alors  $f$  coïncide avec  $\phi_\alpha \circ f$ , qui est continue, pour un certain choix de  $\alpha$ .  $\square$

**Exemple 9.4.2.** Voyons une application aux groupes de Lie. Un caractère du groupe de Lie  $G$  est un homomorphisme continu  $G \rightarrow \mathbf{C}^\times$ . Voyons quels sont les caractères de  $S^1$ . Soit  $p: \mathbf{R} \rightarrow S^1$  et  $q: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^\times$  les revêtements déjà vus, et soit  $\phi: S^1 \rightarrow \mathbf{C}^\times$  un caractère.

La composition  $f = \phi \circ p: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}^\times$  peut, d'après le théorème, se relever en  $\tilde{f}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  (donc  $q \circ \tilde{f} = f$ ), et on peut s'arranger pour que  $\tilde{f}(0) = 0$ . De plus,  $\tilde{f}$  est un homomorphisme de groupes : en effet les deux applications  $(x, y) \mapsto \tilde{f}(x+y)$  et  $(x, y) \mapsto \tilde{f}(x) + \tilde{f}(y)$  sont deux relèvements  $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  de l'application  $(x, y) \mapsto f(x+y)$ , donc doivent coïncider par unicité.

La relation  $\tilde{f}(x) = x\tilde{f}(1)$  est donc vraie pour  $x \in \mathbf{Z}$  clairement, mais donc aussi pour  $x \in \mathbf{Q}$  (car  $b\tilde{f}(1) = \tilde{f}(b) = \tilde{f}(\frac{ab}{a}) = a\tilde{f}(\frac{b}{a})$  d'où  $\tilde{f}(\frac{b}{a}) = \frac{b}{a}\tilde{f}(1)$ ); par continuité, c'est aussi vrai pour tout  $x \in \mathbf{R}$ . Comme  $\tilde{f}(1)$  doit être un entier, dans la mesure où  $q(\tilde{f}(1)) = f(1) = 1$ , on en conclut finalement que  $\tilde{f}(x) = nx$ . Au total

$$\phi(e^{2i\pi x}) = e^{2i\pi nx}.$$

En particulier  $\phi$  est automatiquement lisse ; si on sait a priori que  $\phi$  doit être lisse, alors on peut argumenter en utilisant les algèbres de Lie tangentées.

## 9.5 Le groupe de Galois

On va progressivement montrer le (3) du théorème 9.1.9.

**Définition 9.5.1.** Soient  $p: E \rightarrow X$  et  $q: F \rightarrow X$  deux revêtements. Un *morphisme* entre les deux est une application continue  $f: E \rightarrow F$  telle que  $q \circ f = p$ . Le *groupe de Galois* de  $p$  est le groupe de tous les homéomorphismes de  $E$  vers lui-même qui sont aussi des morphismes au sens précédent ; nous les appellerons automorphismes. On le note  $Gal(p)$  ou  $Gal(E/X)$ .

**Remarque 9.5.2.** Un morphisme  $f$  entre revêtements est entièrement déterminé par une seule de ses valeurs, d'après le corollaire 9.2.3.

L'exemple fondamental est le suivant :

**Lemme 9.5.3.** *Considérons un revêtement de la forme  $p: E \rightarrow E/G$ . Alors le groupe de Galois est isomorphe à  $G$ .*

*Démonstration.* On a un homomorphisme injectif  $G \rightarrow Gal(p)$  évident. Si  $f \in Gal(p)$ , prenons  $e \in E$  et considérons  $f(e) = g \cdot e$  pour un certain  $g \in G$ . Alors l'application  $f$  et l'action de  $g$  sont deux morphismes de revêtements qui prennent la même valeur en  $e$ , ils sont donc égaux par la remarque précédente.  $\square$

Retournons à l'étude du cas général. L'idée est d'appliquer le théorème du relèvement 9.4.1 avec  $Y = E$  et  $f = p$ , mais avec des points-bases différents (dans la notation du théorème, avec  $y_0 \neq e$ ).

Commençons par une remarque simple. Fixons un point-base  $* \in X$  et fixons  $* \in E$  tel que  $p(*) = *$ .

**Lemme 9.5.4.** *À mesure que  $e$  décrit la fibre  $p^{-1}(*)$ , le groupe  $p_*(\pi_1(E, e))$  décrit l'ensemble des conjugués du groupe  $p_*(\pi_1(E, *))$  dans  $\pi_1(X, *)$ .*

*Démonstration.* Si  $e \in p^{-1}(*)$ , choisissons un chemin  $\tilde{\gamma}$  dans  $E$  de  $*$  à  $e$ . On a alors un isomorphisme

$$h_{\tilde{\gamma}}: \pi_1(E, e) \rightarrow \pi_1(E, *)$$

comme dans l'exercice 48. D'après les définitions, il est clair que  $p_*(h_{\tilde{\gamma}}(x)) = [\tilde{\gamma}]^{-1} * p_*(x) * [\tilde{\gamma}]$ , où  $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$ . Donc les sous-groupes  $p_*(\pi_1(E, *))$  et  $p_*(\pi_1(E, e))$  de  $\pi_1(X, *)$  sont conjugués.

Pour la réciproque, on relève  $\gamma$  en  $\tilde{\gamma}$  et on procède comme ci-dessus (exercice).  $\square$

En appliquant le théorème 9.4.1 il vient tout de suite :

**Corollaire 9.5.5.** *Le sous-groupe  $p_*(\pi_1(E, *))$  de  $\pi_1(X, *)$  est distingué si et seulement si pour tout  $e \in p^{-1}(*)$  il existe un automorphisme  $f$  de  $E$  tel que  $f(*) = e$ .*

*Démonstration.* La seule chose à montrer est que les  $f$  en question sont des automorphismes ; le théorème 9.4.1 donne directement l'énoncé avec le terme « automorphisme » remplacé par « morphisme ». Mais en inversant les rôles de  $*$  et  $e$  on trouve un morphisme  $g$  tel que  $g(e) = *$ , et la composition  $g \circ f$  ne peut être que l'identité par unicité. Donc  $f$  est un homéomorphisme, comme annoncé.  $\square$

En particulier pour un revêtement de la forme  $E \rightarrow E/G$  on voit que la condition est remplie, donc  $p_*(\pi_1(E, *))$  est distingué dans ce cas; ceci nous donne la moitié de l'équivalence dans le (3) du théorème 9.1.9.

L'autre moitié n'est pas plus dure. Supposons donc que  $p_*(\pi_1(E, *))$  est distingué dans  $\pi_1(X, *)$ ; on voit facilement (petit exercice) que ceci entraîne pour tout  $x \in X$  et tout  $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$  que  $p_*(\pi_1(E, \tilde{x}))$  est distingué dans  $\pi_1(X, x)$ . Si on pose alors  $G = Gal(p)$ , le corollaire montre que les orbites de  $G$  sont précisément les fibres de  $p$ , et on a une bijection continue  $\phi: E/G \rightarrow X$ . Si  $U$  est un ouvert de  $X$  trivial pour  $p$ , et si  $U_\alpha$  est un ouvert de  $E$  homéomorphe à  $U$  par  $p$ , alors les ouverts  $gU_\alpha$  sont disjoints à mesure que  $g$  décrit  $G$  (si  $x \in gU_\alpha \cap U_\alpha$  alors  $g \cdot y = x$  avec  $x, y \in U_\alpha$  donc  $p(x) = p(y)$ , ce qui donne  $x = y$  et  $g$  est l'identité par la remarque ci-dessus). On constate que  $G$  agit proprement discontinument, et que l'application  $\phi$  est ouverte, c'est donc un homéomorphisme. L'équivalence est démontrée.

Pour terminer la preuve du théorème 9.1.9, il nous faut identifier  $Gal(p)$  avec  $\pi_1(X, *)/p_*(\pi_1(E, *))$ . Pour cela on pourrait vouloir étendre l'action de monodromie de  $\pi_1(X)$  à toutes les fibres à la fois, donc à  $E$ , mais quand on formalise, les choses se passent de la manière suivante. Si  $g \in \pi_1(X, *)$ , on considère le point  $e = * \cdot g$ , image de  $*$  par l'action de monodromie. D'après le théorème 9.4.1, il existe un unique  $\sigma_g \in Gal(p)$  tel que  $\sigma_g(*) = e$ . Notons alors :

**Lemme 9.5.6.** *Les automorphismes de  $E$  commutent avec l'action de monodromie. En clair si  $\sigma: E \rightarrow E$  est un automorphisme, on a  $\sigma(e \cdot g) = \sigma(e) \cdot g$  pour  $g \in \pi_1(X, *)$ .*

*Démonstration.* C'est presque évident : si  $\tilde{\gamma}$  est le relèvement de  $\gamma$  qui part de  $e$ , alors  $\sigma \circ \tilde{\gamma}$  est le relèvement du même  $\gamma$  qui part de  $\sigma(e)$ .  $\square$

**Corollaire 9.5.7.** *L'association  $g \mapsto \sigma_g$  est un homomorphisme.*

*Démonstration.* Calculons :

$$\begin{aligned} \sigma_{gh}(*) &= * \cdot gh && \text{(définition)} \\ &= (* \cdot g) \cdot h && \text{(action à droite)} \\ &= \sigma_g(*) \cdot h && \text{(définition)} \\ &= \sigma_g(* \cdot h) && \text{(lemme)} \\ &= \sigma_g(\sigma_h(*)) && \text{(définition)}. \end{aligned}$$

Donc  $\sigma_{gh}$  et  $\sigma_g \circ \sigma_h$  prennent la même valeur en  $*$ , et doivent coïncider.  $\square$

Il est immédiat que cet homomorphisme est surjectif et que son noyau est  $p_*(\pi_1(E, *))$ . Ceci complète la démonstration du théorème 9.1.9.

## 9.6 Quelques exemples explicites

La situation standard dans laquelle les résultats de ce chapitre sont utilisés est la suivante :  $E$  est simplement connexe,  $G$  agit proprement discontinument sur  $E$ , et  $X = E/G$ . Alors le théorème 9.1.9 affirme que  $\pi_1(X) \cong G$ . Mais il est important de réaliser que cet isomorphisme est explicite.

En effet, prenons  $* \in E$ , soit  $p: E \rightarrow X$  l'application quotient, et prenons  $p(*)$  comme point-base de  $X$ . Si  $g \in G$ , on choisit maintenant *n'importe quel* chemin  $\tilde{\gamma}$  dans  $E$  partant de  $*$  et arrivant en  $g \cdot *$ ; alors le chemin  $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$

représente  $g$  dans  $\pi_1(X, p(*))$ . Cette représentation explicite permet de calculer l'effet des applications induites au niveau du groupe fondamental.

**Exemple 9.6.1.** Nous avons vu qu'en identifiant  $S^1$  avec  $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ , et en considérant le revêtement  $p: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ , on constate que  $\pi_1(S^1) \cong \mathbf{Z}$ . Mais les remarques ci-dessus montrent plus. En prenant 0 comme point-base de  $\mathbf{R}$ , et donc 1 comme point-base de  $S^1$ , on peut prendre le chemin  $\tilde{\gamma}$  défini sur  $[0, 1]$  par  $\tilde{\gamma}(t) = tn$  pour rejoindre 0 et  $n$ . En composant avec  $p$  puis avec l'homéomorphisme  $\mathbf{R}/\mathbf{Z} \rightarrow S^1$  qui envoie  $x$  sur  $e^{2i\pi x}$ , constate que le chemin

$$t \mapsto e^{2ni\pi t}$$

représente  $n \in \mathbf{Z}$  dans le groupe  $\pi_1(S^1, 1)$ . On obtient donc un générateur de ce groupe en faisant  $n = 1$ .

Soit maintenant  $f: S^1 \rightarrow S^1$  définie par  $f(z) = z^N$  pour un certain  $N \in \mathbf{Z}$ . Il est clair d'après la description ci-dessus que l'application induite

$$f_*: \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow \pi_1(S^1, 1)$$

est la multiplication par  $N$ . On savait déjà ça, d'une manière beaucoup plus compliquée, à partir du théorème de Hurewicz et des méthodes de calcul des degrés en homologie.

**Exemple 9.6.2.** Nous montrerons plus loin que  $\pi_1(S^2)$  est trivial. Le groupe  $\mathbf{Z}/2$  agit sur  $S^2$  par l'application antipodale, proprement discontinuement, et le quotient est  $\mathbf{R}P^2$ ; on en déduit que  $\mathbf{R}P^2 \cong \mathbf{Z}/2$ .

Pour trouver un générateur de ce groupe, prendre un chemin quelconque du pôle sud au pôle nord. L'image  $\gamma$  de ce chemin est un lacet dans  $\mathbf{R}P^2$  qui est l'élément non-trivial du groupe fondamental (basé au pôle). Le fait que  $\gamma \star \gamma$  est trivial se voit « géométriquement » en relevant  $\gamma$  en un lacet basé au pôle sud dans  $S^2$ .

# Exercices

**Exercice 51.** Soit  $X = S^1 \vee S^1$  l'espace en forme de 8. Dessiner des revêtements de  $X$ .

*Par exemple il existe un revêtement  $E \rightarrow X$  avec  $E$  contractile ; il ressemble à un « arbre » infini.*

**Exercice 52.** Même chose avec  $X = S^1 \times S^1$ , le tore. *Certains dessins sont difficiles à faire !*

**Exercice 53.** Si  $G$  est un groupe de Lie, si  $p: \tilde{G} \rightarrow G$  est un revêtement, et si  $p(*) = 1 \in G$ , montrer que  $\tilde{G}$  est un groupe de Lie dont l'élément neutre est  $*$ , et que  $p$  est un homomorphisme lisse.

**Exercice 54.** Soit  $X = S^1 \times S^1$ . En argumentant comme dans l'exemple 9.4.2, montrer que le groupe des automorphismes de  $X$  s'identifie à  $GL_2(\mathbf{Z})$ .

De plus, montrer que si  $\phi$  et  $\psi$  sont deux automorphismes de  $X$  qui sont homotopes, alors ils sont égaux.

*On peut supposer que l'homotopie est pointée si ça aide. En utilisant le théorème de Hurewicz, on peut s'en passer.*

**Exercice 55.** Soit  $p: E \rightarrow X$  un revêtement, avec  $X$  connexe. Montrer que si  $p^{-1}(x_0)$  est fini pour un  $x_0 \in X$ , alors  $p^{-1}(x)$  est fini pour tous les  $x \in X$ , de même cardinalité.

*Si cette cardinalité est  $n$ , on dit alors que  $p$  est un revêtement à  $n$  feuillets.*

**Exercice 56.** Soit  $p: E \rightarrow X$  un revêtement. On suppose que  $X$  est la réalisation d'un CW-complexe fini. Montrer que  $E$  est aussi la réalisation d'un CW-complexe.

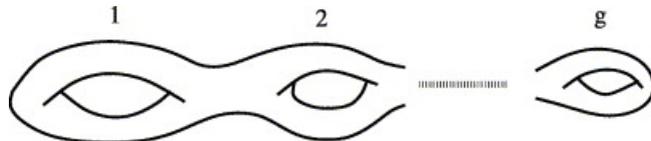
*Si  $p$  n'a pas un nombre fini de feuillets, il peut y avoir une infinité de cellules dans  $E$ , mais de dimension bornée. La définition de « CW-complexe » n'est pas différente dans ce cas. Comme indiqué en cours, il y a des subtilités avec la définition des CW-complexes faisant intervenir des cellules de toutes dimensions, mais elles n'apparaissent pas dans cette exercice.*

Si  $p$  est un relèvement à  $n$  feuillets, montrer que

$$\chi(E) = n\chi(X).$$

( $\chi$  = caractéristique d'Euler.)

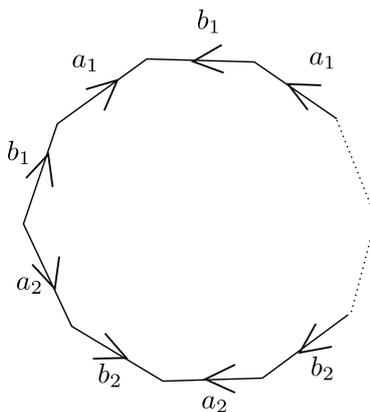
**Exercice 57.** On note  $\Sigma_g$  la surface représentée sur le dessin ci-dessous, sur lequel il y a  $g$  « trous » :



Cette définition est volontairement vague, pour insister sur le fait que les seules hypothèses utilisées dans l'exercice sont celles visibles sur le dessin. Pour une définition plus formelle, voir l'exercice suivant. Au passage, tout espace topologique homéomorphe à  $\Sigma_g$  est appelé « surface de genre  $g$  ».

1. Calculer l'homologie à coefficients dans  $\mathbf{F}_2$  de  $\Sigma_g$  en utilisant une récurrence, la suite de Mayer-Vietoris, et le fait que  $\Sigma_g$  est une variété. En déduire qu'une surface de genre  $g$  n'est pas une surface de genre  $g'$  à moins que  $g' = g$ .
2. Soit  $\Sigma_g \rightarrow \Sigma_{g'}$  un revêtement à  $n$  feuillets. En considérant la caractéristique d'Euler, montrer que
  - (a) Si  $g' = 1$  alors  $g = 1$  (revisiter alors l'exercice 52),
  - (b) Si  $g'$  est impair alors  $g$  aussi,
  - (c) Si  $g' = 2$  alors  $g$  peut être quelconque  $\geq 2$  (il faut donc exhiber des exemples, avec des dessins).

**Exercice 58.** On peut définir  $\Sigma_g$  à partir d'un polygône à  $4g$  côtés, en faisant les identifications ci-dessous :



En notant  $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ , le mot que l'on lit sur le bord du polygône est alors  $[a_1, b_1][a_2, b_2] \cdots [a_g, b_g]$ . On prendra le temps de se convaincre que cette définition correspond au dessin de l'exercice précédent.

À partir de cette description, calculer l'homologie entière de  $\Sigma_g$ .

**Exercice 59** (Groupe fondamental de la bouteille de Klein). Soit  $G$  le sous-groupe du groupe de toutes les isométries de  $\mathbf{R}^2$  engendré par  $\alpha$  et  $\beta$ , où

$$\alpha(x, y) = (x + 1, y)$$

et

$$\beta(x, y) = (1 - x, y + 1).$$

1. Montrer que  $\beta^{-1}\alpha\beta = \alpha^{-1}$ .
2. Montrer que tout élément de  $G$  s'écrit  $\alpha^n\beta^m$  avec  $n$  et  $m$  uniques. En fait  $G$  est un produit semi-direct  $\mathbf{Z} \rtimes \mathbf{Z}$ , si vous savez ce que c'est.
3. Vérifier que  $\mathbf{R}^2/G$  est la bouteille de Klein.
4. Montrer que  $G$  agit proprement discontinument sur  $\mathbf{R}^2$ . En déduire que le groupe fondamental de la bouteille de Klein est  $G$ .
5. Comparer avec le théorème de Hurewicz.

# Chapitre 10

## La classification des revêtements

### 10.1 Le revêtement universel

On dira qu'un espace  $X$  est *localement contractile* lorsque pour tout point  $x \in X$  et tout voisinage  $V$  de  $x$ , il existe un ouvert  $U \subset V$  contenant  $x$ , et qui est contractile. Alors  $X$  est localement connexe.

**Théorème 10.1.1.** *Soit  $X$  connexe et localement contractile. Alors il existe un revêtement  $E \rightarrow X$  avec  $\pi_1(E) = 1$ .*

*Idée.* L'idée est de commencer avec

$$\tilde{E} = \{\gamma: [0, 1] \rightarrow X \text{ tel que } \gamma(0) = x_0\},$$

pour un certain  $x_0$  fixé. On donne à  $\tilde{E}$  la topologie induite de la topologie compacte-ouverte sur l'ensemble des fonctions continues de  $[0, 1]$  vers  $X$ .

Ensuite, disons que  $\gamma \equiv \gamma'$  si  $\gamma(1) = \gamma'(1)$  et si  $\gamma^{-1} \star \gamma'$  est trivial dans le groupe fondamental  $\pi_1(X, x_0)$ . On peut alors considérer

$$E = \tilde{E} / \equiv,$$

avec la topologie quotient. L'application  $E \rightarrow X$  envoie  $\gamma$  sur  $\gamma(1)$ .

Il y a pas mal de travail à faire pour vérifier que  $E$  est simplement connexe et que  $E \rightarrow X$  est bien un revêtement.  $\square$

**Remarque 10.1.2.** L'espace  $E$  est alors unique, à isomorphisme de revêtement près. En effet, soit  $F \rightarrow X$  un autre revêtement tel que  $F$  est simplement connexe. On construit  $E \rightarrow F$  et  $F \rightarrow E$  à l'aide du théorème du relèvement 9.4.1, et les compositions doivent faire l'identité par unicité.

On dit que  $E$  est « le » *revêtement universel* de  $X$ .

**Exemple 10.1.3.** Le revêtement universel de  $S^1$  est  $\mathbf{R}$ . Celui de l'espace  $S^1 \vee S^1$  en forme de 8 est l'arbre évoqué dans l'exercice 51. Le revêtement universel de  $\mathbf{R}P^n$  est  $S^n$  pour  $n \geq 2$ , puisque nous allons montrer que  $\pi_1(S^n) = 1$  pour  $n \geq 2$ .

**Corollaire 10.1.4.** *Soit  $F \rightarrow X$  un revêtement quelconque, avec  $F$  connexe. Alors il existe un sous-groupe  $G$  de  $\pi_1(X, x_0)$  tel que  $F$  est isomorphe à  $E/G \rightarrow X$ .*

*Démonstration.* Rappels du chapitre précédent :  $\pi_1(X, x_0)$  est isomorphe au groupe de Galois  $Gal(E/X)$  ; il y a donc bien une action de ce groupe sur  $E$ , et  $X$  s'identifie à  $E/\pi_1(X, x_0)$ . Si  $G$  est un sous-groupe comme dans l'énoncé, on a donc bien un revêtement  $E \rightarrow E/G$  ainsi qu'un revêtement  $E/G \rightarrow X$ , la composition de ces deux-là étant l'application  $E \rightarrow X$ .

