

Topologie Algébrique

Notes du cours d'A. Touzé

10 janvier 2013

Table des matières

1	Introduction - Notions de base	3
1.1	Rappels sur les espaces topologiques	3
1.1.1	Propriétés d'espaces topologiques	4
1.2	Espaces quotients	5
1.2.1	Topologie quotient	5
1.2.2	Écrasement d'un sous-espace	6
1.2.3	Actions de groupes topologiques sur un espace	6
1.2.4	Recollement d'espaces topologiques	7
1.3	Variétés topologiques	7
1.4	Homotopies	8
1.5	L'ensemble d'homotopie π_0	9
2	Le groupe fondamental	10
2.1	Définition du groupe fondamental	10
2.1.1	Homotopies de chemins à extrémités fixées	10
2.1.2	Groupe fondamental d'un espace topologique	12
2.1.3	Effet d'une application continue sur π_1	13
2.2	Groupe fondamental du cercle, degré	14
2.2.1	$\pi_1(S^1, 1)$	14
2.2.2	Applications	16
2.3	Théorème de Van Kampen	17
2.3.1	Groupes libres et sommes amalgamées	17
2.3.2	Théorème de Van Kampen	19
2.4	Premières applications	21
2.4.1	$\pi_1(S^n), n \geq 2$	21
2.4.2	π_1 d'un bouquet d'espace	22
2.5	Complexes cellulaires finis et surfaces	22
2.5.1	Attachement d'une cellule à un espace topologique	22
2.5.2	Espaces cellulaires finis (CW-complexes finis)	24
2.6	Surfaces	25
2.6.1	Dessin	25
2.6.2	Définition	25
2.6.3	Structure cellulaire	26

3	Revêtements	26
3.1	Définitions – exemples – questions	26
3.2	Relèvement des applications	28
3.2.1	Unicité des relèvements	28
3.2.2	Relèvements des homotopies	29
3.3	Applications du théorème de relèvement des homotopies	30
3.4	Théorème de relèvement des applications	30
3.5	Monodromie et morphismes de revêtements	32
3.5.1	Monodromie	32
3.5.2	Morphismes de revêtements	33
3.6	Revêtements galoisien	34
3.6.1	Définition	34
3.6.2	Structure	35
3.7	Classification des revêtements	36
3.7.1	Revêtement universel	36
3.7.2	Classification	37
4	Homologie Singulière	38
4.1	Catégories & Foncteurs	38
4.2	Complexes de chaînes et homologie	39
4.3	Complexe de chaîne singulière, homologie singulière	41
4.3.1	Simplexes standard	41
4.3.2	Chaînes singulières et homologie singulière	41
4.3.3	Propriétés	43
4.3.4	Suites exactes courtes et longues	45
4.3.5	Homologie relative	48
4.4	Calcul de l'homologie singulière	48
4.4.1	H_0 et H_1	48
4.4.2	Théorème des chaînes \mathcal{U} -petites	50
4.4.3	Théorème de Mayer Vietoris	54
4.5	Excision	55
4.5.1	Homologie des complexes cellulaires	57
4.6	Application de l'homologie singulière	59
4.6.1	Théorème de Brouwer	59
4.6.2	Théorème d'invariance de la dimension	59
4.6.3	Théorème de Jordan	59
4.6.4	Théorème de Jordan	61
4.6.5	Théorème de l'invariance du domaine	62
5	Cohomologie	63
5.1	Définition et calculs	63
5.1.1	Complexes de cochaines	63
5.1.2	Cohomologie singulière et outils de calcul	64
5.2	Cup produits	70
5.2.1	Algèbres différentielles graduées	70
5.2.2	Cup produit	71
5.3	(Co)Homologie des variétés topologiques	73
5.3.1	Orientations	73
5.3.2	Revêtement d'orientation	75
5.3.3	Classe fondamentale	75
5.4	Dualité de Poincaré	77
5.4.1	Cap produit	77

5.4.2	Dualité de Poincaré	77
6	Références	77
6.1	Topologie algébrique	77
6.2	Algèbre homologique	78
6.3	Relations avec la géométrie	78

1 Introduction - Notions de base

Questions traitées en topologie algébrique :

1. Comment décrire la “forme” d’un espace topologique ?
2. Comment reconnaître que deux espaces sont “les mêmes” ?
3. Si X, Y sont deux espaces topologiques, existe-t-il une application continue $f : X \rightarrow Y$ qui remplit un certain nombre de conditions déterminées à l’avance ?