Montrons le corollaire. Soit  $E'$  le revêtement universel de  $F$  (qui existe car  $F$  est localement contractile, comme  $X$ ). Alors  $E'$  est simplement connexe, et  $E' \rightarrow F \rightarrow X$  est un revêtement. Par unicité, on a un isomorphisme entre  $E$  et  $E'$ .

Par ailleurs, le revêtement  $E' \rightarrow F$  est galoisien, donc s'identifie à  $E' \rightarrow E'/\pi_1(F)$ . Enfin,  $\pi_1(F)$  s'identifie lui-même à un sous-groupe  $G$  de  $\pi_1(X)$ .  $\square$

Tout le reste du chapitre, en un sens, a pour but d'énoncer le corollaire de manière plus élégante.

## 10.2 Équivalences de catégories

**Définition 10.2.1.** Soit  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un foncteur. On dit que  $F$  est une *équivalence de catégories* lorsqu'il existe  $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  et des transformations naturelles entre  $G \circ F$  et le foncteur identité de  $\mathcal{C}$ , ainsi qu'entre  $F \circ G$  et le foncteur identité de  $\mathcal{D}$ .

**Lemme 10.2.2.**  *$F$  est une équivalence si et seulement si les deux conditions suivantes sont remplies :*

1. *pour tout  $A, B \in \mathcal{C}$ , l'application*

$$Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow Hom_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$$

*induite par  $F$  est une bijection (on dit parfois que  $F$  est « pleinement fidèle ») ;*

2. *chaque objet  $X$  de  $\mathcal{D}$  est isomorphe à un objet de la forme  $F(A)$  pour un  $A$  dans  $\mathcal{C}$  (on dit parfois que  $F$  est « essentiellement surjectif »).*

*Démonstration.* Il est clair que les conditions sont nécessaires. Supposons que (1) et (2) soient satisfaites. Il faut utiliser l'axiome du choix pour choisir, pour chaque  $X \in \mathcal{D}$ , un isomorphisme de la forme  $\phi_X: X \rightarrow F(A)$ .

Le foncteur  $G$  associe alors à  $X$  l'objet  $G(X) = A$  que l'axiome du choix nous a trouvé ; et à  $f: X \rightarrow Y$  il associe  $G(f)$ , l'unique morphisme  $G(X) \rightarrow G(Y)$  tel que  $F(G(f)) = \phi_Y \circ f \circ \phi_X^{-1}$ . Les vérifications appropriées sont laissées en exercice.  $\square$

## 10.3 La classification

On va l'énoncer comme une équivalence de catégories. Attention, dans ce qui va suivre on considère, pour une fois, des revêtements qui ne sont pas supposés connexes. Fixons un espace  $X$ , connexe et localement contractile. Prenons un point  $*$   $\in X$ , et écrivons une fois pour toutes  $\pi_1(X)$  au lieu de  $\pi_1(X, *)$ .

La première catégorie, notée  $\mathcal{C}$ , est celle dont les objets sont les revêtements  $p: E \rightarrow X$ , et les morphismes sont les morphismes de revêtements, sans surprise.

La deuxième catégorie, notée  $\mathcal{D}$ , est celle des «  $\pi_1(X)$ -ensembles ». Les objets sont les ensembles  $S$  munis d'une action de  $\pi_1(X)$  à droite, et les morphismes sont les fonctions  $S \rightarrow S'$  qui sont  $\pi_1(X)$ -équivariantes (ie  $f(x \cdot g) = f(x) \cdot g$ ).

**Théorème 10.3.1.** *Le foncteur  $F$  qui à un revêtement  $p: E \rightarrow X$  associe la fibre  $p^{-1}(*)$  avec l'action de monodromie est une équivalence de catégories.*

*Démonstration.* On va vérifier les conditions du lemme 10.2.2.

Commençons par la deuxième, et commençons par un ensemble  $S$  tel que l'action de  $\pi_1(X)$  est transitive. Alors en choisissant un point  $s$  de  $S$ , on obtient un isomorphisme de  $\pi_1(X)$ -ensemble  $S \cong G \backslash \pi_1(X)$ , où  $G$  est le stabilisateur de  $s$ . Prenons alors un revêtement universel  $p_0: E_0 \rightarrow X$ . On a une action de  $\pi_1(X)$  sur  $E$ , et une factorisation de  $p_0$  comme composition de deux revêtements :

$$E_0 \xrightarrow{p_1} E_0/G \xrightarrow{p} E_0/\pi_1(X) \cong X.$$

Alors  $p_1$  est galoisien, de sorte que  $\pi_1(E_0/G) \cong G$ , et la fibre  $p^{-1}(*)$  s'identifie à  $G \backslash \pi_1(X)$  (proposition 9.3.1), donc à  $S$ . On a bien montré que  $S$  était isomorphe à  $F(p)$ .

Si l'action sur  $S$  n'est pas transitive, on exploite le fait que  $F$  respecte les unions disjointes pour créer un revêtement de  $X$ , non-connexe, qui correspond à  $S$ .

Passons à la condition (1) du lemme 10.2.2. Soient  $p: E \rightarrow X$  et  $q: F \rightarrow X$  deux revêtements. On doit montrer que l'application

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(E, F) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(p^{-1}(*), q^{-1}(*))$$

est une bijection. L'injectivité découle directement du corollaire 9.2.3 (il faut appliquer le corollaire plusieurs fois par contre, pour tenir compte du fait que les revêtements ne sont pas connexes!).

Pour la surjectivité, commençons par le cas où  $E$  et  $F$  sont connexes, de sorte qu'en choisissant  $e \in p^{-1}(*)$  et  $f \in q^{-1}(*)$  on peut identifier  $p^{-1}(*)$  à  $p_*(\pi_1(E, e)) \backslash \pi_1(X)$  et également identifier  $q^{-1}(*)$  à  $q_*(\pi_1(F, f)) \backslash \pi_1(X)$ . Dans ce cas, l'existence même d'une fonction

$$\phi: p_*(\pi_1(E, e)) \backslash \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(X) / q_*(\pi_1(F, f)) \backslash \pi_1(X)$$

nous assure que  $p_*(\pi_1(E, e)) \subset \sigma^{-1} q_*(\pi_1(F, f)) \sigma$ , où  $\sigma = \phi(1)$  vu dans  $\pi_1(X)$  (le stabilisateur de 1 est envoyé par  $\phi$  sur le stabilisateur de  $\phi(1)$ ). Soit alors  $f' \in q^{-1}(*)$  tel que  $q_*(\pi_1(F, f')) = \sigma^{-1} q_*(\pi_1(F, f)) \sigma$  : c'est possible par le lemme 9.5.4, et en fait  $f' = f \cdot \sigma$  par l'action de monodromie (il suffit de vérifier les définitions).

On peut finalement appliquer le théorème 9.4.1 pour obtenir un morphisme  $E \rightarrow F$  qui envoie  $e$  sur  $f'$ . Il est immédiat que l'application induite sur les fibres est précisément  $\phi$ .

Envisageons enfin le cas où  $E$  et/ou  $F$  n'est pas connexe. Alors  $p^{-1}(*)$  et  $q^{-1}(*)$  se découpent en orbites, en bijection avec les composantes connexes. Une application  $\pi_1(X)$ -équivariante entre deux ensembles envoie une orbite sur une autre orbite. Ainsi, on est ramenés au cas précédent.  $\square$

Le foncteur « fibre » du théorème a la propriété que  $F(E)$  possède une action transitive de  $\pi_1(X)$  si et seulement si  $E$  est connexe, clairement. On a donc

**Théorème 10.3.2.** *Soit  $\mathcal{C}_0$  la sous-catégorie de  $\mathcal{C}$  dont les objets sont les revêtements connexes, et soit  $\mathcal{D}_0$  la sous-catégorie de  $\mathcal{D}$  dont les objets sont les  $\pi_1(X)$ -ensembles transitifs. Alors  $F$  induit une équivalence de catégories entre  $\mathcal{C}_0$  et  $\mathcal{D}_0$ .*

Or, la catégorie  $\mathcal{D}_0$  est facile à décrire. Chaque objet est (à isomorphisme près) de la forme  $\pi_1(X)/G$  pour un certain sous-groupe  $G \subset \pi_1(X)$ ; deux objets  $\pi_1(X)/G$  et  $\pi_1(X)/H$  sont isomorphes si et seulement si  $H$  et  $G$  sont conjugués. On obtient donc :

**Corollaire 10.3.3.** *Il existe une correspondance entre les revêtements connexes de  $X$ , à isomorphisme près, et les classes de conjugaison de sous-groupes de  $\pi_1(X)$ .*

C'est-à-dire qu'un revêtement détermine une classe de conjugaison, deux revêtements déterminent la même classe si et seulement s'ils sont isomorphes, et chaque classe correspond à un revêtement.

Et voici la version pointée des résultats de ce paragraphes :

**Théorème 10.3.4.** *Le foncteur qui à un revêtement  $p: (E, *) \rightarrow (X, *)$  associe la fibre  $p^{-1}(*)$  établit une équivalence de catégories, entre la catégorie  $\mathcal{C}^*$  des revêtements de  $X$  avec point-base, et la catégorie  $\mathcal{D}^*$  des  $\pi_1(X, *)$ -ensembles avec point-base.*

*On a également une équivalence entre les sous-catégories  $\mathcal{C}_0^*$  et  $\mathcal{D}_0^*$  dont les objets sont les revêtements connexes pointés, resp. les  $\pi_1(X, *)$ -ensembles transitifs pointés.*

**Corollaire 10.3.5.** *Il existe une correspondance entre les revêtements connexes pointés de  $X$ , à isomorphisme près, et les sous-groupes de  $\pi_1(X)$ .*

Voyons des applications. Commençons par le plus évident.

**Exemple 10.3.6.** Si  $X$  est simplement connexe, alors le seul revêtement  $p: E \rightarrow X$  avec  $E$  connexe est isomorphe à l'identité  $X \rightarrow X$ , c'est-à-dire que  $p$  est un homéomorphisme. En effet  $\pi_1(X) = 1$  possède un seul sous-groupe! Et un revêtement de  $X$  non-connexe s'obtient en prenant des unions disjointes de copies de  $X$  et des homéomorphismes.

C'est une technique puissante pour montrer qu'une application  $Y \rightarrow X$  est un homéomorphisme : on vérifie que c'est un revêtement, ce qui est une condition purement locale, et que  $\pi_1(X) = 1$ .

**Exemple 10.3.7.** Le groupe  $\pi_1(S^1) \cong \mathbf{Z}$  possède un sous-groupe  $n\mathbf{Z}$  pour chaque  $n \in \mathbf{N}$  et aucun autre (par contre  $n\mathbf{Z} = -n\mathbf{Z}$ ). Le revêtement correspondant est l'application  $p = p_n: S^1 \rightarrow S^1$  telle que  $p_n(z) = z^n$  pour  $n > 0$ , et le revêtement  $\mathbf{R} \rightarrow S^1$  pour  $n = 0$ . Ici on utilise le calcul de l'exemple 9.6.1 pour vérifier que  $p_*(\pi_1(S^1))$  est bien le sous-groupe  $n\mathbf{Z}$ .

La classification prévoit que  $p_{-n}$  est isomorphe à  $p_n$ ; et en effet, la conjugaison complexe donne l'isomorphisme.

**Exemple 10.3.8.** Une conséquence de la classification qui mérite d'être remarquée est la suivante : s'il existe une équivalence d'homotopie entre  $X$  et  $Y$ , alors leurs revêtements sont en bijection (ou les catégories de leur revêtements sont équivalentes, si l'on veut).

Ainsi,  $\mathbf{C}^\times$  et le ruban de Moebius  $M$  ont le type d'homotopie de  $S^1$ , donc leurs revêtements sont décrits essentiellement comme dans l'exemple précédent.

Attention cependant : pour  $S^1$ , « l'espace total » d'un revêtement connexe, quand il n'est pas  $\mathbf{R}$ , est homéomorphe à  $S^1$  lui-même ; cette propriété reste vraie pour  $\mathbf{C}^*$ , mais pas pour  $M$  (on a déjà vu que le revêtement à deux feuillets connexe était un cylindre, qui est une variété orientable contrairement à  $M$ ).

## 10.4 Correspondances galoisiennes

Vous entendrez souvent le corollaire 10.3.3 résumé par la phrase « il existe une correspondance galoisienne entre les revêtements et les classes de conjugaison de sous-groupes du groupe fondamental ». C'est vrai, mais un peu artificiel (opinion personnelle). Pour information, voici quelques détails.

**Définition 10.4.1.** Soient  $P$  et  $Q$  des ensembles partiellement ordonnés. Une *correspondance galoisienne* entre  $P$  et  $Q$  est une paire de fonctions  $\zeta: P \rightarrow Q$  et  $\lambda: Q \rightarrow P$  telles que :

1.  $\zeta$  et  $\lambda$  sont décroissantes, c'est-à-dire que si  $x \leq y$  dans  $P$ , alors  $\zeta(y) \leq \zeta(x)$  dans  $Q$ , et pareil pour  $\lambda$  ;
2. pour tout  $p \in P$ , on a  $p \leq \lambda(\zeta(p))$ , et pour tout  $q \in Q$ , on a  $q \leq \zeta(\lambda(q))$ .

**Définition 10.4.2.** Soit  $P$  un ensemble partiellement ordonné. Une *adhérence* sur  $P$  est une fonction  $x \mapsto \bar{x}$  de  $P$  dans lui-même telle que

1.  $p \leq \bar{p}$ ,
2.  $\bar{\bar{p}} = \bar{p}$ ,
3. si  $p \leq q$ , alors  $\bar{p} \leq \bar{q}$ .

Lorsque  $p = \bar{p}$ , on dit que  $p$  est *fermé* (pour cette adhérence).

**Théorème 10.4.3.** Soit  $(\zeta, \lambda)$  une correspondance galoisienne entre  $P$  et  $Q$ . Alors

1. On obtient une adhérence sur  $P$  en posant  $\bar{p} = \lambda(\zeta(p))$ , et on obtient une adhérence sur  $Q$  en posant  $\bar{q} = \zeta(\lambda(q))$ .
2. Les deux applications  $\zeta$  et  $\lambda$  induisent des bijections réciproques entre les objets fermés dans  $P$  et les objets fermés dans  $Q$ .

Ce théorème est très facile à prouver : faites-le ! Il est même étonnant que les conséquences soient si riches.

Voici deux exemples célèbres, pour votre culture générale. Les démonstrations n'auraient rien à faire dans ce cours !

**Exemple 10.4.4.** Soit  $K/k$  une extension de corps galoisienne. Soit  $P$  l'ensemble des corps compris entre  $k$  et  $K$ , et soit  $Q$  l'ensemble des sous-groupes de  $G = Gal(K/k)$ . On obtient une correspondance galoisienne en posant

$$\zeta(L) = \{\sigma \in G : \sigma(x) = x \text{ pour } x \in L\} = Gal(K/L),$$

et

$$\lambda(H) = \{x \in K : \sigma(x) = x \text{ pour tous les } \sigma \in H\}.$$

D'après le théorème, il y a une bijection entre certains sous-corps de  $K$  et certains sous-groupes de  $G$ . La théorie de Galois montre, et ce n'est pas trivial, que tous les sous-corps sont « fermés » au sens ci-dessus, et tous les sous-groupes

de  $G$  sont « fermés » si  $K$  est de dimension finie sur  $k$ . En dimension infinie, on montre que  $G$  possède une topologie naturelle, et alors les sous-groupes « fermés » sont bel et bien ceux qui sont fermés pour cette topologie.

**Exemple 10.4.5.** Soit  $k$  un corps algébriquement clos. Soit  $P$  l'ensemble des idéaux de  $k[X_1, \dots, X_n]$ , et soit  $Q$  l'ensemble des parties de  $k^n$ . On a une correspondance galoisienne en posant

$$\zeta(I) = \{(x_1, \dots, x_n) : f(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ pour tous les } f \in I\},$$

et

$$\lambda(E) = \{f \in k[X_1, \dots, X_n] : f(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ pour tous les } (x_1, \dots, x_n) \in E\}.$$

Donc certains idéaux sont en bijection avec certaines parties de  $k^n$ . Un théorème célèbre, qui s'appelle le *Nullstellensatz*, montre que les idéaux « fermés » au sens ci-dessus sont les idéaux *radicaux*, c'est-à-dire les idéaux  $I$  tels que si  $f^m \in I$ , alors  $f \in I$ . L'opération d'adhérence associée à  $I$  son radical  $\sqrt{I} = \{f : f^m \in I \text{ pour un certain } m\}$ .

Les parties de  $k^n$  qui sont « fermées » sont appelées les *sous-variétés affines* de  $k^n$ . Ce sont les parties de  $k^n$  définies par des équations polynomiales (ie ce sont les ensemble de la forme  $\zeta(I)$ ). Ce sont effectivement les fermés pour une topologie sur  $k^n$  appelée *topologie de Zariski*.

**Exemple 10.4.6.** En utilisant les résultats de ce chapitre, vous établirez une correspondance galoisienne entre l'ensemble  $P$  des revêtements connexes de  $X$  à isomorphisme près, et l'ensemble  $Q$  des classes de conjugaison de sous-groupes de  $\pi_1(X, *)$ . On a  $\zeta(p: E \rightarrow X) = p_*(\pi_1(E))$ , et  $\lambda(G) = E_0/G$ , où  $E_0$  est un revêtement universel de  $X$  fixé.

Noter que l'ordre qu'il faut mettre sur  $P$  est  $E \leq F$  s'il existe un morphisme  $F \rightarrow E$ , et que tous les objets sont « fermés ». À ceci s'ajoute la difficulté (peu profonde) que les revêtements connexes de  $X$  ne forment pas un ensemble (mais ceux à isomorphisme près, si, en admettant que l'on puisse formaliser ça).

## 10.5 Revêtements réguliers

Dans le chapitre précédent nous avons parlé de revêtements galoisiens, ou réguliers, qui étaient connexes; maintenant nous ajoutons :

**Définition 10.5.1.** Soit  $p: E \rightarrow X$  un revêtement, avec  $E$  pas nécessairement connexe. Soit  $\Gamma$  un groupe. On dit que  $p$  est *galoisien de groupe*  $\Gamma$  s'il existe une action proprement discontinue de  $\Gamma$  sur  $E$  de sorte que  $p$  s'identifie à  $E \rightarrow E/\Gamma$ .

Dans le cas où  $E$  est connexe nous avons vu avec le théorème 9.1.9 une caractérisation des revêtements réguliers  $[p_*(\pi_1(E, *)) \text{ distingué dans } \pi_1(X, *)]$ , et en plus on pouvait retrouver  $\Gamma$  à partir de  $p$ . Dans le cas général il faut faire un peu plus attention (pensez que le choix d'un point-base dans  $E$  peut potentiellement tout changer pour la suite, si  $E$  n'est pas connexe!). Commençons donc par donner la version avec les  $\pi_1$ -ensembles.

**Définition 10.5.2.** Soit  $\pi$  un groupe et  $S$  un  $\pi$ -ensemble à droite. On dit que  $S$  est galoisien de groupe  $\Gamma$  s'il existe une action de  $\Gamma$  sur  $S$  à gauche qui est

simplement transitive (c'est-à-dire transitive et libre), et qui commute à l'action de  $\pi$  dans le sens où

$$(\gamma \cdot s) \cdot g = \gamma \cdot (x \cdot g)$$

pour  $\gamma \in \Gamma$  et  $g \in \pi$ .

Ainsi en choisissant un point dans  $S$  on obtient une identification de  $S$  avec l'ensemble  $\Gamma$ , et l'action de  $\Gamma$  est alors la multiplication à gauche. Mais la définition ci-dessus n'impose pas de point-base particulier.

**Lemme 10.5.3.** *Soit  $F$  le foncteur du théorème 10.3.1. Alors  $p: E \rightarrow X$  est un revêtement galoisien de groupe  $\Gamma$  si et seulement si  $F(p)$  est un  $\pi_1(X)$ -ensemble galoisien de groupe  $\Gamma$ .*

*Démonstration.* Exercice. Penser que si  $F$  est un foncteur *quelconque*, et si  $\Gamma$  est un groupe agissant par automorphismes sur l'objet  $A$ , alors il agit aussi par automorphismes sur l'objet  $F(A)$ .  $\square$

**Remarque 10.5.4.** Il est faux de penser que  $\Gamma$  est le groupe des automorphismes de  $p$  dans la catégorie  $\mathcal{C}$ , ou le groupe des automorphismes de  $F(p)$  dans la catégorie  $\mathcal{D}$  : penser au cas où l'action de  $\pi_1(X)$  sur  $S$  est triviale, alors  $S$  est  $\Gamma$ -galoisien pour tout groupe  $\Gamma$  que l'on peut mettre en bijection avec  $S$ , et en particulier on ne peut pas reconstruire  $\Gamma$  à partir de  $p$ . . . à part dans le cas un peu idiot où  $S$  n'a qu'un élément, et alors  $\Gamma$  doit être le groupe trivial, comme on le sait depuis l'étude du cas connexe.

Regardons d'un peu plus près le cas d'un  $\pi$ -ensemble galoisien de groupe  $\Gamma$ . Si l'on choisit  $* \in S$ , comme indiqué ci-dessus, alors  $\gamma \mapsto \gamma \cdot *$  identifie  $\Gamma$  et  $S$  comme  $\Gamma$ -ensembles à gauche. Si maintenant  $g \in \pi$ , alors  $* \cdot g = \phi(g) \cdot *$  pour un  $\phi(g) \in \Gamma$  unique. L'application  $g \mapsto \phi(g)$  est un homomorphisme de groupes, comme on le vérifie immédiatement (même argument que dans le corollaire 9.5.7).

On a donc un sous-groupe  $\phi(\pi) \subset \Gamma$ , et lorsque l'on identifie  $\Gamma$  et  $S$  l'action de  $\pi$  est celle du groupe  $\phi(\pi)$  par multiplication à droite. Donc tous les points de  $S$  ont le même stabilisateur, à savoir  $\ker \phi$ , qui bien sûr est distingué dans  $\pi$ .

L'homomorphisme  $\phi$  dépend du choix de  $* \in S$ ; si  $S$  est un  $\pi$ -ensemble pointé, nous pouvons alors noter  $\phi_S$  l'homomorphisme associé. On a alors :

**Lemme 10.5.5.** *Il y a une bijection entre les  $\pi$ -ensembles pointés qui sont galoisiens de groupe  $\Gamma$ , à isomorphisme près, et l'ensemble  $Hom(\pi, \Gamma)$ . Cette bijection est donnée par  $S \mapsto \phi_S$ .*

La preuve est facile. Traduit en termes de revêtements à l'aide de notre équivalence de catégories, on obtient un résultat remarquable :

**Théorème 10.5.6.** *Soit  $X$  connexe et localement contractile, et soit  $\Gamma$  un groupe. Alors il existe une bijection entre les revêtements pointés de  $X$  qui sont galoisiens de groupe  $\Gamma$ , à isomorphisme près, et l'ensemble  $Hom(\pi_1(X), \Gamma)$ .*

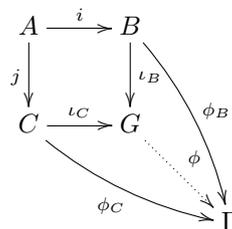
Dans le chapitre suivant, nous utiliserons ce résultat pour montrer le théorème de Van Kampen, qui décrit le groupe fondamental de  $X$  lorsque  $X = U \cup V$ , en fonction de  $\pi_1(U)$ ,  $\pi_1(V)$  et  $\pi_1(U \cap V)$ . L'idée est simple : pour caractériser un groupe  $\pi$ , il suffit de décrire tous les ensembles  $Hom(\pi, \Gamma)$  pour tous les groupes  $\Gamma$ ; donc il faut décrire les revêtements galoisiens de  $X$ , et on peut faire ça par « recollement » de revêtements au-dessus de  $U$  et  $V$ .

# Chapitre 11

## Le théorème de Van Kampen

### 11.1 Produits amalgamés de groupes

**Définition 11.1.1.** Soient  $A, B$  et  $C$  des groupes, et soient  $i: A \rightarrow B$  et  $j: A \rightarrow C$  des homomorphismes. On dit qu'un groupe  $G$  est le *produit amalgamé de  $B$  et  $C$  au-dessus de  $A$*  lorsque qu'il existe des homomorphismes  $\iota_B: B \rightarrow G$  et  $\iota_C: C \rightarrow G$  tels que  $\iota_B \circ i = \iota_C \circ j$  et ayant la propriété suivante. Pour tout groupe  $\Gamma$  et toute paire d'homomorphismes  $\phi_B: B \rightarrow \Gamma$  et  $\phi_C: C \rightarrow \Gamma$  vérifiant  $\phi_B \circ i = \phi_C \circ j$ , il existe un unique homomorphisme  $\phi: G \rightarrow \Gamma$  tel que  $\phi \circ \iota_B = \phi_B$  et  $\phi \circ \iota_C = \phi_C$ . Voir la figure ci-dessous.



**Remarque 11.1.2.** Cette définition signifie que  $G$  est, en un sens, le « plus petit » groupe tel qu'on peut former un carré commutatif avec  $A, B$  et  $C$ .

Pour se forger une intuition, remplaçons momentanément  $A, B, C, G$  et  $\Gamma$  dans la définition ci-dessus par des groupes abéliens (ou même par des ensembles) ; alors  $G$  est une limite directe, il existe et est unique et on peut le définir comme un quotient approprié de  $B \oplus C$  (ou de l'union disjointe de  $B$  et  $C$  dans le cas des ensembles).

Dans le cas des groupes généraux (pas nécessairement abéliens), il faut travailler un peu pour arriver au lemme suivant.

**Lemme 11.1.3.** *Étant donnés  $A, B, C, i$  et  $j$  comme ci-dessus, le groupe  $G$  existe et est unique à isomorphisme près.*

On note alors  $G = B *_A C$ .

*Démonstration.* L'unicité de  $G$  est facile, comme pour tous les objets vérifiant une « propriété universelle ». En effet, soient  $G$  et  $G'$  satisfaisant la définition. Comme  $\iota'_B \circ i = \iota'_C \circ j$ , on a une application  $\phi_1$  qui fait commuter le diagramme ci-dessus avec  $\Gamma = G'$ . De même il existe  $\phi_2$  faisant commuter un diagramme avec  $G$  remplacé par  $G'$  et  $\Gamma$  par  $G$ . Mais alors, la composée  $\phi_2 \circ \phi_1$  fait commuter un diagramme encore similaire, avec  $\Gamma = G$  apparaissant deux fois, et  $\phi_B = \iota_B$ ,  $\phi_C = \iota_C$ . Par unicité, on doit avoir  $\phi_2 \circ \phi_1 =$  l'identité. De même pour  $\phi_1 \circ \phi_2$ . Donc  $G$  et  $G'$  sont isomorphes.

Pour l'existence, commençons par le cas où  $A$  est le groupe trivial, et décrivons le groupe  $B * C$ , le « produit libre » de  $B$  et  $C$ . Un *mot* est un  $n$ -uplet  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  avec  $x_i \in B \cup C$ . Soit  $M$  l'ensemble de tous les mots, pour tous les  $n$ , y compris le mot vide pour  $n = 0$ . On a une opération de juxtaposition sur  $M$ , la composition de  $m_1 = (x_1, \dots, x_n)$  et  $m_2 = (y_1, \dots, y_m)$  étant  $m_1 \cdot m_2 = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ . Cette multiplication donne une structure de monoïde associatif sur  $M$ , l'élément neutre étant le mot vide.

Soit  $\sim$  la relation d'équivalence sur  $M$  engendrée par les relations suivantes. Si  $(x_1, \dots, x_n)$  a la propriété que  $x_i$  et  $x_{i+1}$  sont tous les deux dans  $B$ , ou dans  $C$ , pour un certain indice  $i$ , alors

$$(x_1, \dots, x_n) \sim (x_1, \dots, x_i x_{i+1}, \dots, x_n).$$

De plus, si  $x_k = 1$  pour un indice  $k$  on a

$$(x_1, \dots, x_n) \sim (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Si  $m_1 \sim m'_1$  et  $m_2 \sim m'_2$ , il est clair que  $m_1 \cdot m_2 \sim m'_1 \cdot m'_2$ . Il y a donc une multiplication sur le quotient  $M / \sim$ . Or ce quotient est un groupe et pas seulement un monoïde, puisque l'inverse de  $(x_1, \dots, x_n)$  est donné par  $(x_n^{-1}, \dots, x_1^{-1})$  : en effet

$$(x_1, \dots, x_n, x_n^{-1}, \dots, x_1^{-1}) \sim \text{mot vide}.$$

On pose alors  $B * C = M / \sim$ . Pour  $x \in B$  on note  $\iota_B(x)$  l'élément  $x$  vu comme (la classe d'équivalence d') un mot de longueur 1 dans  $M / \sim$ . De même pour  $\iota_C(x)$  pour  $x \in C$ . Il est immédiat que  $\iota_B$  et  $\iota_C$  sont des homomorphismes. L'existence et l'unicité de  $\phi$  faisant commuter le diagramme ci-dessus sont évidentes (on définit d'abord  $\tilde{\phi} : M \rightarrow \Gamma$  qui envoie  $(x_1, \dots, x_n)$  sur le produit  $\phi_1(x_1) \cdots \phi_n(x_n)$  où  $\phi_i = \phi_B$  si  $x_i \in B$  et  $\phi_i = \phi_C$  sinon, et on vérifie la compatibilité avec  $\sim$ ).

Pour le cas général de  $B *_A C$ , on prend  $(B * C) / N$ , où  $N$  est le plus petit sous-groupe distingué de  $B * C$  contenant les éléments  $\iota_B(x) \iota_C(x)^{-1}$  pour  $x \in A$ .  $\square$

**Remarque 11.1.4.** Dans de nombreux livres, la démonstration de ce lemme est plus longue. C'est parce que nous avons fait l'économie d'une description complète de  $B * C$ . Disons qu'un mot  $(x_1, \dots, x_n)$  est *réduit* si chaque  $x_i \neq 1$ , et si pour chaque paire  $(x_i, x_{i+1})$  ces deux éléments ne sont pas dans le même groupe,  $B$  ou  $C$ . Il est alors clair que chaque élément du groupe  $M / \sim$  peut être représenté par un mot réduit. Mais il est beaucoup moins clair que ce mot est unique ! C'est pourtant le cas, et comme rien n'est gratuit nous devons maintenant prendre le temps de montrer le lemme suivant.

L'idée de mettre une loi de groupe directement sur l'ensemble des mots réduits semble bonne, mais il est très pénible de vérifier l'associativité, par exemple.

**Lemme 11.1.5.** *Chaque élément de  $B * C$  est représenté par un unique mot réduit.*

*Démonstration.* Soit  $X$  l'ensemble des mots réduits. Faisons agir  $B$  sur  $X$  par

$$b \cdot (x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} (bx_1, x_2, \dots, x_n) & \text{si } x_1 \in B \text{ et } bx_1 \neq 1, \\ (x_2, \dots, x_n) & \text{si } b = x_1^{-1}, \\ (b, x_1, x_2, \dots, x_n) & \text{si } x_1 \in C. \end{cases}$$

(Et  $b \cdot \emptyset = (b)$ .)

On vérifie que c'est bien une action, d'où un homomorphisme  $B \rightarrow \text{Aut}(X)$ . De même on a une action de  $C$  et un homomorphisme  $C \rightarrow \text{Aut}(X)$ . La propriété caractéristique des produits libres nous donne donc un homomorphisme  $B * C \rightarrow \text{Aut}(X)$ , et donc une action de  $B *_A C$  sur  $X$  qui « prolonge » celles de  $B$  et  $C$ .

Soit  $m$  un mot réduit et  $g$  l'élément correspondant de  $B *_A C$ . Il est alors immédiat que  $g \cdot \emptyset = m$  (la partie non-triviale était seulement de montrer que l'action est bien définie). On peut donc retrouver  $m$  à partir de  $g$ , d'où l'unicité.  $\square$

**Exemple 11.1.6.** L'exemple le plus important est sans doute celui de  $\mathbf{Z} * \mathbf{Z}$ , qu'on note en général  $F_2$ . Pour bien y voir on a besoin de prendre deux « copies » de  $\mathbf{Z}$  distinctes, et de travailler en notation multiplicative (puisque, nous allons le voir,  $\mathbf{Z} * \mathbf{Z}$  n'est pas commutatif). Soient donc  $\langle a \rangle$  et  $\langle b \rangle$  deux groupes cycliques infinis, et soit  $F(a, b) = \langle a \rangle * \langle b \rangle$ . Chaque élément de  $F(a, b)$  est donné par un mot réduit, comme par exemple (en ne mettant pas de parenthèses puisque nous pensons aux éléments du groupe)

$$a^{k_1} b^{k_2} a^{k_3} b^{k_4} \dots a^{k_{n-1}} b^{k_n}$$

avec chaque  $k_i \neq 0$ , et en alternant les  $a$  et les  $b$ . Bien sûr un mot réduit peut aussi finir par une puissance de  $a$ , où commencer par une puissance de  $b$ , ou les deux. Avec le mot vide, nous venons de lister tous les types de mots réduits.

Le groupe  $F(a, b)$  possède la propriété suivante. Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux éléments d'un groupe  $\Gamma$ , alors il existe un unique homomorphisme  $F(a, b) \rightarrow \Gamma$  qui envoie  $a$  sur  $\alpha$  et  $b$  sur  $\beta$ . On dit que  $F_2$ , ou  $F(a, b)$ , est le groupe libre sur deux générateurs.

Il est facile de vérifier l'associativité  $\mathbf{Z} * (\mathbf{Z} * \mathbf{Z}) = (\mathbf{Z} * \mathbf{Z}) * \mathbf{Z}$ , et ce groupe, noté  $F_3$ , est appelé le groupe libre sur 3 générateurs. Par une récurrence on définit le groupe libre sur  $n$  générateurs (le groupe libre sur un générateur est  $\mathbf{Z}$ ).

Si  $I$  est un ensemble fini, on peut donc définir  $F(I)$ , le groupe libre sur les éléments de  $I$ ; son abélianisé  $F(I)^{ab}$  est le  $\mathbf{Z}$ -module libre sur  $I$  (petit exercice). Une inclusion  $I \subset J$  donne un homomorphisme  $F(I) \subset F(J)$  que l'on peut aussi voir comme une inclusion. En prenant

$$\bigcup_{I^* \subset I} F(I^*)$$

où  $I^*$  parcourt les parties finies de  $I$ , on définit le groupe libre sur un ensemble quelconque  $I$ , toujours noté  $F(I)$ . (En toute rigueur on devrait parler de limite directe).

Des exemples de la forme  $B *_A C$  avec  $A$  non-trivial vont être étudiés sur des exemples topologiques.

## 11.2 Le théorème de Van Kampen

C'est le suivant :

**Théorème 11.2.1.** *Soit  $X$  un espace topologique localement contractile. On suppose qu'il existe deux ouverts  $U$  et  $V$  tels que  $X = U \cup V$  où  $U$ ,  $V$  et  $U \cap V$  sont tous les trois supposés connexes par arcs. Soit  $x \in U \cap V$ . Alors*

$$\pi_1(X, x) \cong \pi_1(U, x) *_{\pi_1(U \cap V, x)} \pi_1(V, x).$$

*Démonstration.* À partir du théorème 10.5.6, c'est très facile. Soient  $\phi_U : \pi_1(U) \rightarrow \Gamma$  un homomorphisme, et de même avec  $\phi_V$ , et supposons que les compositions

$$\pi_1(U \cap V) \longrightarrow \pi_1(U) \xrightarrow{\phi_U} \Gamma$$

et

$$\pi_1(U \cap V) \longrightarrow \pi_1(V) \xrightarrow{\phi_V} \Gamma$$

coïncident. Nous devons montrer qu'il existe  $\phi : \pi_1(X) \rightarrow \Gamma$  tel que

$$\pi_1(U) \longrightarrow \pi_1(X) \xrightarrow{\phi} \Gamma$$

soit l'homomorphisme  $\phi_U$ , et de même avec  $V$ .

Or d'après le théorème 10.5.6, l'homomorphisme  $\phi_U$  définit un revêtement galoisien de groupe  $\Gamma$  au-dessus de  $U$ , disons  $p_U : E_U \rightarrow U$ . De même on a un revêtement  $p_V : E_V \rightarrow V$ . La condition sur  $\phi_U$  et  $\phi_V$  garantit, toujours d'après le théorème, que les revêtements  $p_U^{-1}(U \cap V) \rightarrow U \cap V$  et  $p_V^{-1}(U \cap V) \rightarrow U \cap V$  sont isomorphes. On peut donc former

$$E = E_U \cup_f E_V$$

où  $f$  est un homéomorphisme entre  $p_U^{-1}(U \cap V)$  et  $p_V^{-1}(U \cap V)$ . Il est immédiat que  $E$  possède une application continue  $p : E \rightarrow X$  qui en fait un revêtement galoisien de groupe  $\Gamma$ , qui étend les deux autres. Par le théorème, on obtient  $\phi : \pi_1(X) \rightarrow \Gamma$  qui remplit la condition ci-dessus.

Il faut vérifier aussi que  $\phi$  est unique, mais c'est encore une conséquence du même théorème (si  $p : E \rightarrow X$  convient, alors  $p^{-1}(U) \rightarrow U$  doit être isomorphe à  $E_U$ , etc).  $\square$

**Exemple 11.2.2.** Le cas particulier suivant s'appelle parfois « le théorème spécial de Van Kampen » : si  $X$  est l'union de deux ouverts simplement connexes  $U$  et  $V$  tels que  $U \cap V$  est connexe, alors  $X$  est lui-même simplement connexe.

Considérons par exemple  $X = S^n$ , avec  $U$  et  $V$  des ouverts se rétractant sur les hémisphères nord et sud respectivement. Alors  $U \cap V$  se rétracte sur l'équateur  $S^{n-1}$  qui est connexe pour  $n \geq 2$ . Donc  $S^n$  est simplement connexe pour  $n \geq 2$ .

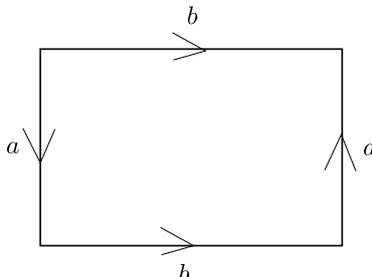
**Exemple 11.2.3.** Prenons  $X = S^1 \vee S^1$ , et  $U$  (resp.  $V$ ) un ouvert contenant un  $S^1$  (resp. l'autre) et se rétractant dessus. Alors  $U \cap V$  est contractile. Par suite

$$\pi_1(S^1 \vee S^1) = \pi_1(S^1) * \pi_1(S^1) = F_2,$$

le groupe libre sur deux éléments.

De la même manière, le groupe fondamental d'une union pointée de cercles, indexée par un ensemble  $I$ , est le groupe libre sur  $I$ .

**Exemple 11.2.4.** Prenons  $X =$  la bouteille de Klein, obtenue comme d'habitude en identifiant les côtés d'un carré, avec les notations suivantes :



Prenons  $U =$  l'intérieur du carré et  $V =$  un « petit » voisinage du bord du carré, ou plutôt l'image de ce voisinage dans  $X$  après identification. Alors  $V$  se rétracte sur une union pointée de deux cercles, de sorte que  $\pi_1(V)$  est le groupe libre sur deux éléments que l'on va noter  $a$  et  $b$  (comme sur le dessin). Par contre  $U$  est contractile, et  $U \cap V$  se rétracte sur un cercle. D'après le théorème de Van Kampen,

$$\begin{aligned}\pi_1(X) &= F(a, b) *_{\mathbf{Z}} \{1\} \\ &= F(a, b)/N\end{aligned}$$

où  $N$  est le plus petit sous-groupe distingué de  $F(a, b)$  contenant l'image du générateur de  $\pi_1(U \cap V)$ . Or l'image de ce générateur est  $abab^{-1}$  visiblement. (Ici nous utilisons le fait que l'isomorphisme entre  $\pi_1(V)$  et  $F(a, b)$  est lui-même donné par Van Kampen comme dans l'exemple précédent, et fait intervenir les morphismes induits par les inclusions des deux cercles ; et pour ces cercles nous connaissons un générateur *explicite* du groupe fondamental!)

Le groupe  $\pi_1(X)$  est donc engendré par deux éléments  $a$  et  $b$  satisfaisant la relation  $bab^{-1} = a^{-1}$ , et à partir de ça on peut retrouver la description donnée dans l'exercice 59.

Les groupes présentés de la sorte, comme un quotient d'un groupe libre par le plus petit sous-groupe distingué contenant certains éléments, sont très communs. On utilise même une notation spéciale, ici :

$$\pi_1(X) = \langle a, b : abab^{-1} \rangle.$$

# Exercices

**Exercice 60.** Calculer  $\pi_1(\Sigma_g)$ . Comparer avec  $H_1(\Sigma_g, \mathbf{Z})$ .

**Exercice 61.** Dessiner les revêtements de  $S^1 \vee S^1$  qui correspondent aux sous-groupes suivants de  $F(a, b)$  :

- le plus petit sous-groupe distingué contenant  $a$  ;
- le groupe des commutateurs  $[F(a, b), F(a, b)]$  ;
- tous les sous-groupes d'indices 2 (*ils sont automatiquement distingués*).

**Exercice 62.** Soit  $G$  un groupe avec une présentation de la forme

$$G = \langle x_1, x_2, \dots, x_n : r_1, r_2, \dots, r_k \rangle,$$

où chaque « relation »  $r_i$  est un mot de  $F(x_1, \dots, x_n)$ . (On rappelle que la notation signifie que  $G$  est le quotient de ce groupe libre par le plus petit sous-groupe distingué contenant les  $r_i$ .) Par exemple  $G$  peut être n'importe quel groupe fini.

Construire un CW-complexe  $X$  de dimension 2, contenant un nombre fini de cellules, tel que  $\pi_1(X) \cong G$ .

Troisième partie

Algèbre homologique

# Chapitre 12

## Foncteurs dérivés

Dans ce chapitre, nous allons définir les *foncteurs dérivés* d'un foncteur de la catégorie des  $\Lambda$ -modules vers celle des groupes abéliens. C'est une construction assez abstraite, et nouvelle pour vous. Dans le chapitre suivant, nous expliquerons rapidement qu'on peut généraliser ceci à d'autres catégories que celle des modules sur un anneau, pour peu que certains axiomes soient satisfaits. En prenant une catégorie bien particulière, celle des *faisceaux*, on va démontrer un théorème spectaculaire sur la cohomologie des variétés.

En plus de la nouveauté des concepts, il va falloir s'habituer dans cette succession de chapitres à un style assez propre à « l'algèbre homologique » : on montre une grande quantité de résultats extrêmement simples, pris séparément, et un résultat non-trivial finit par apparaître comme par magie.