Philosophie Si X est un espace topologique, on lui associe des “invariants” (de nature algébrique). Par exemple :

$$\begin{cases} \pi_k(X) & \text{les groupes d'homotopie de } X \\ H_k(X) & \text{les groupes d'homologie (singulière) de } X \\ H^k(X) & \text{les groupes de cohomologie de } X \end{cases}$$

Quelques remarques :

- ▷ Ces invariants décrivent la forme de X .
- ▷ Si deux espaces topologiques sont “les mêmes”, alors leurs invariants sont les mêmes.
- ▷ Une application $f : X \rightarrow Y$ induit un morphisme entre les invariants. On comprend les propriétés de f à travers son action sur les invariants.

Exemples d’applications :

1. Le théorème de d’Alembert Gauss
2. Le théorème de Brouwer (si $f : D^n \rightarrow D^n$ est continue, alors elle a un point fixe)
3. Le théorème de Jordan (Toute courbe simple fermée de \mathbb{R}^2 sépare le plan en deux composantes connexes)
4. Le théorème d’invariance de la dimension (\mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m sont non homéomorphes si $n \neq m$)
5. Le théorème de Nielsen-Schreier (Tout sous-groupe d’un groupe libre est libre)

1.1 Rappels sur les espaces topologiques

Définition 1.1. Un espace topologique (X, \mathcal{O}) où X est un ensemble, $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$ tel que \mathcal{O} soit stable par \cap finie, par \cup , et contienne X et \emptyset . \mathcal{O} est la topologie de X , ses éléments sont les ouverts, leurs complémentaires les fermés.

Exemples d’espaces topologiques :

1. Si X est un ensemble :

$$\begin{cases} \mathcal{O} = \{\emptyset, X\} & \text{est la topologie grossière} \\ \mathcal{O} = \mathcal{P}(X) & \text{est la topologie discrète} \end{cases}$$
2. Si (X, d) est un espace métrique, alors c’est un espace topologique où les ouverts sont réunion de boules ouvertes.

3. Un sous-espace $A \subset X$ où X est un espace topologique est muni de la topologie induite : les ouverts de A sont les $\mathcal{U} \cap A$, $\mathcal{U} \in \mathcal{O}(X)$.
4. Produit d'espaces topologiques : la topologie produit sur $X_1 \times X_2$ est engendrée par les pavés ouverts $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$.

Définition 1.2.

- ▷ $f : X \rightarrow Y$ est continue si $\forall \mathcal{U} \in \mathcal{O}(Y)$, $f^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{O}(X)$
- ▷ f est un homéomorphisme si f est une bijection continue, d'inverse continu.

1.1.1 Propriétés d'espaces topologiques

Séparation

Définition 1.3. Un espace topologique X est *séparé* (Hausdorff) si $\forall x \neq y \in X$, $\exists \mathcal{U}_x \ni x, \mathcal{U}_y \ni y$ ouverts tel que $\mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_y = \emptyset$

Exemples :

1. la topologie grossière n'est pas séparée
2. un sous-espace d'un espace séparé est séparé
3. un espace métrique est séparé

Compacité

Définition 1.4. L'espace topologique X est *compact* si :

1. X est séparé
2. de tout recouvrement ouvert de X , on peut extraire un recouvrement fini

Exemples :

1. Si E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, $K \subset E$ est compact $\iff K$ est fermé et borné
2. Si X est compact et $A \subset X$, alors A est compact $\iff A$ est fermé dans X
3. Un produit d'espaces compacts est compact (Tychonoff)
4. Soient $f : X \rightarrow Y$ continue, X compact, Y séparé alors $f(X)$ est compact

Proposition 1.1 (Critère d'homéomorphisme).