### 12.1 Catégories de modules

Nous allons écrire  $\Lambda\text{-Mod}$  pour la catégorie des  $\Lambda$ -modules à gauche, où  $\Lambda$  est un anneau *non supposé commutatif* : les objets sont donc les groupes abéliens  $M$  munis d'une opération  $(\lambda, m) \mapsto \lambda \cdot m$  pour  $\lambda \in \Lambda$  et  $m \in M$ , linéaire en  $m$  et satisfaisant  $\lambda \cdot (\mu \cdot m) = (\lambda\mu) \cdot m$ . Nous allons devoir considérer aussi la catégorie  $\text{Mod}-\Lambda$  des  $\Lambda$ -modules à droite, qui eux possèdent une opération  $(m, \lambda) \mapsto m \cdot \lambda$  telle que  $(m \cdot \lambda) \cdot \mu = m \cdot (\lambda\mu)$ .

**Exemple 12.1.1.** Si  $\Lambda$  est commutatif, tout module à gauche est aussi un module à droite et vice-versa, pour la même action (qu'est-ce qui ne marche pas si  $\Lambda$  n'est pas commutatif?)

**Exemple 12.1.2.** Le cas où  $\Lambda$  est un corps est à garder en tête : tous les concepts de ce chapitre vont être triviaux, tous les groupes que nous allons définir seront nuls. En fait on peut dire que les outils de ce chapitre « mesurent » à quel point  $\Lambda$  est loin d'être un corps.

**Exemple 12.1.3.** Le cas  $\Lambda = \mathbf{Z}$  est un bon exemple. La catégorie  $\Lambda\text{-Mod}$  est alors celle des groupes abéliens. Les concepts de ce chapitre vont être non-triviaux, mais bien calculables.

**Exemple 12.1.4.** Pour un exemple d'anneau pour lequel les choses se corsent, et deviennent intéressantes, prendre un groupe  $G$ , un anneau  $k$  commutatif (et

« simple », par exemple un corps), et  $\Lambda = k[G]$ , « l'algèbre du groupe  $G$  ». C'est l'algèbre sur  $k$  obtenue en prenant le  $k$ -module libre sur  $G$ , et en prenant l'unique multiplication qui « prolonge » celle sur  $G$ ; donc

$$\left( \sum_{\sigma \in G} \lambda_{\sigma} \sigma \right) \cdot \left( \sum_{\tau \in G} \mu_{\tau} \tau \right) = \sum_{\sigma, \tau} \lambda_{\sigma} \mu_{\tau} \sigma \tau,$$

où  $\sigma \tau$  est calculé dans  $G$ .

(Si on pense au module libre sur  $G$  comme au module des fonctions de  $G$  vers  $k$ , alors la multiplication de  $k[G]$  est donnée par

$$(f \cdot g)(\sigma) = \sum_{s, t \text{ tels que } st = \sigma} f(s)g(t).$$

On parle parfois du « produit de convolution » de  $f$  et  $g$ , éventuellement déjà vu en analyse.)

Un  $k[G]$ -module (à gauche) est donc un  $k$ -module  $M$ , muni d'opérations  $(g, m) \mapsto g \cdot m$  linéaires en  $m$  et telles que  $g \cdot (h \cdot m) = (gh) \cdot m$  (pour  $g, h \in G$ ). En d'autres termes, il existe un homomorphisme  $G \rightarrow \text{Aut}_{k\text{-mod}}(M)$ . On dit parfois que  $M$  est une *représentation de  $G$*  sur  $k$ , l'expression venant du fait que si  $k$  est un corps, et si  $M$  est de dimension finie  $n$  sur  $k$ , alors  $M$  est essentiellement donné par un homomorphisme  $G \rightarrow GL_n(k)$ , c'est-à-dire qu'on a des matrices « représentant » le groupe.

**Exemple 12.1.5.** Parfois, l'exemple  $\Lambda = C(X)$ , l'anneau des fonctions continues définies sur l'espace  $X$ , à valeurs dans  $\mathbf{R}$ , est également intéressant.

Il faut s'habituer un peu aux anneaux non-commutatifs. Notons en particulier les choses suivantes.

### Les ensembles d'homomorphismes.

Si  $M, N \in \Lambda\text{-Mod}$ , alors l'ensemble

$$\text{Hom}_{\Lambda\text{-Mod}}(M, N)$$

est *juste un groupe abélien*. Essayez de montrer que c'est encore un  $\Lambda$ -module et voyez où ça coïncide. Par contre si  $\Lambda$  est commutatif, alors  $\text{Hom}_{\Lambda\text{-Mod}}(M, N) \in \Lambda\text{-Mod}$ .

Écrivons  $\mathcal{A}b$  pour la catégorie des groupes abéliens, soit  $A \in \mathcal{A}b$ , et soit  $M \in \text{Mod}\text{-}\Lambda$  (à droite!). Alors on peut aussi regarder

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}b}(M, A),$$

et ce dernier est un  $\Lambda$ -module à gauche! En effet en définissant  $\lambda \cdot f$  par  $(\lambda \cdot f)(m) = f(m \cdot \lambda)$ , on a bien  $((\lambda \mu) \cdot f)(m) = f(m \cdot (\lambda \mu)) = f((m \cdot \lambda) \cdot \mu) = (\mu \cdot f)(m \cdot \lambda) = (\lambda \cdot (\mu \cdot f))(m)$ , donc  $(\lambda \mu) \cdot f = \lambda \cdot (\mu \cdot f)$ .

### Les produits tensoriels

Vous connaissez déjà les produits tensoriels sur un anneau commutatif. Dans le cas général, il faut prendre  $A \in \text{Mod}\text{-}\Lambda$  et  $B \in \Lambda\text{-Mod}$  pour former le *groupe abélien*

$$A \otimes_{\Lambda} B.$$

Lorsque  $\Lambda$  est commutatif, et seulement dans ce cas, le produit tensoriel est encore un  $\Lambda$ -module. En fait on a la proposition suivante.

**Proposition 12.1.6.** *Soit  $A \in \text{Mod}-\Lambda$  et  $B \in \Lambda-\text{Mod}$ . Alors il existe un unique groupe abélien  $M$  avec la propriété suivante. Il existe une application bilinéaire  $\phi: A \times B \rightarrow M$  qui vérifie  $\phi(a\lambda, b) = \phi(a, \lambda b)$ ; et pour toute application bilinéaire*

$$f: A \times B \rightarrow N,$$

où  $N$  est un groupe abélien, qui vérifie  $f(a\lambda, b) = f(a, \lambda b)$ , on a une factorisation  $f = \tilde{f} \circ \phi$  avec  $\tilde{f}: M \rightarrow N$ .

Le groupe  $M$  est noté  $A \otimes_{\Lambda} B$  et  $\phi(a, b)$  est noté  $a \otimes b$ .

Lorsque  $\Lambda$  est commutatif, le groupe  $A \otimes_{\Lambda} B$  est muni d'une structure de  $\Lambda$ -module, et l'homomorphisme  $\phi$  est  $\Lambda$ -linéaire, ainsi que  $\tilde{f}$  si  $f$  l'est.

*Démonstration.* On prend  $L$ , le groupe abélien libre sur l'ensemble  $A \times B$ . On écrit  $a \otimes b$  pour  $(a, b)$  vu comme élément de  $L$ . Puis on considère le sous-groupe  $R$  de  $L$  engendré par toutes les relations nécessaires, à savoir

$$(a + a') \otimes b - (a \otimes b + a' \otimes b),$$

la même à droite, et

$$a\lambda \otimes b - a \otimes \lambda b.$$

Alors  $M = L/R$  convient. □

### L'adjonction

À partir de la propriété universelle des produits tensoriels, on montre (petit exercice) qu'il y a un isomorphisme canonique

$$\text{Hom}_{\text{Ab}}(A \otimes_{\Lambda} B, M) \cong \text{Hom}_{\Lambda-\text{Mod}}(B, \text{Hom}_{\text{Ab}}(A, M)),$$

pour  $A \in \text{Mod}-\Lambda$ ,  $B \in \Lambda-\text{Mod}$ ,  $M \in \text{Ab}$ .

## 12.2 Modules projectifs

**Définition 12.2.1.** Soit  $P \in \Lambda-\text{Mod}$ . On dit que  $P$  est *projectif* lorsque, pour toute application surjective  $\pi: B \rightarrow C$  entre  $\Lambda$ -modules, et tout homomorphisme  $f: P \rightarrow C$ , on peut trouver un relèvement  $\tilde{f}: P \rightarrow B$  tel que  $\pi \circ \tilde{f} = f$ . Voir la figure ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \tilde{f} \swarrow & \downarrow f & \\ B & \xrightarrow{\pi} & C \longrightarrow 0 \end{array}$$

Nous allons voir que l'exemple de base est celui des modules libres. Pour être tout-à-fait clair : un module est dit *libre* s'il est isomorphe au module libre sur un certain ensemble; ou encore, si c'est une somme directe de copies du module  $\Lambda$ . Pour exprimer le lien entre « libre » et « projectif », introduisons la terminologie suivante.

**Définition 12.2.2.** Une suite exacte

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\pi} C \longrightarrow 0$$

est dite *scindée* lorsqu'elle vérifie l'une des trois conditions équivalentes ci-dessous :

1. il existe  $s: C \rightarrow B$  tel que  $\pi \circ s = \text{l'identité}$ ;
2. il existe  $r: B \rightarrow A$  tel que  $r \circ \iota = \text{l'identité}$ ;
3. il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\iota} & B & \xrightarrow{\pi} & C \longrightarrow 0 \\ & & \text{id} \downarrow & & \cong \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{a \mapsto (a,0)} & A \oplus C & \xrightarrow{(a,c) \mapsto c} & C \longrightarrow 0 \end{array}$$

La démonstration de l'équivalence des trois vous est laissée en exercice (mais en gros, elle a été faite avec le lemme 4.2.1). On a alors :

**Lemme 12.2.3.** Les conditions ci-dessous sont équivalentes :

1.  $P$  est projectif;
2. toute suite exacte

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \xrightarrow{\pi} P \longrightarrow 0$$

est scindée ;

3. il existe  $Q$  tel que  $P \oplus Q$  est libre.

*Démonstration.* Supposons que  $P$  est projectif. Étant donnée une suite exacte comme dans le (2), on prend  $f: P \rightarrow P$  l'identité, et on trouve (par définition de « projectif »)  $\tilde{f}: P \rightarrow B$  tel que  $\pi \circ \tilde{f} = \text{l'identité}$ . Donc la suite est scindée, et (1) entraîne (2).

Supposons (2). Soit  $L$  un module libre muni d'une surjection  $\pi: L \rightarrow P$  : par exemple, prendre pour  $L$  le module libre sur l'ensemble  $P$  (ou sur toute partie génératrice). Alors la suite exacte

$$0 \longrightarrow \ker \pi \longrightarrow L \xrightarrow{\pi} P \longrightarrow 0$$

est scindée, et donc  $L \cong P \oplus \ker \pi$ . Donc (2)  $\implies$  (3).

Supposons (3). Soit  $Q$  tel que  $L = P \oplus Q$  est libre, et soit  $(x_i)_{i \in I}$  une base de  $L$ . Soit  $\pi: B \rightarrow C$  et  $f: P \rightarrow C$  comme dans la définition. On a alors un homomorphisme  $L \rightarrow P \rightarrow C$  que l'on va noter  $f'$  (ici  $L \rightarrow P$  est la projection de noyau  $Q$ ). Alors  $f'(x_i) = \pi(b_i)$  pour au moins un  $b_i \in B$  puisque  $\pi$  est surjective. On peut alors définir  $f'': L \rightarrow B$  comme l'unique homomorphisme tel que  $f''(x_i) = b_i$  (en utilisant l'axiome du choix!). Alors  $\pi \circ f'' = f'$ , et pour le problème de départ  $\tilde{f} = f'' \circ \iota$ , où  $\iota: P \rightarrow L$  est simplement l'inclusion, convient. D'où (3)  $\implies$  (1).  $\square$

**Exemple 12.2.4.** Si  $\Lambda$  est un corps, tous ses modules sont libres, et donc projectifs.

**Exemple 12.2.5.** Si  $\Lambda = \mathbf{Z}$ , on peut utiliser le résultat classique qui affirme qu'un sous-groupe d'un groupe abélien libre est encore libre. Donc dans ce cas projectif = libre.

**Exemple 12.2.6.** Dans le cas de  $\Lambda = k[G]$ , où  $k$  est un corps, on verra dans les exercices que si la caractéristique de  $k$  ne divise pas l'ordre de  $G$ , par exemple en caractéristique 0, alors tous les modules sont projectifs. C'est toujours faux dans le cas contraire, et l'étude des modules projectifs de  $k[G]$  est riche et difficile.

## 12.3 Résolutions

Nous arrivons à une définition cruciale :

**Définition 12.3.1.** Une *résolution projective* de  $M \in \Lambda\text{-Mod}$  est une suite exacte de la forme

$$\cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

où chaque  $P_i$  est un  $\Lambda$ -module projectif.

**Remarque 12.3.2.** On peut donner une définition équivalente comme suit. Une résolution projective est un complexe de chaînes de la forme

$$\cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$$

avec chaque  $P_i$  projectif, tel que  $H_i(P_*) = 0$  pour  $i > 0$ , et  $H_0(P_*) \cong M$ .

Si on pense à  $M$  comme au complexe de chaînes  $(M_*)$  dont tous les termes sont nuls sauf  $M_0 = M$ , alors l'homologie de  $(M_*)$  est la même que l'homologie de  $(P_*)$ ; donc en quelque sorte quand on a trouvé une résolution, on a « remplacé »  $(M_*)$  par un autre complexe de même homologie, mais dont tous les termes sont projectifs, ce qui va être techniquement très utile.

**Exemple 12.3.3.** Si  $M$  est lui-même projectif, on a la résolution

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

(Cette résolution est en fait infinie à gauche, tous les modules étant nuls.)

**Exemple 12.3.4.** Si  $\mathfrak{X}$  est un CW-complexe tel que  $|\mathfrak{X}|$  est contractile, alors le complexe  $C_*(\mathfrak{X}, k)$  forme une résolution libre, donc projective, du  $k$ -module trivial  $k$ .

**Lemme 12.3.5.** *Tout module possède des résolutions projectives. En fait on peut même construire un foncteur de  $\Lambda\text{-Mod}$  vers la catégorie des complexes de chaînes qui à un module associe une résolution canonique.*

*Démonstration.* Pour tout module  $M$ , soit  $L(M)$  le module libre sur l'ensemble  $M$ . On a canoniquement une application surjective

$$\pi_M : L(M) \longrightarrow M.$$

On a donc une suite exacte

$$L(\ker(\pi_M)) \longrightarrow L(M) \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

En prenant le module libre sur le noyau de la flèche de gauche, on continue, et de proche en proche on obtient une résolution de  $M$  par des modules libres, de manière canonique.  $\square$

**Exemple 12.3.6.** La résolution construite dans la démonstration n'est pas toujours la plus petite. Par exemple prenons  $\Lambda = \mathbf{Z}$ . Alors  $\ker \pi_M$  est libre, comme sous-groupe d'un groupe abélien libre. On a donc une résolution projective

$$0 \longrightarrow \ker \pi_M \longrightarrow L(M) \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

On a aussi un résultat d'unicité, mais il faut être précis. Si nous avons montré en entier l'existence de l'homologie singulière, nous aurions donné la définition suivante depuis longtemps :

**Définition 12.3.7.** Soient  $(A_*, \partial)$  et  $(B_*, \partial)$  deux complexes de chaînes, et soient  $f_*$  et  $g_*$  deux morphismes  $A_* \rightarrow B_*$  (comme dans l'exercice 12). Une *homotopie* entre les deux est une collection d'homomorphismes  $s_n: A_n \rightarrow B_{n+1}$  telle que

$$f - g = s \circ \partial + \partial \circ s,$$

ou de manière plus précise

$$f_n - g_n = s_{n-1} \circ \partial_n + \partial_{n+1} \circ s_n.$$

On dit que  $f_*: A_* \rightarrow B_*$  est une *équivalence d'homotopie* s'il existe un morphisme  $g_*: B_* \rightarrow A_*$  tel que les compositions  $f_* \circ g_*$  et  $g_* \circ f_*$  sont homotopes à l'identité.

L'intérêt des homotopies est dans le

**Lemme 12.3.8.** Si  $f_*$  et  $g_*$  sont homotopes, alors pour tout  $n$  on a  $H_n(f_*) = H_n(g_*)$ .

Si  $f_*$  est une équivalence d'homotopie, alors pour tout  $n$  l'homomorphisme induit  $H_n(f_*): H_n(A_*) \rightarrow H_n(B_*)$  est un isomorphisme.

*Démonstration.* Exercice. □

**Proposition 12.3.9.** 1. Soient  $M$  et  $N$  des  $\Lambda$ -modules, avec des résolutions projectives  $(P_*)$  et  $(Q_*)$  respectivement. Soit  $f: M \rightarrow N$  un homomorphisme. Alors il existe un morphisme  $f_*: P_* \rightarrow Q_*$  tel que  $H_0(f_*) = f$ , ou ce qui revient au même, tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_n & \longrightarrow & P_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & f_n \downarrow & & f_{n-1} \downarrow & & & & f_0 \downarrow & & f \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & Q_n & \longrightarrow & Q_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Q_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

2. Deux morphismes  $f_*$  comme ci-dessus sont toujours homotopes.
3. Entre deux résolutions  $(P_*)$  et  $(Q_*)$  de  $M$ , il existe toujours une équivalence d'homotopie. Il en existe même une unique qui induit l'identité de  $M$  sur  $H_0$ .

*Démonstration.* Le (1) est facile : on procède par récurrence, et l'existence de  $f_n$  comme dans le diagramme ci-dessus est garantie par le fait que  $P_n$  est projectif.

Passons au (2). On construit encore  $s_n$  par récurrence sur  $n$ , donc supposons que  $s_{n-1}$  a été défini. Le fait que  $f_*$  et  $g_*$  sont bien des morphismes signifie en particulier que

$$\partial_n [f_n - g_n] = [f_{n-1} - g_{n-1}] \partial_n,$$

en notant la composition des fonctions comme une multiplication (i.e. sans écrire  $\circ$ ). Par récurrence on sait que

$$f_{n-1} - g_{n-1} = s_{n-2}\partial_{n-1} + \partial_n s_{n-1}$$

donc en utilisant  $\partial^2 = 0$  on en conclut que

$$\partial_n [f_n - g_n] = \partial_n s_{n-1} \partial_n,$$

ou encore

$$\partial_n [f_n - g_n - s_{n-1}\partial_n] = 0.$$

Or l'application  $f_n - g_n - s_{n-1}\partial_n: P_n \rightarrow \ker \partial_n = \mathcal{I}m \partial_{n+1}$  peut se relever en  $s_n: P_n \rightarrow Q_{n+1}$  puisque  $P_n$  est projectif. Ceci prouve le (2).

Le (3) est alors très simple : on prend  $M = N$ , et  $f =$  l'identité. On obtient par (1) un morphisme  $f_*: P_* \rightarrow Q_*$ , et en inversant les rôles on a aussi  $g_*: Q_* \rightarrow P_*$ . Mais d'après le (2) les compositions  $f_* \circ g_*$  et  $g_* \circ f_*$  sont homotopes à l'identité (puisque l'identité de  $P_*$  vérifie la condition du (1), et de même pour  $Q_*$ ).  $\square$

## 12.4 Définition des foncteurs dérivés

**Définition 12.4.1.** Un foncteur  $F: \Lambda\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{A}b$  est dit *additif* lorsque l'application  $Hom_{\Lambda\text{-Mod}}(A, B) \rightarrow Hom_{\mathcal{A}b}(F(A), F(B))$  est un homomorphisme de groupes abéliens, pour tous modules  $A, B$ .

**Exemple 12.4.2.** Voici un exemple d'utilisation. Un module  $M$  est isomorphe à la somme directe  $A_1 \oplus A_2$  si et seulement si (exercice) il existe des applications  $\kappa_i: A_i \rightarrow M$  et des projections  $\pi_i: M \rightarrow A_i$  tels que  $\pi_i \circ \kappa_i = id$  et  $\kappa_1 \circ \pi_1 + \kappa_2 \circ \pi_2 = id$ . Si  $F$  est un foncteur additif, on en déduit que  $F(M)$  est la somme directe de  $F(A_1)$  et  $F(A_2)$ . (En fait on peut montrer que si ceci est vrai pour toutes les paires  $A_1, A_2$  alors  $F$  est additif.)

**Définition 12.4.3.** Un foncteur  $F: \Lambda\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{A}b$  est appelé *exact à droite* lorsque, pour toute suite exacte

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

la suite

$$F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow 0$$

est exacte.

**Remarque 12.4.4.** 1. Lorsque  $F(A) \rightarrow F(B)$  est injective pour tout choix de  $A$  et  $B$ , dans les notations ci-dessus, on dit (évidemment) que  $F$  est exact. Il préserve alors *toutes* les suites exactes, éventuellement infinies.

2. Lorsque la suite de départ est *scindée*, la suite obtenue en appliquant  $F$  est automatiquement exacte (et scindée), dès que  $F$  est additif.

3. Petit exercice : si  $F$  est exact à droite, et si

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

est exacte, alors

$$F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow 0$$

est exacte.

**Exemple 12.4.5.** Soit  $M$  un  $\Lambda$ -module à droite, et soit  $F$  le foncteur qui vérifie  $F(A) = M \otimes_{\Lambda} A$ . Alors  $F$  est exact à droite<sup>1</sup>. On vous laisse les détails de ça en exercice, mais voici des indications pour une preuve sans douleur. On va écrire  $\otimes$  pour  $\otimes_{\Lambda}$ . La partie évidente est que

$$M \otimes B \longrightarrow M \otimes C \longrightarrow 0$$

est exacte, et le fait que  $\mathcal{I}m(M \otimes A \rightarrow M \otimes B)$  est inclus dans  $\ker(M \otimes B \rightarrow M \otimes C)$ . Reste à voir l'égalité.

On montre d'abord que pour tout module  $N$  et toute suite exacte comme ci-dessus, la suite

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(C, N) \longrightarrow \text{Hom}(B, N) \longrightarrow \text{Hom}(A, N)$$

est exacte ( $\text{Hom}$  dans la catégorie  $\Lambda\text{-Mod.}$ ) C'est immédiat quand on regarde les définitions. Ensuite on applique ça à  $N = \text{Hom}_{\mathcal{A}b}(M, R)$  avec la relation

$$\text{Hom}_{\Lambda\text{-Mod}}(X, \text{Hom}_{\mathcal{A}b}(M, R)) = \text{Hom}_{\mathcal{A}b}(M \otimes X, R)$$

et on en déduit que la suite ci-dessous est exacte :

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}b}(M \otimes C, R) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}b}(M \otimes B, R) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}b}(M \otimes A, R).$$

Enfin, on applique ça à

$$R = \frac{M \otimes B}{\mathcal{I}m(M \otimes A \rightarrow M \otimes B)},$$

et le résultat suit.

Voici enfin la définition tant attendue.

**Définition 12.4.6.** Soit  $F: \Lambda\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{A}b$  un foncteur additif et exact à droite. Pour tout module  $A \in \Lambda\text{-Mod}$  et tout  $n \geq 0$ , on définit un groupe abélien  $L_n F(A)$  comme suit. On prend une résolution projective  $P_*$  de  $A$ , on applique  $F$  pour obtenir le complexe

$$\cdots \longrightarrow F(P_n) \longrightarrow F(P_{n-1}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow F(P_1) \longrightarrow F(P_0) \longrightarrow 0$$

(noter que  $A$  a disparu!), et on pose

$$L_n F(A) = H_n(F(P_*)).$$

Ceci est indépendant du choix de la résolution  $P_*$ . En effet par la proposition 12.3.9, on trouve une homotopie canonique entre deux résolutions  $P_*$  et  $Q_*$ , qui donne une homotopie entre  $F(P_*)$  et  $F(Q_*)$  et donc un isomorphisme au niveau de l'homologie.

Enfin, le lemme 12.3.5 affirme que l'on peut choisir les résolutions fonctoriellement, et donc chaque  $L_n F$  est un foncteur. On l'appelle le  $n$ -ième *foncteur dérivé à gauche* de  $F$ .

Pour apprécier le rôle des foncteurs dérivés, donnons tout de suite le théorème principal, précédé juste du

1. le théorème de Eilenberg-Watts dit qu'il n'y en a pas vraiment d'autres, en fait! Mais dans la suite du cours on généralise les concepts de ce paragraphe à d'autres types de foncteurs.

**Lemme 12.4.7.** *Pour  $n = 0$  le foncteur  $L_0F$  s'identifie à  $F$  lui-même. De plus, chaque foncteur  $L_nF$  est additif.*

*Démonstration.* Le fait que  $F$  est exact à droite donne immédiatement le fait que  $F(A)$  est isomorphe au quotient de  $F(P_0)$  par l'image de  $F(P_1) \rightarrow F(P_0)$ , donc le  $H_0$  est bien  $F(A)$ . Le « de plus » vous est laissé en exercice.  $\square$

Le point essentiel est alors le suivant :

**Théorème 12.4.8.** *Si*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

*est une suite exacte de  $\Lambda$ -modules, il existe une suite exacte longue de groupes abéliens*

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow L_nF(A) \rightarrow L_nF(B) \rightarrow L_nF(C) \rightarrow L_{n-1}F(A) \rightarrow L_{n-1}F(B) \rightarrow L_{n-1}F(C) \\ \rightarrow \cdots \rightarrow L_1F(A) \rightarrow L_1F(B) \rightarrow L_1F(C) \rightarrow F(A) \rightarrow F(B) \rightarrow F(C) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Vous montrerez à titre d'exercice le lemme suivant, qui est le point technique central de la preuve du théorème.

**Lemme 12.4.9** (Lemme du fer à cheval). *Étant donnée une suite exacte*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

*une résolution projective  $P_*$  de  $A$  et une résolution projective  $Q_*$  de  $C$ , il existe une résolution projective de  $B$  dont le  $n$ -ième module est  $P_n \oplus Q_n$ .*  $\square$

Attention, il ne s'agit pas de prendre la somme directe des complexes  $P_*$  et  $Q_*$ , la différentielle est bien différente...

*Démonstration du théorème 12.4.8.* On prend  $P_*$  et  $Q_*$  comme dans le lemme, et la résolution de  $B$  correspondante. Les suites exactes

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow P_n \oplus Q_n \longrightarrow Q_n \longrightarrow 0$$

étant *scindées*, les suites de la forme suivante sont encore exactes (et encore scindées) :

$$0 \longrightarrow F(P_n) \longrightarrow F(P_n \oplus Q_n) \longrightarrow F(Q_n) \longrightarrow 0.$$

On peut alors appliquer le lemme du zig-zag.  $\square$

Le fait que l'on puisse utiliser *n'importe quelle* résolution projective pour calculer les valeurs prises par un foncteur dérivé va être riche de conséquence. D'ailleurs, on va encore accroître cette flexibilité, en autorisant encore plus de résolutions :

**Théorème 12.4.10.** *Soit  $P_*$  une résolution de  $A$  par des modules vérifiant*

$$L_pF(P_n) = 0$$

*pour tout  $p \geq 1$  (et tout  $n \geq 0$ ). Alors on peut utiliser cette résolution pour calculer les groupes  $L_nF(A)$ .*

On dit parfois d'un module  $M$  tel que  $L_n F(M) = 0$  pour  $n \geq 1$  qu'il est  $F$ -acyclique. Par exemple si  $P$  est projectif il est  $F$ -acyclique, puisque l'on peut utiliser la résolution

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow P \longrightarrow 0.$$

Donc le théorème affirme que les résolutions  $F$ -acycliques peuvent remplacer les résolutions projectives.

*Démonstration.* On suppose donc que l'on a une suite exacte

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

ce qui donne en appliquant  $F$  le complexe

$$\cdots \longrightarrow F(P_n) \xrightarrow{\delta_n} F(P_{n-1}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow F(P_1) \longrightarrow F(P_0) \longrightarrow 0,$$

et le théorème affirme que

$$\frac{\ker \delta_n}{\mathcal{I}m \delta_{n+1}} \cong L_n F(A).$$

(Noter que l'on a écrit  $\delta_n$  pour  $F(\partial_n)$ .) On décide (c'est une idée à retenir) d'exploiter les suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow \ker \partial_n \xrightarrow{\iota_n} P_n \xrightarrow{\partial'_n} \mathcal{I}m \partial_n \longrightarrow 0 \quad (*)$$

(en espérant que les notations sont évidentes!) et

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}m \partial_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0. \quad (**)$$

La suite exacte longue associée à (\*\*\*) donne

$$L_p F(A) \cong L_{p-1} F(\mathcal{I}m \partial_1)$$

pour  $p \geq 2$ , et celle associée à (\*) donne

$$L_p F(\mathcal{I}m \partial_n) \cong L_{p-1} F(\ker \partial_n) = L_{p-1} F(\mathcal{I}m \partial_{n+1}),$$

également pour  $p \geq 2$  (et pour tout  $n$ ). En combinant les deux, on obtient finalement

$$L_p F(A) \cong L_1 F(\mathcal{I}m \partial_{p-1}),$$

et ça marche pour  $p \geq 2$ .

Pour conclure, le diagramme suivant va nous aider :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L_1 F(\mathcal{I}m \partial_n) & \longrightarrow & F(\ker \partial_n) & \xrightarrow{\kappa_n} & F(P_n) & \xrightarrow{\delta'_n} & F(\mathcal{I}m \partial_n) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & & & \downarrow & & \\ & & & & & & & & = & & \\ & & & & & & & & F(\ker \partial_{n-1}) & \xrightarrow{\kappa_{n-1}} & F(P_{n-1}) \end{array}$$

On a écrit  $\kappa_n = F(\iota_n)$  et  $\delta'_n = F(\partial'_n)$ . La première ligne est exacte, et on voit déjà que  $L_1 F(\mathcal{I}m \partial_n) \cong \ker \kappa_n$ . Donc  $L_n F(A) \cong \ker \kappa_{n-1}$ , et cette fois-ci ça marche pour  $n \geq 1$  (voir la suite exacte longue associée à (\*\*\*) pour  $n = 1$ ).

Il faut alors se rappeler que  $\delta_n = \kappa_{n-1} \circ \delta'_n$ , et cet homomorphisme fait un zig-zag sur le diagramme ci-dessus. On note de suite que

$$\mathcal{I}m \delta_n = \mathcal{I}m \kappa_{n-1}$$

pour tout  $n$ . On constate en outre que  $\delta'_n$  induit un homomorphisme

$$\ker \delta_n \longrightarrow \ker \kappa_{n-1}$$

qui est surjectif. Son noyau est  $\mathcal{I}m \kappa_n (= \mathcal{I}m \delta_{n+1})$  par exactitude. Finalement

$$\frac{\ker \delta_n}{\mathcal{I}m \delta_{n+1}} \cong \ker \kappa_{n-1} \cong L_n F(A),$$

ouf. □

## 12.5 Un exemple complet : $Tor$

**Définition 12.5.1.** Soit  $M \in Mod-\Lambda$ , et soit  $M \otimes_\Lambda$  le foncteur  $\Lambda-Mod \rightarrow Ab$  défini par

$$A \mapsto M \otimes_\Lambda A.$$

Il est additif et exact à droite. Le foncteur  $L_n(M \otimes_\Lambda)$  est noté

$$Tor_n^\Lambda(M, -),$$

c'est-à-dire que sa valeur en  $A$  est notée

$$Tor_n^\Lambda(M, A).$$

(En particulier  $Tor_0^\Lambda(M, A) = M \otimes_\Lambda A$ .)

Dans ce paragraphe on va prendre  $\Lambda = \mathbf{Z}$ , et calculer  $Tor_n^{\mathbf{Z}}(M, A)$  pour tout  $M$ , et tout  $A$  finiment engendré. Avant tout, rappelons nous que sur  $\mathbf{Z}$ , tout module a une résolution libre de la forme

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow L(A) \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$

En prenant cette résolution pour le calcul, on constate déjà que

**Lemme 12.5.2.** *On a*

$$Tor_n^{\mathbf{Z}}(M, A) = 0$$

si  $n \geq 2$ .

Il reste donc à calculer  $Tor_1^{\mathbf{Z}}(M, A)$ , que l'on note en général  $Tor(M, A)$  pour simplifier.

Ce foncteur est additif en  $A$ . Or si  $A$  est finiment engendré, c'est une somme directe de modules de la forme  $\mathbf{Z}$  ou  $\mathbf{Z}/n$ . Allons-y :

**Lemme 12.5.3.** *Pour tout  $M$ , on a  $Tor(M, \mathbf{Z}) = 0$ .*

*Démonstration.* Le module  $\mathbf{Z}$  est libre, donc projectif, donc acyclique pour tout foncteur. □

**Lemme 12.5.4.** *Pour tout  $M$ , on a*

$$\text{Tor}(M, \mathbf{Z}/n) = \text{noyau de la multiplication par } n \text{ sur } M.$$

On dit parfois aussi « la  $n$ -torsion dans  $M$  ». C'est de là que la notation  $\text{Tor}$  provient !

*Démonstration.* On utilise la résolution projective

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{x \mapsto nx} \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}/n \longrightarrow 0.$$

On obtient la suite exacte longue :

$$0 \longrightarrow \text{Tor}(M, \mathbf{Z}/n) \longrightarrow M \otimes \mathbf{Z} \xrightarrow{x \mapsto nx} M \otimes \mathbf{Z} \longrightarrow M \otimes \mathbf{Z}/n \longrightarrow 0,$$

en utilisant le fait que  $\text{Tor}(M, \mathbf{Z}) = 0$ . Puisque  $M \otimes \mathbf{Z}$  s'identifie à  $M$ , le résultat suit.  $\square$

**Exemple 12.5.5.** Le module  $\mathbf{Q}$  est sans torsion, il vérifie donc

$$\text{Tor}(\mathbf{Q}, A) = 0$$

pour tout  $A$  finiment engendré (en fait on peut le montrer pour tout  $A$ ). En général on dit qu'un module  $M$  est *plat* lorsque le foncteur  $M \otimes_{\Lambda} -$  est exact, on ce qui revient au même, lorsque  $\text{Tor}_n^{\Lambda}(M, A) = 0$  pour tout  $A$  et tout  $n$ . Pour  $\Lambda = \mathbf{Z}$  on peut montrer que plat = sans torsion (on l'a presque fait, avec la petite restriction sur les modules finiment engendré).

**Remarque 12.5.6.** Revenons à  $\Lambda$  quelconque. La notation  $\text{Tor}_n^{\Lambda}(M, A)$  semble donner des rôles symétriques à  $M$  et  $A$ , et il y a une bonne raison. On peut en effet montrer la chose suivante (mais nous ne le ferons pas). Tout d'abord, il est clair qu'on peut faire avec les  $\Lambda$ -modules à droite la même chose qu'avec les modules à gauche : définir les modules projectifs, les résolutions, et les foncteurs dérivés à gauche d'un foncteur additif exact à droite. On peut alors considérer, étant donné un  $A \in \Lambda\text{-Mod}$ , le foncteur  $M \mapsto M \otimes_{\Lambda} A$ , des modules à droite vers les groupes abéliens. Il possède des foncteurs dérivés à gauche, que l'on calcule à l'aide de résolutions de  $M$  ; on pourrait donc noter le foncteur  $\otimes_{\Lambda} A$ , et les foncteurs dérivés  $L_n(\otimes_{\Lambda} A)$ . Mais il se trouve que

$$L_n(\otimes_{\Lambda} A)(M) = \text{Tor}_n^{\Lambda}(M, A)!$$

En résumé, pour calculer  $\text{Tor}_n^{\Lambda}(M, A)$ , on peut prendre une résolution de  $M$  et la tensoriser par  $A$ , ou une résolution de  $A$  et la tensoriser par  $M$ , au choix. La démonstration est pénible, et ce n'est pas crucial pour la suite.

Voyons maintenant une application. Dans les exercices nous montrerons le

**Théorème 12.5.7** (Théorème des coefficients universels). *Pour tout espace topologique  $X$ , il existe une suite exacte naturelle en  $X$  :*

$$0 \longrightarrow H_n(X, \mathbf{Z}) \otimes M \longrightarrow H_n(X, M) \longrightarrow \text{Tor}(H_{n-1}(X, \mathbf{Z}), M) \longrightarrow 0.$$

*Cette suite exacte peut être scindée, mais pas naturellement en  $X$ .*

On a aussi :

**Théorème 12.5.8** (Künneth). *Si  $X$  et  $Y$  sont des espaces topologiques, on a une suite exacte naturelle en  $X, Y$  pour toute homologie ordinaire :*

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} H_p(X) \otimes H_q(Y) \longrightarrow H_n(X \times Y) \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} \text{Tor}(H_p(X), H_q(Y)) \longrightarrow 0.$$

*Si l'homologie est à coefficients dans  $\mathbf{Z}$ , alors cette suite exacte se scinde, mais pas naturellement en  $X, Y$ .*

## 12.6 Foncteurs dérivés à droite

On aurait pu faire tous les développements de ce chapitre, avec de petites modifications évidentes, dans le cadre suivant : on prend un foncteur additif  $F: \Lambda\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{A}b$  qui est *contravariant*, et qui est *exact à gauche* dans le sens où il transforme une suite exacte

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0 \quad (*)$$

en une suite exacte

$$0 \longrightarrow F(C) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(A).$$

L'exemple crucial à garder en tête est  $F(A) = \text{Hom}_{\Lambda\text{-Mod}}(A, M)$ .

Si l'on reprend les concepts de ce chapitre, on est tout juste amenés à changer le sens des flèches de temps en temps. On en conclut que, si on prend une résolution projective  $P_*$  de  $A$ , et que l'on calcule la cohomologie du complexe de cochaînes

$$0 \longrightarrow F(P_0) \longrightarrow F(P_1) \longrightarrow F(P_2) \longrightarrow \dots$$

alors le résultat ne dépend pas du choix de la résolution ; on note  $R^n F(A) = H^n(F(P_*))$ , et  $R^n F(-)$  est appelé le  $n$ -ième foncteur dérivé à droite de  $F$ . Ce sont des foncteurs additifs, et  $R^0 F$  s'identifie à  $F$  lui-même. Une suite exacte de la forme (\*) donne naissance à une suite exacte longue

$$0 \longrightarrow F(C) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(A) \longrightarrow R^1 F(C) \longrightarrow R^1 F(B) \longrightarrow R^1 F(A) \longrightarrow \dots$$

Enfin, on peut calculer  $R^n F(A)$  en prenant une résolution  $P_*$  de  $A$  par des modules  $F$ -acycliques, c'est-à-dire tels que  $R^n F(P_m) = 0$  pour tout  $n \geq 1$ .

**Exemple 12.6.1.** Dans le cas de  $F(A) = \text{Hom}_{\Lambda\text{-Mod}}(A, M)$ , on note

$$R^n F(A) = \text{Ext}_{\Lambda}^n(A, M).$$

Prenons  $\Lambda = \mathbf{Z}$ . Alors  $\text{Ext}_{\mathbf{Z}}^n(A, M) = 0$  pour  $n \geq 2$ , pour les mêmes raisons que précédemment. Notons  $\text{Ext}(A, M)$  pour  $\text{Ext}_{\mathbf{Z}}^1(A, M)$ . On a  $\text{Ext}(\mathbf{Z}, M) = 0$  puisque  $\mathbf{Z}$  est projectif. En regardant la résolution

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{x \mapsto nx} \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}/n \longrightarrow 0,$$

on obtient

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(\mathbf{Z}/n, M) \longrightarrow \text{Hom}(\mathbf{Z}, M) \xrightarrow{x \mapsto nx} \text{Hom}(\mathbf{Z}, M) \longrightarrow \text{Ext}(\mathbf{Z}/n, M) \longrightarrow 0.$$

Puisque  $\text{Hom}(\mathbf{Z}, M)$  s'identifie à  $M$ , on en conclut que

$$\text{Ext}(\mathbf{Z}/n, M) = \text{conoyau de la multiplication par } n \text{ sur } M.$$

Et en guise d'application :

**Théorème 12.6.2** (Coefficients universels en cohomologie). *Pour tout espace topologique  $X$ , il existe une suite exacte naturelle en  $X$  :*

$$0 \longrightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(X, \mathbf{Z}), M) \longrightarrow H^n(X, M) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}b}(H_n(X, \mathbf{Z}), M) \longrightarrow 0.$$

*Cette suite exacte se scinde, mais pas naturellement en  $X$ .*

# Exercices

**Exercice 63.** Démontrer le lemme du fer à cheval.

*En cas de difficulté, rechercher « horseshoe lemma » sur internet.*

**Exercice 64.** Calculer

$$\operatorname{Tor}(\mathbf{Z}/n, \mathbf{Z}/m) \text{ et } \operatorname{Ext}(\mathbf{Z}/n, \mathbf{Z}/m).$$

**Exercice 65** (Théorème des coefficients universels, version algébrique). On considère un complexe de chaînes  $(P_*, \partial)$ , où chaque  $P_n$  est un groupe abélien libre. On note  $Z_n = \ker \partial_n$  et  $B_n = \operatorname{Im} \partial_n$ .

1. Montrer que l'on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow M \otimes Z_n \longrightarrow M \otimes P_n \longrightarrow M \otimes B_n \longrightarrow 0.$$

2. On considère les suites exactes de la question précédente comme formant un morphisme de complexes de chaînes, où  $M \otimes B_*$  et  $M \otimes Z_*$  ont des différentielles nulles. En déduire qu'il existe une suite exacte

$$M \otimes B_{n+1} \xrightarrow{\delta} M \otimes Z_n \longrightarrow H_n(M \otimes P_*) \longrightarrow M \otimes B_n \xrightarrow{\delta} M \otimes Z_{n-1}.$$

Vérifier que  $\delta(m \otimes b) = m \otimes \iota(b)$  où  $\iota : B_n \rightarrow Z_{n-1}$  est l'inclusion.

*Cette dernière vérification est un peu pénible : il faut inspecter les choix faits quand on démontre le lemme du zig-zag... Dans un premier temps on peut admettre le résultat.*

3. En considérant la résolution projective

$$0 \longrightarrow B_n \xrightarrow{\iota} Z_{n-1} \longrightarrow H_{n-1}(P_*) \longrightarrow 0,$$

montrer que  $\ker \delta = \operatorname{Tor}(M, H_{n-1}(P_*))$ .

4. Conclure qu'on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow M \otimes H_n(P_*) \longrightarrow H_n(M \otimes P_*) \longrightarrow \operatorname{Tor}(M, H_{n-1}(P_*)) \longrightarrow 0.$$

5. En déduire l'existence de la suite exacte apparaissant dans la version topologique du théorème des coefficients universels.

**Exercice 66.** Adapter l'exercice précédent pour obtenir la suite exacte dans le théorème des coefficients universels pour la cohomologie.

**Exercice 67.** Lire le §3.6 dans Weibel, *Introduction to homological algebra*. On y trouvera des solutions aux deux exercices précédents, et toutes les précisions supplémentaires mentionnées dans le chapitre.

**Exercice 68.** Soit  $G$  un groupe, et  $p: E \rightarrow E/G$  un revêtement galoisien. On suppose que  $X = E/G$  possède une structure de  $CW$ -complexe fini.

On considère le complexe cellulaire  $C_*(E)$  :

$$\cdots \longrightarrow C_n(E) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(E) \longrightarrow \cdots$$

Montrer que chaque  $C_n(E)$  peut être vu comme un  $\mathbf{Z}[G]$ -module libre, sur une base en bijection avec les  $n$ -cellules de  $X$  (sic). Montrer également que  $\partial_n$  est  $\mathbf{Z}[G]$ -linéaire.

En déduire que, si  $E$  est contractile, on a construit une résolution du  $\mathbf{Z}[G]$ -module trivial  $\mathbf{Z}$  par des  $\mathbf{Z}[G]$ -modules libres. (Comment voit-on  $\mathbf{Z}$  comme un  $\mathbf{Z}[G]$ -module?) Puis montrer que

$$H_n(X, \mathbf{Z}) = \text{Tor}_n^{\mathbf{Z}[G]}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z})$$

et

$$H^n(X, \mathbf{Z}) = \text{Ext}_{\mathbf{Z}[G]}^n(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}).$$

En prenant  $E = \mathbf{R}$  et  $X = S^1$ , en déduire une résolution libre de  $\mathbf{Z}$  comme  $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ -module. *On notera que  $\mathbf{Z}[t, t^{-1}] = \mathbf{Z}[\mathbf{Z}]$ .*

*Remarque importante : ça marche aussi avec les simplexes singuliers, bien sûr ! On le fait avec les cellules pour avoir des complexes plus petits.*

# Chapitre 13

## Modules injectifs

### 13.1 Changer le sens des flèches

Dans le chapitre précédent, nous avons considéré les foncteurs covariants exacts à droite (comme  $M \otimes -$ ), et les foncteurs contravariants exact à gauche (comme  $\text{Hom}(-, M)$ ). Visiblement, nous avons encore deux possibilités à examiner : d'abord, les foncteurs covariants exacts à gauche, qui transforment une suite exacte

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

en une suite

$$0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C);$$

par exemple  $\text{Hom}_{\Lambda\text{-Mod}}(M, -)$  vérifie ceci. Ensuite, il y a les foncteurs contravariants exact à droite, qui transforment cette même suite exacte en

$$F(C) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(A) \longrightarrow 0.$$

Dans ce dernier cas les exemples sont moins naturels, mais on peut citer par exemple le cas de  $\Lambda = k[G]$ , où  $k$  est un corps, et le foncteur  $A \mapsto M \otimes_{\Lambda} A^*$ . Ici  $A^*$  est le dual sur  $k$  de  $A$ , qui est encore un  $k[G]$ -module à gauche avec  $(g \cdot \phi)(x) = \phi(g^{-1}x)$ . Le foncteur  $A \mapsto A^*$  est contravariant et exact.

Cette fois-ci on ne peut pas s'en tirer en disant que les choses sont essentiellement identiques aux deux cas précédents. C'est *presque* vrai, mais on se rend compte (prenez le temps d'y réfléchir !) qu'on est bien obligés de remplacer les modules projectifs par une notion un peu « duale », avec le sens des flèches renversé.

**Définition 13.1.1.** Soit  $I \in \Lambda\text{-Mod}$ . On dit que  $I$  est *injectif* lorsque pour toute injection  $\iota: A \rightarrow B$  et tout  $f: A \rightarrow I$ , on peut toujours étendre  $f$  en un morphisme  $\tilde{f}: B \rightarrow I$ .

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\iota} & B \\ & & \downarrow f & \nearrow \tilde{f} & \\ & & I & & \end{array}$$

Il va nous falloir quelques instants pour apprivoiser cette définition. Une fois que l'on aura montré que tout module est un sous-module d'un module injectif

(le « dual » de l'assertion, évidente, selon laquelle tout module est un quotient d'un module projectif), on pourra dérouler sans difficulté.

## 13.2 Exemples

Regardons un peu le cas  $\Lambda = \mathbf{Z}$  d'abord.

**Définition 13.2.1.** Un groupe abélien  $A$  est dit *divisible* si pour tout  $a \in A$  et tout  $n \in \mathbf{Z}$ , on peut trouver  $a' \in A$  tel que  $na' = a$ .

**Proposition 13.2.2.** *Un  $\mathbf{Z}$ -module  $I$  est injectif si et seulement s'il est divisible.*

*Démonstration.* Il est facile de voir que la condition est nécessaire. En effet si  $I$  est injectif, prenons  $a \in I$  et considérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{x \mapsto nx} \mathbf{Z}.$$

L'application  $f: \mathbf{Z} \rightarrow I$  qui envoie 1 sur  $a$  peut donc être prolongée en  $\tilde{f}: \mathbf{Z} \rightarrow I$  telle que  $\tilde{f}(nx) = f(x)$  pour tout  $x \in \mathbf{Z}$ . Pour  $x = 1$  on trouve  $\tilde{f}(n) = f(1) = a$ , et  $\tilde{f}(n) = n\tilde{f}(1)$  bien sûr. Donc  $a' = \tilde{f}(1)$  vérifie  $na' = a$ .

Voyons la réciproque. On prend donc un sous-module  $A \subset B$ , et une application  $f: A \rightarrow I$ . Soit donc  $M$  un module intermédiaire, c'est-à-dire  $A \subset M \subset B$ , et soit  $\phi: M \rightarrow I$  qui prolonge  $f$ .

Si  $M \neq B$ , prenons  $b \in B$  tel que  $b \notin M$ , et considérons le module

$$M' = M + \mathbf{Z}b.$$

Ici  $\mathbf{Z}b$  est le groupe engendré par  $b$ , qui est isomorphe soit à  $\mathbf{Z}$ , soit à  $\mathbf{Z}/k$ . L'intersection  $M \cap \mathbf{Z}b$  est en tout cas un sous-groupe de  $\mathbf{Z}b$ , donc elle est engendrée par  $nb$  pour un certain entier  $n$ .

Soit  $a = \phi(nb)$ , et choisissons  $a' \in I$  tel que  $na' = a$ , qui existe puisque  $I$  est supposé divisible. On peut alors définir  $\phi': M' \rightarrow I$  en imposant  $\phi' = \phi$  sur  $M$  et  $\phi'(b) = a'$ .

On a donc montré que toute paire  $(M, \phi)$  avec  $M \neq B$  peut être prolongé en une paire  $(M', \phi')$  avec  $M'$  strictement plus grand que  $M$ . Pour conclure à partir de là, il faut utiliser le lemme de Zorn : nous ne le ferons pas ici. (Par contre sous l'hypothèse que  $B$  est finiment engendré, vous savez (de par la classification des groupes abéliens finiment engendrés) qu'il n'existe pas de suite infinie strictement croissante

$$M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset B$$

donc on doit avoir  $M = B$  au bout d'un moment.) □

**Exemple 13.2.3.** Les modules  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$  sont injectifs.

Voici un autre exemple, sur un anneau  $\Lambda$  quelconque.

**Proposition 13.2.4.** *Soit  $I$  un groupe abélien injectif. Alors le  $\Lambda$ -module à gauche*

$$\text{Hom}_{\text{Ab}}(\Lambda, I)$$

*est injectif.*

Ici  $\Lambda$  est vu comme un  $\Lambda$ -module à droite, et on a déjà observé au début du chapitre précédent que  $\text{Hom}_{\mathcal{A}b}(\Lambda, I)$  est alors un  $\Lambda$ -module à gauche, pour tout groupe abélien  $I$ .

*Démonstration.* On part donc d'une suite exacte de  $\Lambda$ -modules à gauche

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow B/A \longrightarrow 0.$$

La suite ci-dessous est encore exacte

$$0 \longrightarrow \Lambda \otimes_{\Lambda} A \longrightarrow \Lambda \otimes_{\Lambda} B \longrightarrow \Lambda \otimes_{\Lambda} B/A \longrightarrow 0.$$

En effet  $\Lambda \otimes_{\Lambda} M$  s'identifie à  $M$ , ou plutôt au groupe abélien sous-jacent à  $M$ .

Si on a  $f: A \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}b}(\Lambda, I)$ , alors par l'adjonction du chapitre précédent on obtient un morphisme de groupe abéliens

$$g: \Lambda \otimes_{\Lambda} A \longrightarrow I.$$

On peut l'étendre en

$$\tilde{g}: \Lambda \otimes_{\Lambda} B \longrightarrow I$$

puisque  $I$  est injectif. En utilisant l'adjonction de nouveau, on en déduit

$$\tilde{f}: B \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}b}(\Lambda, I),$$

dont on vérifie qu'elle prolonge  $f$ , et on a terminé.  $\square$

**Corollaire 13.2.5.** *Soit  $A \in \Lambda\text{-Mod}$  et soit  $x \in A$ . Alors il existe un homomorphisme*

$$\phi: A \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}b}(\Lambda, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

tel que  $\phi(x) \neq 0$ .

*Démonstration.* En effet, il existe certainement un homomorphisme de groupes abéliens

$$f: \mathbf{Z}x \longrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

tel que  $f(x) \neq 0$  : si  $\mathbf{Z}x \cong \mathbf{Z}$ , prendre pour  $f(x)$  n'importe quel élément non-nul ; si  $\mathbf{Z}x \cong \mathbf{Z}/k$ , prendre pour  $f(x)$  n'importe quel élément non-nul d'ordre  $k$ .

Puisque  $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$  est injectif, on peut prolonger  $f$  en  $\tilde{f}: A \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ , qui est encore un homomorphisme de groupes abéliens. Or le groupe abélien sous-jacent à  $A$  est  $\Lambda \otimes_{\Lambda} A$ , et par adjonction on trouve

$$\phi: A \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}b}(\Lambda, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}).$$

En révisant les définitions on voit que  $\phi(a)(\lambda) = f(\lambda a)$  et en particulier  $\phi(x)(1) = f(x) \neq 0$ , donc  $\phi(x)$  n'est pas nul.  $\square$

On peut alors montrer simplement le théorème principal :

**Théorème 13.2.6.** *Tout module se plonge dans un module injectif. De plus, on peut choisir ce module injectif fonctoriellement.*

Et c'est vrai sur n'importe quel anneau  $\Lambda$ .

*Démonstration.* On vérifie sans difficulté qu'un produit cartésien de modules injectifs, même largement infini, est encore injectif. Pour tout module  $A$ , considérons alors l'homomorphisme

$$\iota: A \longrightarrow \prod Hom_{\mathcal{A}b}(\Lambda, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}),$$

où le produit est indexé par *tous* les homomorphismes de  $A$  vers  $Hom_{\mathcal{A}b}(\Lambda, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ , et où  $\iota$  est le produit de tous ces homomorphismes.

Pour chaque  $x \in A$ , on a  $\iota(x) \neq 0$  puisqu'il y a au moins un  $\phi$  (donc une composante de  $\iota$ ) tel que  $\phi(x) \neq 0$ . Ainsi  $\iota$  est injectif, et il prend ses valeurs dans un module injectif.  $\square$

### 13.3 On déroule

Nous sommes en position de reproduire les résultats du chapitre précédent en copiant les démonstrations presque mot pour mot. On donne ainsi la définition de résolution injective, à savoir une suite exacte de la forme

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \cdots,$$

où chaque  $I_n$  est injectif. On montre que ces résolutions existent et peuvent être choisies fonctoriellement, et qu'il y a toujours des homotopies entre elles.

Si  $F$  est un foncteur additif et comme dans l'introduction de ce chapitre, on définit ses foncteurs dérivés  $L_n F$  ou  $R^n F$  en prenant des résolutions injectives, en appliquant  $F$ , et en prenant l'homologie. On obtient des suites exactes longues.

Finalement on a le théorème suivant.

**Théorème 13.3.1** (Foncteurs dérivés). *Soit  $F$  un foncteur additif  $\Lambda\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{A}b$ . Soit  $A$  un  $\Lambda$ -module. Prenons une résolution  $M_*$  de  $A$  du type suivant, en fonction des possibilités pour  $F$  :*

	<i>covariant</i>	<i>contravariant</i>
<i>exact à droite</i>	<i>projective</i>	<i>injective</i>
<i>exact à gauche</i>	<i>injective</i>	<i>projective</i>

On considère ensuite le complexe  $(F(M_*))_{* \geq 0}$ .

– Si  $F$  est exact à droite, on pose  $L_n F =$  l'homologie de ce complexe en degré  $n$  pour  $n \geq 0$ , et  $R^n F = 0$  pour  $n > 0$ .

– Si  $F$  est exact à gauche, on pose  $R^n F =$  la cohomologie du complexe en degré  $n$  pour  $n \geq 0$ , et  $L_n F = 0$  pour  $n > 0$ .

Alors  $L_n F$  et  $R^n F$  sont des foncteurs bien définis. Pour toute suite exacte

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

on a une suite exacte longue

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow L_2 F(C) \longrightarrow L_1 F(A) \longrightarrow L_1 F(B) \longrightarrow L_1 F(C) \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \\ \longrightarrow F(C) \longrightarrow R^1 F(A) \longrightarrow R^1 F(B) \longrightarrow R^1 F(C) \longrightarrow R^2 F(A) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

dans le cas covariant, et

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow L_2F(A) \longrightarrow L_1F(C) \longrightarrow L_1F(B) \longrightarrow L_1F(A) \longrightarrow F(C) \longrightarrow F(B) \\ \longrightarrow F(A) \longrightarrow R^1F(C) \longrightarrow R^1F(B) \longrightarrow R^1F(A) \longrightarrow R^2F(C) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

dans le cas contravariant.

Enfin, on peut calculer les foncteurs dérivés à gauche ou à droite du foncteur  $F$  à l'aide de résolutions  $F$ -acycliques.

**Exemple 13.3.2.** Le foncteur  $\text{Hom}_{\Lambda\text{-Mod}}(M, -)$  est covariant et exact à gauche, on peut donc calculer ses foncteurs dérivés à droite en prenant des résolutions injectives. Il se trouve que  $R^n(\text{Hom}_{\Lambda\text{-Mod}}(M, -))$  est noté  $\text{Ext}_{\Lambda}^n(M, -)$  et que l'on peut montrer que les deux définitions de  $\text{Ext}_{\Lambda}^n(M, A)$  que nous avons sont les mêmes. (La première version, donnée dans l'exemple 12.6.1, utilisait les foncteurs dérivés à gauche de  $\text{Hom}_{\Lambda\text{-Mod}}(-, A)$ ). Cette remarque est parfaitement similaire à la remarque 12.5.6. On ne va pas faire la démonstration.

En clair, pour calculer  $\text{Ext}_{\Lambda}^n(M, A)$ , on peut au choix prendre une résolution projective de  $M$  et « hommer dans  $A$  », ou une résolution injective de  $A$  et « hommer depuis  $M$  ». Essayez de retrouver  $\text{Ext}(M, A)$  où  $M$  et  $A$  sont soit  $\mathbf{Z}$ , soit  $\mathbf{Z}/n$ , de ces deux manières.

## Chapitre 14

# Faisceaux et cohomologie de Rham

### 14.1 Faisceaux

**Définition 14.1.1.** Soit  $X$  un espace topologique. Un *pré-faisceau de groupes abéliens* sur  $X$  est un foncteur  $\mathcal{F}$  contravariant de la catégorie des ouverts de  $X$ , avec pour morphismes les inclusions, vers la catégorie des groupes abéliens. En clair, pour chaque ouvert  $U$  de  $X$ , on a un groupe abélien  $\mathcal{F}(U)$ ; si  $U \subset V$ , on a un morphisme qu'on appelle généralement « morphisme de restriction »  $\mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ . On va noter  $\alpha|_U$  pour l'image de  $\alpha \in \mathcal{F}(V)$  par ce morphisme. On a la condition évidente de composition :  $(\alpha|_V)|_U = \alpha|_U$  pour  $\alpha \in \mathcal{F}(W)$  et  $U \subset V \subset W$ .

On dit qu'un pré-faisceau  $\mathcal{F}$  est un *faisceau* lorsque la condition suivante est satisfaite. Soit  $U \subset X$  un ouvert, et supposons que  $U = \bigcup_i U_i$  où chaque  $U_i$  est ouvert. Supposons enfin que pour chaque indice  $i$  on ait un élément  $\alpha_i \in \mathcal{F}(U_i)$ , de sorte que

$$\alpha_i|_{U_j} = \alpha_j|_{U_i}$$

pour toute paire  $(i, j)$ . Alors on exige qu'il existe un unique  $\alpha \in \mathcal{F}(U)$  tel que  $\alpha|_{U_i} = \alpha_i$  pour chaque indice.

On appellera souvent les éléments de  $\mathcal{F}(U)$  les « sections de  $\mathcal{F}$  sur  $U$  »; de plus les éléments de  $\mathcal{F}(X)$  seront souvent appelés les « sections globales de  $\mathcal{F}$  ».

**Exemple 14.1.2.** L'exemple typique est  $\mathcal{C}^0$ , le faisceau des fonctions continues, c'est-à-dire  $\mathcal{C}^0(U) = \{ \text{fonctions continues } U \rightarrow \mathbf{R} \}$ .

Si  $X$  est une variété, on a aussi le faisceau  $\mathcal{C}^\infty$  des fonctions lisses, ainsi que les faisceaux  $\Omega^p$  des  $p$ -formes différentielles (lisses), pour tout  $p \geq 0$  (et  $\Omega^0 = \mathcal{C}^\infty$ ).

**Exemple 14.1.3.** Pour tout groupe abélien  $A$ , on a un faisceau  $\underline{A}$  défini par  $\underline{A}(U) =$  les fonctions continues de  $U$  vers  $A$  en mettant la topologie discrète sur  $A$ . En particulier si  $U$  est connexe on a un isomorphisme  $\underline{A}(U) \cong A$  (et le faisceau  $\underline{\mathbf{R}}$  est bien différent du faisceau  $\mathcal{C}^0$ ). Ces faisceaux sont appelés *localement constants*.

**Définition 14.1.4.** Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau sur  $X$ , le *groupe  $\mathcal{F}_x$  des germes de  $\mathcal{F}$*  en  $x \in X$  est

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim \mathcal{F}(U),$$

où la colimite est prise sur tous les ouverts  $U$  tels que  $x \in U$ . (Parfois, assez rarement, on appelle  $\mathcal{F}_x$  la *tige* de  $\mathcal{F}$  en  $x$ .)

Si  $\alpha \in \mathcal{F}(U)$  et  $x \in U$ , on note  $\alpha_x$  l'image de  $\alpha$  dans la colimite.

**Exemple 14.1.5.** Pour le faisceau  $\mathcal{C}^\infty$  sur une variété  $X$ , un élément de  $\mathcal{C}_x^\infty$  est donc une paire  $(U, f)$ , où  $U$  est un ouvert contenant  $x$  et  $f: U \rightarrow \mathbf{R}$  est lisse, sachant que deux paires  $(U, f)$  et  $(U', f')$  sont identifiées dans ce groupe si

$$f|_{U \cap U'} = f'|_{U \cap U'}.$$

On parle de germes de fonctions lisses en  $x$ . Noter qu'un tel germe de fonction ne peut être évalué qu'en  $x$ , mais que les dérivées partielles d'un germe sont bien définies.

**Lemme 14.1.6.** Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau, et  $\alpha, \beta \in \mathcal{F}(X)$  tels que  $\alpha_x = \beta_x$  pour tout  $x \in X$ . Alors  $\alpha = \beta$ .

*Démonstration.* Soit  $\gamma = \alpha - \beta$ . Pour tout  $x \in X$ , on a  $\gamma_x = 0$ . Par définition, il existe donc un ouvert  $U_x$  tel que  $x \in U_x$  et tel que  $\gamma|_{U_x} = 0$ .

Puisque  $\mathcal{F}$  est un faisceau, et non seulement un pré-faisceau, nous pouvons considérer le recouvrement de  $X$  par les ouverts  $U_x$ , et la collection des éléments  $\gamma|_{U_x}$ , qui sont tous nuls et donc vérifient trivialement la condition sur les intersections. Par unicité, on doit avoir  $\gamma = 0$ .  $\square$

**Définition 14.1.7.** Un *morphisme de faisceaux* est une transformation naturelle. On a donc des morphismes de groupes abéliens  $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$  vérifiant les compatibilités évidentes.

Un tel morphisme induit pour chaque  $x \in X$  un morphisme entre les groupes de germes  $\mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ .

## 14.2 Suites exactes

Voici une définition qui peut surprendre.

**Définition 14.2.1.** On dit qu'une suite de morphismes de faisceaux est *exacte* lorsque, pour chaque  $x \in X$ , la suite correspondantes de morphismes au niveau des germes est exacte.

Par exemple, une suite courte

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

est dite exacte lorsque pour tout  $x$ ,

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_x \xrightarrow{\phi_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{\psi_x} \mathcal{H}_x \longrightarrow 0$$

est exacte.

Il faut examiner cette définition pour voir si elle ne conduit pas à des choses absurdes. Le résultat suivant est le plus fondamental de tout le chapitre, en un sens.

**Proposition 14.2.2.** *Soit*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

*une suite exacte de faisceaux. Alors pour tout ouvert  $U$  on a une suite exacte*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U) \longrightarrow \mathcal{H}(U).$$

Donc le foncteur  $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(U)$ , de la catégorie des faisceaux vers  $\mathcal{A}b$ , est exact à gauche, et nous allons calculer ses foncteurs dérivés! On va voir, et c'est remarquable, que cette définition algébrique est fortement liée à la topologie de  $X$ .

*Démonstration.* Soit donc  $U$  un ouvert. Prenons  $\alpha \in \mathcal{F}(U)$  tel que  $\phi(\alpha) = 0 \in \mathcal{G}(U)$ . Alors  $\phi(\alpha)_x = 0$  pour tout  $x \in U$ . Et bien sûr  $\phi(\alpha)_x = \phi_x(\alpha_x)$  alors que  $\phi_x$  est injectif, donc  $\alpha_x = 0$  pour tout  $x$ . D'après le lemme 14.1.6, on a  $\alpha = 0$ . Donc le noyau de  $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$  est nul, et on a monté l'exactitude en  $\mathcal{F}(U)$ .

Montrons maintenant l'exactitude en  $\mathcal{G}(U)$ . Soit donc  $\alpha \in \mathcal{G}(U)$  tel que  $\psi(\alpha) = 0 \in \mathcal{H}(U)$ . Là encore on regarde  $\psi(\alpha)_x = 0 = \psi_x(\alpha_x)$ . Par exactitude « en  $x$  », il existe  $\beta_x \in \mathcal{F}_x$  tel que  $\phi_x(\beta_x) = \alpha_x$ , pour tout  $x$ . De plus  $\beta_x$  est unique. Si l'on arrive à construire  $\beta \in \mathcal{F}(U)$  dont le germe en  $x$  est  $\beta_x$ , pour tout  $x$ , alors on aura terminé : en effet on aura alors  $\phi(\beta)_x = \phi_x(\beta_x) = \alpha_x$ , d'où  $\phi(\beta) = \alpha$  par le lemme 14.1.6.

Choisissons alors, pour tout  $x \in U$ , un ouvert  $U_x$  contenant  $x$  et un élément  $\beta^x \in \mathcal{F}(U_x)$  tel que  $\phi(\beta^x) = \alpha|_{U_x} \in \mathcal{G}(U_x)$ . (C'est possible par définition de l'égalité  $\phi_x(\beta_x) = \alpha_x$ , en y réfléchissant bien.) En particulier le germe de  $\beta^x$  en  $x$  est  $\beta_x$ . Montrons alors que

$$\beta^x|_{U_x \cap U_y} = \beta^y|_{U_x \cap U_y} \quad (*)$$

pour tous les  $x, y$ . Clairement si nous avons (\*), par définition des faisceaux nous aurons  $\beta \in \mathcal{F}(U)$  dont la restriction à  $U_x$  est  $\beta^x$ , donc en particulier son germe sera  $\beta_x$  et on aura gagné.

Mais (\*) provient du point déjà montré : en effet l'application induite par  $\phi$

$$\mathcal{F}(U_x \cap U_y) \longrightarrow \mathcal{G}(U_x \cap U_y)$$

est injective, et les deux membres de (\*) sont envoyés sur  $\alpha|_{U_x \cap U_y}$  par cette application, donc ils sont égaux.  $\square$

Commençons par utiliser cette proposition pour montrer que la définition de suite exacte est raisonnable :

**Corollaire 14.2.3.** *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1.  $\phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  est un isomorphisme (ie il existe  $\phi^{-1}: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$  tel que les compositions sont l'identité);
2. la suite ci-dessous est exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \longrightarrow 0;$$

3. pour chaque ouvert  $U$ , l'application  $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$  est un isomorphisme.

*Démonstration.* L'équivalence de (1) et (3) est presque immédiate. Le (1)  $\implies$  (2) est aussi clair : si chaque  $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$  est un isomorphisme, alors chaque  $\mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$  est un isomorphisme.

Pour montrer (2)  $\implies$  (3), on applique la proposition avec  $\mathcal{H} = 0$ , le faisceau nul.  $\square$

Si ce corollaire était faux (en particulier l'équivalence de (1) et (2)), il faudrait clairement changer notre définition de suite exacte !

Notons qu'il est également vrai que  $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  est exacte si et seulement si pour chaque  $U$ , l'application  $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$  est injective : nous l'avons montré en même temps que la proposition. Pour le *déduire* de la proposition, on serait bloqué par le fait que, pour produire une suite exacte courte, il faudrait définir  $\mathcal{G}/\mathcal{F}$ . Or ce n'est pas si évident, puisque  $U \mapsto \mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U)$  n'est pas un faisceau, c'est juste un pré-faisceau !

Enfin, un point crucial soulevé par la proposition est que la suite  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$  peut être exacte sans que  $\mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{H}(U)$  soit surjective. (Dans ce cas la définition de  $\mathcal{F} = \ker(\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H})$  ne pose pas de problème, au fait.) Pour voir un *exemple* où cette application n'est pas surjective, poursuivons.

## 14.3 Cohomologie

Puisque nous avons une notion de suite exacte, nous pouvons sans problème parler de *faisceau injectif* : c'est la même définition que pour les modules. Une résolution injective de  $\mathcal{F}$ , sans surprise, est une suite exacte de la forme

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}_0 \longrightarrow \mathcal{I}_1 \longrightarrow \cdots,$$

où chaque  $\mathcal{I}_n$  est injectif. Plus loin dans ce chapitre, nous montrerons le théorème suivant.

**Théorème 14.3.1.** *La catégorie des faisceaux a les propriétés suivantes.*

1. *Tout faisceau  $\mathcal{F}$  possède une résolution injective.*
2. *Tout foncteur  $T$  de la catégorie des faisceaux vers  $\mathcal{A}b$ , additif et exact à gauche, possède des foncteurs dérivés à droite  $R^n T$  pour  $n \geq 1$ . On calcule  $R^n T(\mathcal{F})$  comme la cohomologie en degré  $n$  de  $T(\mathcal{I}_*)$ , où  $\mathcal{I}_*$  est une résolution injective de  $\mathcal{F}$  quelconque.*
3. *Une suite exacte courte de faisceaux donne naissance à une suite exacte longue impliquant  $T$  et ses foncteurs dérivés.*
4. *On peut aussi calculer  $R^n T(\mathcal{F})$  en utilisant une résolution  $T$ -acyclique de  $\mathcal{F}$ .*

Pour l'instant, on va se contenter des remarques suivantes. Le point (1) est le plus important, les autres pouvant s'en déduire en procédant presque mot pour mot comme avec les modules (et nous n'en dirons pas grand'chose !). Et même le (1) se réduit presque au cas des modules : on prend un module injectif contenant le groupe abélien  $\mathcal{F}_x$ , pour chaque  $x \in X$ , et il faut les recoller, comme nous le verrons.

Nous allons considérer exclusivement les foncteurs dérivés du foncteur  $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(X)$ , qui est exact à gauche comme on l'a vu avec la proposition 14.2.2. On va utiliser la notation  $H^0(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ , et le  $n$ -ième foncteur dérivé, évalué en  $\mathcal{F}$ ,

va être noté  $H^n(X, \mathcal{F})$ . (En symboles  $R^n H^0(X, -) = H^n(X, -)$ .) On parle des *groupes de cohomologie de  $X$  à coefficients dans le faisceau  $\mathcal{F}$* .

Reste à faire des calculs. Une définition d'abord.

**Définition 14.3.2.** On dit que  $\mathcal{F}$  est un *faisceau de  $\mathcal{C}^0$ -modules* lorsque c'est un faisceau et que pour chaque ouvert  $U$ , le groupe  $\mathcal{F}(U)$  est un  $\mathcal{C}^0(U)$ -module ; évidemment on exige également que les morphismes de restriction soient compatibles.

Lorsque  $X$  est une variété différentiable, on a aussi la notion de *faisceau de  $\mathcal{C}^\infty$ -modules*.

Par exemple le faisceau  $\Omega^p$  des  $p$ -formes différentielles est un faisceau de  $\mathcal{C}^\infty$ -modules. L'intérêt de cette notion vient de :

**Proposition 14.3.3.** *Un faisceau de  $\mathcal{C}^0$ -modules sur un espace  $X$  paracompact, ou de  $\mathcal{C}^\infty$ -modules sur une variété lisse  $X$ , est acyclique pour le foncteur  $H^0(X, -)$ .*

Donc ces faisceaux peuvent remplacer les faisceaux injectifs pour calculer la cohomologie. Là encore, nous rejetons la preuve à plus tard.

## 14.4 Calcul par les formes différentielles

On suppose que  $X$  est une variété lisse. En cours de géométrie différentielle, vous avez du voir la définition de la différentielle  $d\omega$  de la forme  $\omega$ . On voit ça comme un morphisme de faisceaux :

$$d: \Omega^p \longrightarrow \Omega^{p+1}.$$

On a  $d^2 = 0$  comme vous le savez.

**Proposition 14.4.1.** *La suite ci-dessous est exacte :*

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbf{R}} \longrightarrow \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2 \xrightarrow{d} \dots$$

Noter que  $\Omega^0 = \mathcal{C}^\infty$ , et le morphisme  $\underline{\mathbf{R}} \rightarrow \Omega^0$  est simplement l'inclusion des fonctions constantes.

Le point crucial est donné par :

**Proposition 14.4.2** (Lemme de Poincaré). *Si une forme différentielle  $\omega$  sur  $\mathbf{R}^d$  vérifie  $d\omega = 0$ , alors il existe une forme différentielle  $\eta$  telle que  $\omega = d\eta$ .  $\square$*

*Démonstration de la proposition 14.4.1.* Pour chaque  $x \in X$ , il faut montrer qu'on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbf{R}}_x \longrightarrow \Omega_x^0 \xrightarrow{d} \Omega_x^1 \xrightarrow{d} \Omega_x^2 \xrightarrow{d} \dots$$

Considérons l'exactitude en  $\Omega_x^p$ , avec  $p > 0$ . Un élément  $\omega$  de ce groupe est donné par une paire  $(U, \omega)$ , avec  $U$  un ouvert qui contient  $x$  et  $\omega$  une  $p$ -forme différentielle sur  $U$ . Cet élément est dans le noyau de  $d$  s'il existe un ouvert  $V \subset U$  tel que  $d\omega = 0$  sur  $V$ . Or  $x$  possède un voisinage  $W \subset V$  qui est difféomorphe à  $\mathbf{R}^d$  (où  $d = \dim X$ ). Sur  $W$ , on a donc  $\omega = d\eta$  par le lemme de Poincaré. Ceci montre que  $(U, \omega)$  est dans l'image de  $d: \Omega_x^{p-1} \rightarrow \Omega_x^p$ .

L'exactitude en  $\Omega^0$  découle de l'assertion selon laquelle une fonction  $f$  telle que  $df = 0$  est localement constante.  $\square$

On a donc exhibé une résolution de  $\underline{\mathbf{R}}$  par des faisceaux de  $\mathcal{C}^\infty$ -modules. Pour mieux exprimer notre conclusion, un peu de vocabulaire :

**Définition 14.4.3.** Une forme différentielle  $\omega$  est dite *fermée* si  $d\omega = 0$ . Elle est dite *exacte* si  $\omega = d\eta$ . Le  $n$ -ième *groupe de cohomologie de Rahm* de la variété lisse  $X$  est

$$H_{deR}^n(X) = \frac{\{n\text{-formes fermées}\}}{\{n\text{-formes exactes}\}}.$$

(En l'honneur de Georges de Rahm, mathématicien et alpiniste suisse, 1903-1990.)

On a alors :

**Théorème 14.4.4.** *Soit  $X$  une variété lisse. Pour tout  $n \geq 0$ , on a des isomorphismes :*

$$H^n(X, \underline{\mathbf{R}}) \cong H_{deR}^n(X).$$

*Démonstration.* Pour calculer  $H^n(X, \underline{\mathbf{R}})$ , on peut utiliser la résolution donnée par la proposition 14.4.1. Par définition, il faut appliquer le foncteur « sections globales », c'est-à-dire  $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(X)$ , et prendre la cohomologie. On a donc bien

$$H^n(X, \underline{\mathbf{R}}) \cong \frac{\ker(d: \Omega^n \rightarrow \Omega^{n+1})}{\mathcal{I}m(d: \Omega^{n-1} \rightarrow \Omega^n)} = H_{deR}^n(X).$$

□

## 14.5 Calcul par les simplexes singuliers

On va maintenant décrire une façon bien différente de calculer la cohomologie de  $\underline{\mathbf{R}}$ .

Pour tout espace topologique  $X$ , nous connaissons  $C_n(X) = C_n(X, \mathbf{R})$ , le groupe libre (en fait l'espace vectoriel réel) sur l'ensemble des simplexes singuliers de dimension  $n$  dans  $X$ ; nous avons appelé  $C^n(X) = C^n(X, \mathbf{R})$  son dual.

On peut se demander si l'association  $U \mapsto C^n(U)$  est un faisceau sur  $X$ . Malheureusement, la réponse est... presque. C'est clairement un pré-faisceau. Si on a un recouvrement de  $U$  par des ouverts  $U_\alpha$ , et des cocycles  $c_\alpha \in C^n(U_\alpha)$  vérifiant la condition sur les intersections, on peut définir un  $c \in C^n(U)$  de la manière suivante :

$$c(\sigma) = \begin{cases} c_\alpha(\sigma) & \text{si } \sigma(\Delta^n) \subset U_\alpha \text{ pour un indice } \alpha, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors  $c$  est bien défini, et sa restriction à  $U_\alpha$  est bien  $c_\alpha$ . Mais  $c$  n'est pas unique...

À cause de ce petit problème, on est amené à poser

$$K^n(U) = \{c \in C^n(U) \mid c_x = 0 \forall x \in U\},$$

puis

$$\hat{C}^n(U) = C^n(U)/K^n(U).$$

On peut alors montrer que  $\hat{C}^n$  est un faisceau. Nous ne le ferons pas tout de suite ; plus loin nous expliquerons que c'est un cas particulier simple d'une procédure qui s'appelle la *faisceautisation*, et qui produit un faisceau à partir d'un pré-faisceau. Notons que par définition, les germes sont aussi simples que possible, c'est-à-dire :

$$\hat{C}_x^n = \varinjlim C^n(U),$$

et à droite on a bien  $C^n(U)$ , pas  $\hat{C}^n(U)$  (encore que ça serait également vrai!).

On a toujours notre application « bord » bien connue  $d: C^n(U) \rightarrow C^{n+1}(U)$ , et il est facile de voir que l'on a une application induite  $d: \hat{C}^n(U) \rightarrow \hat{C}^{n+1}(U)$ . Nous avons tous les ingrédients pour énoncer :

**Proposition 14.5.1.** *Si  $X$  est localement contractile, la suite ci-dessous est exacte :*

$$0 \longrightarrow \mathbf{R} \longrightarrow \hat{C}^0 \xrightarrow{d} \hat{C}^1 \xrightarrow{d} \hat{C}^2 \xrightarrow{d} \dots$$

*Démonstration.* Par définition il faut montrer l'exactitude au niveau des germes. Soit donc  $(U, c)$  représentant un élément de  $\hat{C}_x^n$ . Il existe par hypothèse un ouvert  $V \subset U$  qui est contractile, et nous savons (ce n'est pas trivial du tout!) que la cohomologie d'un tel ouvert est nulle. Donc  $c = d(c')$  pour une paire  $(V, c')$ . Ceci montre l'exactitude. (Pour  $n \geq 1$  ; pour  $n = 0$  utiliser le fait que  $H^0(V, \mathbf{R}) \cong \mathbf{R}$  pour  $V$  petit).  $\square$

Or nous sommes bien en présence d'une résolution acyclique de  $\mathbf{R}$ , au moins si  $X$  est paracompact, en vertu du lemme suivant :

**Lemme 14.5.2.**  *$\hat{C}^n$  est un faisceau de  $\mathcal{C}^0$ -modules.*

*Démonstration.* Tout d'abord, notons que  $C_n(U)$ , le groupe libre sur les simplexes singuliers dans  $U$ , est un  $\mathcal{C}^0(U)$ -module : il suffit en effet de poser

$$\phi \cdot \sigma = \phi(\sigma(1)) \sigma,$$

où on a écrit  $\sigma(1)$  pour  $\sigma(1, 0, \dots, 0)$  (la valeur de  $\sigma$  sur le premier sommet de  $\Delta^n$ ).

Par dualité  $C^n(U)$  est aussi un  $\mathcal{C}^0(U)$ -module. Le passage au quotient est clair.  $\square$

On a donc une autre façon de calculer  $H^n(X, \mathbf{R})$ . On retrouve des groupes familiers, grâce au lemme suivant. Cette fois-ci, il est vraiment technique, et nous ne dirons que quelques mots de la démonstration :

**Lemme 14.5.3.** *Les complexes de chaînes  $C^*(X)$  et  $\hat{C}^*(X)$  ont la même cohomologie.*

*Idée.* On a des suites exactes

$$0 \longrightarrow K^n(X) \longrightarrow C^n(X) \longrightarrow \hat{C}^n(X) \longrightarrow 0.$$

On veut donc montrer que la cohomologie de  $K^*(X)$  vaut zéro.

Si  $\mathcal{U}$  est un recouvrement de  $X$  par des ouverts  $U_\alpha$ , on va écrire  $C_n^{\mathcal{U}}(X)$  pour le groupe libre sur les simplexes singuliers  $\sigma$  tels que  $\sigma(\Delta^n) \subset U_\alpha$  pour au moins un indice  $\alpha$  ; et on va noter son dual  $C_{\mathcal{U}}^n(X)$ . On a une application de restriction

$j: C^n(X) \rightarrow C_{\mathcal{U}}^n(X)$  qui est surjective, dont on note le noyau  $K_{\mathcal{U}}^n(X)$ , d'où une suite exacte

$$0 \longrightarrow K_{\mathcal{U}}^n(X) \longrightarrow C^n(X) \xrightarrow{j} C_{\mathcal{U}}^n(X) \longrightarrow 0.$$

Supposons que l'on ait montré que  $j$  induit un isomorphisme en cohomologie. Alors par le lemme du zig-zag, on en déduit que la cohomologie du complexe  $K_{\mathcal{U}}^*(X)$  est zéro.

Ceci nous suffirait. En effet, soit alors  $f \in K^n(X)$  tel que  $df = 0$ . Par définition de  $K^n(X)$ , il existe un recouvrement  $\mathcal{U}$  tel que  $f \in K_{\mathcal{U}}^n(X)$ . Donc  $f = dg$  pour un certain  $g$ , et on a fini.

Pour montrer l'assertion sur  $j$ , on construit

$$k: C_{\mathcal{U}}^n(X) \longrightarrow C^n(X)$$

tel que  $j \circ k$  est l'identité et  $k \circ j$  est homotope à l'identité. Pour ça, on va utiliser la *division barycentrique* des simplexes : en gros, on découpe un triangle en 6 triangles ayant le barycentre en commun, et pareil en dimension supérieure. Le triangle de départ a le même bord que la somme des autres triangles. À force de subdiviser, on obtient des triangles suffisamment petits pour appartenir chacun à un  $U_{\alpha}$ . Alors, on peut évaluer un cocycle de  $C_{\mathcal{U}}^n(X)$  sur ces petits triangles. On définit ça comme la valeur de ce cocycle sur le gros triangle. Il y a beaucoup de détails à vérifier.  $\square$

**Théorème 14.5.4.** *Lorsque  $X$  est paracompact et localement contractile, on a un isomorphisme pour tout  $n \geq 0$  :*

$$H^n(X, \mathbf{R}) \cong H^n(X, \mathbf{R}).$$

À droite, il s'agit de la cohomologie singulière toute simple !

*Démonstration.* Nous avons construit une résolution acyclique de  $\mathbf{R}$  avec la proposition 14.5.1 combinée avec le lemme 14.5.2 (et la proposition 14.3.3). On peut donc l'utiliser pour calculer la cohomologie du faisceau : on regarde les sections globales puis on prend la cohomologie.

D'après le tout dernier lemme, ces groupes sont isomorphes à

$$\frac{\ker(d: C^n(X) \rightarrow C^{n+1}(X))}{\text{Im}(d: C^{n-1}(X) \rightarrow C^n(X))}.$$

C'est précisément la définition de la cohomologie singulière !  $\square$

En combinant ce théorème avec le 14.4.4, on obtient l'isomorphisme incroyable :

**Théorème 14.5.5** (Théorème de Rham). *Soit  $X$  une variété lisse. Alors pour tout  $n \geq 0$  il existe un isomorphisme*

$$H^n(X, \mathbf{R}) \cong H_{deR}^n(X).$$

## 14.6 Exemples

**Exemple 14.6.1** (Le cercle). Considérons la variété lisse  $S^1$ . Sur  $S^1 \setminus \{x_0\}$ , où  $x_0$  est un point quelconque, on a un logarithme, c'est-à-dire une fonction  $\theta_0: S^1 \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbf{R}$  telle que  $z = e^{2i\pi\theta_0(z)}$  pour tous les  $z$  de cet ouvert. (C'est bien connu, et c'est une conséquence du théorème du relèvement.)

On peut alors considérer la forme  $\omega_0 = d\theta_0$ . Sur  $S^1 \setminus \{x_1\}$  avec  $x_1 \neq x_0$  on a également un logarithme  $\theta_1$  et on peut considérer  $\omega_1 = d\theta_1$ . De plus  $\theta_0$  et  $\theta_1$  diffèrent d'une constante sur  $S^1 \setminus \{x_0, x_1\}$ , donc  $d(\theta_0 - \theta_1) = 0$  et  $\omega_0 = \omega_1$  sur cet ouvert. On peut donc les « recoller » : on a une 1-forme  $\omega$  dont la restriction à  $S^1 \setminus \{x_i\}$  est  $\omega_i$ . Clairement  $d\omega = 0$  puisque c'est une condition locale et  $d\omega_i = dd\theta_i = 0$ .

La forme fermée  $\omega$  n'est pas exacte. La meilleure façon de montrer ça est par le *théorème de Stokes* qui affirme que

$$\int_{\partial X} \eta = \int_X d\eta,$$

où  $X$  est une variété *compacte* à bord, ce qui est un premier lien entre le bord d'une variété et l'opération  $d$  sur les formes qui préfigure le théorème de Rahm. En l'occurrence, de bord de  $S^1$  est vide, donc si  $\omega = d\eta$  son intégrale vaudrait 0. Or si on la calcule on trouve 1 (c'est aussi l'intégrale sur  $S^1 \setminus \{x_0\}$  clairement, qui vaut  $\theta_0(1) - \theta_0(0)$ ).

Donc  $\omega$  représente une classe de cohomologie non-nulle de  $H_{deR}^1(S^1)$ . Par le théorème de Rahm ce groupe est isomorphe à  $H^1(S^1, \mathbf{R}) = \mathbf{R}$ , donc  $\omega$  est en fait un générateur de cet espace vectoriel.

**Exemple 14.6.2** (Le théorème de la physique). Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbf{R}^3$ , vu comme une variété lisse. En physique on utilise les notations suivantes. Une 1-forme sur  $U$  est de la forme

$$f dx + g dy + h dz$$

où  $x, y$  et  $z$  sont les projections évidentes, et on l'identifie avec le « champ de vecteurs »  $(f, g, h)$ , vu comme une fonction  $U \rightarrow \mathbf{R}^3$ . L'opération  $d: \mathcal{C}^\infty \rightarrow \Omega^1$  est notée  $\nabla$  (prononcé « nabla »).

Une 2-forme peut s'écrire

$$f dy \wedge dz + g dx \wedge dz + h dx \wedge dy,$$

et on l'identifie encore avec le champ  $(f, g, h)$ . L'opération  $d: \Omega^1 \rightarrow \Omega^2$  est notée *rot* (prononcé « rotationnel » et vu comme une opération sur les champs).

Enfin, une 3-forme s'écrit toujours

$$f dx \wedge dy \wedge dz,$$

on peut l'identifier avec une fonction. L'opération  $d: \Omega^2 \rightarrow \Omega^3$  est notée *div* (prononcé « divergence »).

La relation simple  $d^2 = 0$  se transforme en deux égalités obscures, à savoir  $rot \circ \nabla = 0$  et  $div \circ rot = 0$ . La définition de  $d$ , impossible à oublier, devient trois définitions improbables pour  $\nabla(f)$ ,  $rot(f, g, h)$  et  $div(f, g, h)$ .

On énonce alors en physique : si  $U$  est simplement connexe, tout champ de vecteurs dont le rotationnel est nul est de la forme  $\nabla f$  pour une fonction  $f$ . En

effet on alors  $H_1(U, \mathbf{Z}) = 0$  par Hurewicz, donc  $H^1(U, \mathbf{R}) = 0$  par les coefficients universels, donc  $H_{deR}^1(U) = 0$  par Rahm.

Également, on dira que si  $U$  est contractile, tout champ de vecteurs dont la divergence est nulle est de la forme  $rot(v)$  pour un champ  $v$  : c'est la traduction du fait que  $H^2(U, \mathbf{R}) = 0$  couplé à l'isomorphisme de Rahm.

## Appendice : les démonstrations manquantes

### Les faisceaux discrets

**Définition 14.6.3.** Pour chaque  $x \in X$ , supposons qu'un groupe abélien  $A_x$  soit donné. On peut alors définir un faisceau, noté  $\{A_x\}_{x \in X}$ , qui à un ouvert  $U$  associe le groupe de toutes les fonctions

$$s: U \longrightarrow \prod_{x \in U} A_x$$

telles que  $s(x) \in A_x$ . On dit que  $\{A_x\}_{x \in X}$  est le *faisceau discret* associé aux groupes  $A_x$ .

Il faut évidemment vérifier que cette définition donne bien un faisceau, mais c'est très facile.

**Lemme 14.6.4.** Soit  $\{A_x\}$  un faisceau discret, et soit  $\mathcal{F}$  un faisceau quelconque. Alors il y a une bijection entre les morphismes de faisceaux  $\mathcal{F} \rightarrow \{A_x\}$  et les collections de morphismes

$$\mathcal{F}_x \longrightarrow A_x$$

pour tout  $x \in X$ .

*Démonstration.* Tout d'abord le groupe des germes de  $\{A_x\}$  en  $x$  est simplement  $A_x$ , comme on le voit facilement. Un morphisme de faisceaux donne un morphisme au niveau des germes, et il faut montrer la réciproque.

Supposons donc que l'on ait pour chaque  $x \in X$  un morphisme  $\phi_x: \mathcal{F}_x \rightarrow A_x$ . Soit  $U$  un ouvert et  $s \in \mathcal{F}(U)$ . La fonction  $x \mapsto \phi_x(s_x)$  est dans  $\{A_x\}(U)$ , on la notera  $\phi(s)$  et ceci définit  $\phi: \mathcal{F} \rightarrow \{A_x\}$ . Clairement  $\phi$  induit effectivement  $\phi_x$  au niveau des germes.

L'unicité de ce  $\phi$  résulte du lemme 14.1.6. □

**Corollaire 14.6.5.** Si chaque  $A_x$  est un groupe abélien injectif, alors  $\{A_x\}_{x \in X}$  est un faisceau injectif.

Il faut démêler un peu les définitions, mais au final c'est évident !

Il ne faut pas confondre  $\mathcal{F}$  et  $\{\mathcal{F}_x\}_{x \in X}$ . En fait on a la relation suivante :

**Lemme 14.6.6.** Le groupe  $\mathcal{F}(U)$  est un sous-groupe de  $\{\mathcal{F}_x\}(U)$ , l'élément  $s \in \mathcal{F}(U)$  étant vu comme la fonction  $x \mapsto s_x$ . Plus précisément,

$$s: U \longrightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$$

est dans  $\mathcal{F}(U)$  si et seulement si la condition suivante est vérifiée : pour tout  $x \in U$ , il existe  $V \subset U$  contenant  $x$  et une section  $t \in \mathcal{F}(V)$  telle que  $s(y) = t_y$  pour tout  $y \in V$ .

*Démonstration.* Exercice sur la définition de « faisceau ». □

Noter que cette caractérisation de  $\mathcal{F}(U)$  est « inductive », dans la mesure où elle fait intervenir  $\mathcal{F}(V)$  pour  $V \subset U$ . Ce n'est pourtant pas vide de sens : on énonce qu'une fonction  $s$  comme ci-dessus est de la forme  $x \mapsto s_x$  si et seulement si c'est vrai *localement*. Le deuxième corollaire ci-dessous va également montrer que cette propriété donne des idées. Cependant énonçons sans attendre :

**Corollaire 14.6.7.** *Tout faisceau  $\mathcal{F}$  se plonge dans un faisceau injectif.*

*Démonstration.* D'après la première partie du lemme (la plus évidente), le faisceau  $\mathcal{F}$  s'injecte dans  $\{\mathcal{F}_x\}_{x \in X}$ . Si on choisit pour chaque  $x$  un groupe abélien injectif  $A_x$  tel que  $\mathcal{F}_x$  s'injecte dans  $A_x$  comme dans le chapitre précédent, alors  $\{A_x\}$  est un sous-faisceau du faisceau injectif  $\{A_x\}$ , et donc  $\mathcal{F}$  aussi. □

**Corollaire 14.6.8.** *Pour tout pré-faisceau  $\mathcal{F}$ , il existe un faisceau  $\hat{\mathcal{F}}$  et un morphisme de pré-faisceaux  $\phi: \mathcal{F} \rightarrow \hat{\mathcal{F}}$ , tel que tout morphisme  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  où  $\mathcal{G}$  est un faisceau se factorise par  $\phi$ . De plus un tel  $\hat{\mathcal{F}}$  est unique.*

On dit que  $\hat{\mathcal{F}}$  est le *faisceautisé* de  $\mathcal{F}$ .

*Démonstration.* L'unicité est assez claire, il faut montrer l'existence. On définit les groupes  $\mathcal{F}_x$  comme si  $\mathcal{F}$  était un faisceau et non seulement un pré-faisceau, et on considère le faisceau  $\{\mathcal{F}_x\}_{x \in X}$ . Ensuite on définit  $\hat{\mathcal{F}}(U)$  comme étant le sous-groupe de  $\{\mathcal{F}_x\}(U)$  des  $s$  vérifiant la condition indiquée dans le lemme (donc pour tout  $x$  il doit exister  $V$  et  $t \in \mathcal{F}(V)$  tels que  $s(y) = t_y$  pour  $y \in V$ ). (On voit de suite que si  $\mathcal{F}$  était déjà un faisceau, alors  $\hat{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$ ). On vérifie sans peine que  $\hat{\mathcal{F}}$  est un faisceau.

Un morphisme de pré-faisceaux  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  donne un morphisme de faisceaux  $\{\mathcal{F}_x\} \rightarrow \{\mathcal{G}_x\}$ . Si  $\mathcal{G}$  est un faisceau, le lemme montre que  $\hat{\mathcal{F}}(U)$  est envoyé dans  $\mathcal{G}(U)$ , ce qui revient à dire que l'on a une factorisation  $\mathcal{F} \rightarrow \hat{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{G}$ . □

Il ne faut pas croire que  $\mathcal{F} \rightarrow \hat{\mathcal{F}}$  est toujours injectif, d'ailleurs la construction de  $\hat{\mathcal{C}}^n$  à partir de  $\mathcal{C}^n$  que l'on a vu plus haut est un exemple de faisceautisation.

On utilise ce procédé pour faire avec les faisceaux toutes les constructions que l'on fait avec les modules. Par exemple le quotient du faisceau  $\mathcal{G}$  par le sous-faisceau  $\mathcal{F}$  est obtenu en prenant le pré-faisceau  $\mathcal{H}$  défini par  $\mathcal{H}(U) = \mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U)$  et en considérant le faisceautisé  $\hat{\mathcal{H}}$ , qui est la bonne définition de  $\mathcal{G}/\mathcal{F}$ . On fait pareil pour l'image d'un morphisme de faisceaux, le produit tensoriel de faisceaux, etc etc. Avec cet outil, vous devez pouvoir montrer le théorème 14.3.1.

## Faisceaux acycliques

On va maintenant montrer la proposition 14.3.3. Une fois pour toutes on dira qu'un faisceau  $\mathcal{F}$  est acyclique si  $H^n(X, \mathcal{F}) = 0$  pour  $n \geq 1$  (donc s'il est « acyclique pour le foncteur des sections globales »). On veut montrer que les faisceaux de  $\mathcal{C}^0$ -modules ou de  $\mathcal{C}^\infty$ -modules sont acycliques.

Commençons par une remarque simple qui nous ramène à  $n = 1$  :

**Lemme 14.6.9.** *Si on peut montrer que pour tout faisceau  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{C}^0$ -modules, on a  $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$ , alors on aura montré que tous les faisceaux de  $\mathcal{C}^0$ -modules sont acycliques. De même pour  $\mathcal{C}^\infty$ .*

*Démonstration.* En effet, prenons un groupe abélien injectif  $I_x$  qui contient  $\mathcal{F}_x$ . Alors  $\mathcal{I} = \{I_x\}_{x \in X}$  est injectif et  $\mathcal{F}$  se plonge dans  $\mathcal{I}$ . Mais si  $\mathcal{F}$  est un faisceau de  $\mathcal{C}^0$ -modules ou de  $\mathcal{C}^\infty$ -modules, alors  $\mathcal{F}_x$  est un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel donc est injectif, et on peut prendre  $I_x = \mathcal{F}_x$ ; en tout cas dès que  $I_x$  est lui-même un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel, alors  $\mathcal{I}$  est un faisceau de  $\mathcal{C}^\infty$ -modules et de  $\mathcal{C}^0$ -modules, à la fois. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{F}/\mathcal{I} \longrightarrow 0,$$

où le quotient est défini comme ci-dessus. On vérifie que  $\mathcal{F}/\mathcal{I}$  est un faisceau de  $\mathcal{C}^\infty$ -modules ou de  $\mathcal{C}^0$ -modules, comme  $\mathcal{F}$ .

Cette suite exacte courte donne naissance à une suite exacte longue en cohomologie, et  $H^n(X, \mathcal{I}) = 0$  pour  $n \geq 1$  puisque  $\mathcal{I}$  est injectif. On en déduit que

$$H^n(X, \mathcal{F}/\mathcal{I}) \cong H^{n+1}(X, \mathcal{F})$$

pour  $n \geq 1$ . Si on sait que le premier groupe de cohomologie est nul pour tous les faisceaux de  $\mathcal{C}^0$ -modules (ou  $\mathcal{C}^\infty$ ), alors en l'appliquant à  $\mathcal{F}/\mathcal{I}$  on voit que  $H^2(X, \mathcal{F}) = 0$ . C'est vrai pour tout  $\mathcal{F}$ , donc pour  $\mathcal{F}/\mathcal{I}$ , et donc  $H^3(X, \mathcal{F}) = 0$ . C'est vrai pour tout  $\mathcal{F}$ , etc.  $\square$

Quelques notions de topologie générale pour nous aider à conclure. Un recouvrement  $(U_\alpha)$  de  $X$  par des ouverts est dit *localement fini* si chaque  $x \in X$  possède un voisinage  $V$  qui n'intersecte qu'un nombre fini de  $U_\alpha$ . Un espace topologique  $X$  est dit *paracompact* si chaque recouvrement ouvert  $(U_\alpha)$  possède un raffinement localement fini, c'est-à-dire un recouvrement ouvert localement fini  $(V_\beta)$  tel que chaque  $V_\beta$  est inclus dans un  $U_\alpha$ . (Noter qu'il n'est pas vrai, dans ce cas, que chaque recouvrement possède un « sous-recouvrement » localement fini, en choisissant certains indices  $\alpha$ ). Tout espace compact est paracompact (c'est évident), ainsi que tout espace métrique (ça l'est moins, mais ça se montre). En particulier, toute variété, qui peut se plonger dans  $\mathbf{R}^n$ , est paracompacte.

Une *partition de l'unité* dominée par le recouvrement  $(U_\alpha)$  est une collection de fonctions continues

$$\phi_\alpha: X \longrightarrow [0, 1]$$

avec les propriétés suivantes, où  $\text{support}(\phi_\alpha) = \overline{\{x : \phi_\alpha(x) \neq 0\}}$  :

1.  $\text{support}(\phi_\alpha) \subset U_\alpha$ ,
2. la famille des  $\text{support}(\phi_\alpha)$  est localement finie,
3.  $\sum_\alpha \phi_\alpha(x) = 1$  pour tous les  $x \in X$ .

(D'après le point (2), la somme dans le (3) est finie.) Un théorème classique affirme alors : si  $X$  est paracompact, alors tout recouvrement admet des partitions de l'unité. De plus, si  $X$  est une variété lisse, on peut montrer ceci avec  $\phi_\alpha$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . D'ailleurs, la version  $\mathcal{C}^\infty$  est sensiblement plus facile à montrer que la version  $\mathcal{C}^0$  (essentiellement parce que sur une variété on sait tout de suite qu'il existe beaucoup de fonctions lisses, en se ramenant à  $\mathbf{R}^n$ , alors que sur un espace topologique il est difficile de montrer qu'il existe d'autres fonctions continues à valeurs réelles hormis les fonctions constantes!).

Avec ces nouveaux outils, nous voilà prêts à montrer :

**Lemme 14.6.10.** *Si  $X$  est paracompact, alors pour tout faisceau  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{C}^0$ -modules, on a  $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$ . De même pour les faisceaux de  $\mathcal{C}^\infty$ -modules si  $X$  est une variété.*

*Démonstration.* On se concentre sur le cas  $\mathcal{C}^0$ , le cas  $\mathcal{C}^\infty$  étant presque identique. On va montrer que pour toute suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

avec  $\mathcal{F}$  un faisceau de  $\mathcal{C}^0$ -modules, l'homomorphisme  $\mathcal{G}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$  est surjectif. On en déduit en effet par la suite exacte longue en cohomologie que  $H^1(X, \mathcal{F})$  s'injecte dans  $H^1(X, \mathcal{G})$ , et en prenant  $\mathcal{G}$  injectif il vient bien  $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$ .

Soit donc  $t \in \mathcal{H}(X)$ . Par définition des suites exactes de faisceaux, pour tout  $x \in X$  on peut trouver un ouvert  $U$  contenant  $x$ , et un élément  $s \in \mathcal{G}(U)$  tel que  $\psi(s) = t|_U$ . Soit donc  $(U_\alpha)$  un recouvrement de  $X$  par des ouverts de cette forme. On notera  $s_\alpha \in \mathcal{G}(U_\alpha)$  un élément tel que  $\psi(s_\alpha) = t|_{U_\alpha}$ .

L'élément  $s_\alpha$  n'est pas unique, et on peut le remplacer par  $s_\alpha - f_\alpha$ , où  $f_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$ . On va en fait montrer que l'on peut choisir  $f_\alpha$  de manière habile, de sorte que

$$s_\alpha - f_\alpha = s_\beta - f_\beta$$

sur  $U_\alpha \cap U_\beta$ . Dans ce cas, par la propriété caractéristique des faisceaux, on peut recoller ces éléments en un  $s \in \mathcal{G}(X)$ , qui vérifiera alors  $\psi(s) = t$ .

Reste à définir  $f_\alpha$ . Soit  $s_{\alpha\beta} = s_\alpha - s_\beta \in \mathcal{F}(U_\alpha \cap U_\beta)$ . Choisissons une partition de l'unité  $(\phi_\alpha)$  dominée par  $(U_\alpha)$ . L'élément  $\phi_\beta s_{\alpha\beta}$  peut être étendu en un élément de  $\mathcal{F}(U_\alpha)$ , et non seulement de  $\mathcal{F}(U_\alpha \cap U_\beta)$  : en effet l'ouvert  $U_\alpha$  est recouvert par les deux ouverts  $U_\alpha \cap U_\beta$  (sur lequel  $\phi_\beta s_{\alpha\beta}$  a un sens) et  $U_\alpha \setminus \text{support}(\phi_\beta)$  (sur lequel on prend la section nulle de  $\mathcal{F}$ ), et on peut faire un recollement car  $\mathcal{F}$  est un faisceau. On peut donc poser

$$f_\alpha = \sum_{\beta} \phi_\beta s_{\alpha\beta} \in \mathcal{F}(U_\alpha).$$

Cette somme a un sens car la famille des supports des  $\phi_\beta$  est localement finie ; voir la description de  $\mathcal{F}(U_\alpha)$  comme dans le lemme 14.6.6 pour s'en convaincre.

On a alors

$$f_\alpha - f_\beta = \sum_{\gamma} \phi_\gamma s_{\alpha\gamma} - \sum_{\gamma} \phi_\gamma s_{\beta\gamma} = \sum_{\gamma} \phi_\gamma s_{\alpha\beta} = s_{\alpha\beta},$$

puisque  $s_{\alpha\gamma} - s_{\beta\gamma} = s_{\alpha\beta}$ , et la somme des  $\phi_\gamma$  vaut 1. On a donc bien  $s_\alpha - f_\alpha = s_\beta - f_\beta$ . Ceci conclut la preuve du lemme, donc la preuve de la proposition 14.3.3, et donc le cours de topologie algébrique.  $\square$

# Références

**Bredon**, *Topology and Geometry*. Très complet. On appréciera particulièrement :

- analyse des cellules et du complexe cellulaire dans un produit de deux CW-complexes (p211).
- calcul du degré d’une application  $S^n \rightarrow S^n$ , avec une preuve du théorème 5.2.11 : voir p190 et suivantes. En particulier la proposition 7.2 contient, dans sa démonstration, une explication de notre affirmation selon laquelle “ $f$  est homotope à sa différentielle  $df$ ”.
- une démonstration du slogan “le cup-produit est le Poincaré-dual de l’intersection” : c’est le théorème 11.9, p372.

**May**, *A Concise Course in Algebraic Topology*. Comme l’indique le titre, c’est un livre très dense et qui ne contient pas toutes les démonstrations de ses théorèmes. C’est plutôt un résumé très complet (et très bon), qui couvre également le groupe fondamental.

A noter en p130, une démonstration du théorème de Künneth algébrique sur un corps (donc une solution de l’exercice 36).

**Munkres**, *Elements of Algebraic Topology*. Le plus facile d’accès. Les démonstrations semblent longues mais c’est parce qu’elles sont détaillées (donc faciles). À voir :

- preuve du lemme du zig-zag en p136.
- vérification des axiomes d’Eilenberg et Steenrod pour l’homologie singulière, p168 et suivantes.
- version très générale du théorème de la courbe de Jordan : p202 et suivantes.
- tout le chapitre 7 sur “l’algèbre homologique”, c’est-à-dire tout ce qui a trait aux complexes de chaînes. On y trouve particulièrement un théorème définitif de dualité entre homologie et cohomologie (corollaire 53.2, p323), et un autre théorème exprimant  $H_n(X; k)$  en fonction de  $H_n(X; \mathbf{Z})$  (corollaire 55.2).
- p214, une définition des CW-complexes qui est la meilleure dans le cas d’un complexe *infini*. À ne pas rater, la figure 38.3 p217.
- tout le début sur l’homologie “simpliciale”. Les complexes simpliciaux sont des CW-complexes très particuliers, assemblages de polyèdres de dimensions diverses. Dans ce cas, les degrés que l’on doit calculer pour obtenir l’homologie sont données par une formule combinatoire très simple, et un ordinateur peut sans problème faire le travail. Seul souci, il faut de nombreuses cellules pour décrire même un espace simple, et c’est réhhibitoire “à la main”.

**Milnor & Stasheff**, *Characteristic Classes*. Extrêmement bien écrit, c'est surtout un livre pour aller plus loin. Mais il contient un appendice sur l'homologie singulière qui est utile ; en particulier, on y trouvera une preuve complète de la dualité de Poincaré (c'est-à-dire des détails en plus par rapport au cours, et une démonstration du théorème 7.2.3, voir le lemme A.7 et le théorème A.8).

**Hatcher**, *Algebraic Topology*. C'est un livre très populaire parce qu'il est gratuit (téléchargeable sur Internet).