Soit X compact, Y séparé, $f : X \rightarrow Y$ continue, bijective, alors f est un homéomorphisme.

Définition 1.5. X est localement compact si :

1. X est séparé
2. tout point de X admet un voisinage compact

Exemples :

1. un sous-espace, ou un produit d'espaces localement compacts est localement compact
2. compact \implies localement compact
3. \mathbb{R}^n est localement compact

Connexité

Définition 1.6. Un espace topologique X est connexe s'il n'existe pas deux ouverts disjoints $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ non triviaux tel que $X = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$.

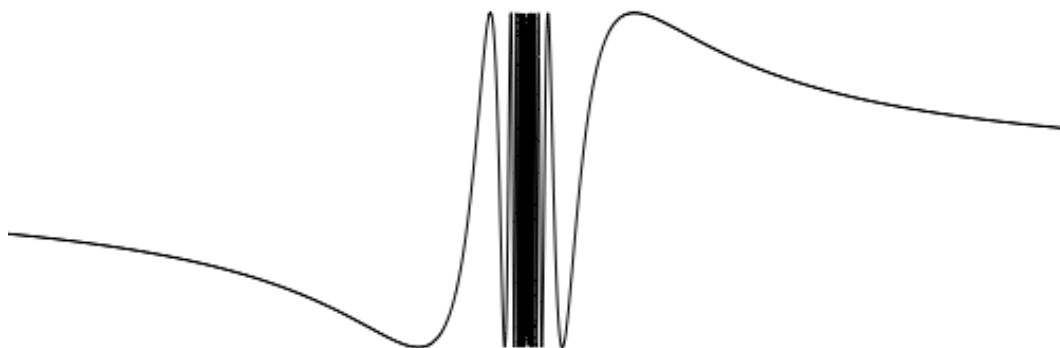
Définition 1.7. un espace topologique est connexe par arcs si $\forall x, y \in X$, il existe $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ un chemin continu de x à y , c'est à dire tel que $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$.

Exemples :

1. Un produit d'espaces connexes (resp. par arcs) l'est également
2. Si $f : X \rightarrow Y$ est continue et X connexe (resp. par arcs) alors $f(X)$ l'est également
3. Les parties connexes (resp. par arcs) de \mathbb{R} sont les intervalles
4. La réunion disjointe de deux espace topologiques X_1 et X_2 est $X_1 \coprod X_2$ avec pour ouverts les $\mathcal{U}_1 \coprod \mathcal{U}_2$ ($\mathcal{U}_1 \in \mathcal{O}(X_1), \mathcal{U}_2 \in \mathcal{O}(X_2)$). Cette topologie n'est pas connexe.

Proposition 1.2. *Connexe par arcs \implies connexe.*

La réciproque est fausse, un contre-exemple étant donné par l'adhérence du graphe de $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$.



1.2 Espaces quotients

1.2.1 Topologie quotient

Soit X un espace topologique, et \sim une relation d'équivalence sur X .

$$q : \begin{cases} X & \longrightarrow & X/\sim \\ x & \longmapsto & [x] \end{cases}$$

Définition 1.8. La topologie quotient sur X/\sim est la topologie telle que :

$$\mathcal{U} \text{ est un ouvert de } X/\sim \iff q^{-1}(\mathcal{U}) \text{ est un ouvert de } X$$

Lemme 1.1. *L'application $q : X \rightarrow X/\sim$ est continue.*

Théorème 1.1 (Propriété universelle). *Soit X un espace topologique, muni d'une relation d'équivalence \sim . Soit $f : X \rightarrow Y$ continue et constante sur les classes d'équivalences. Alors il existe une unique application $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y$ continue telle que $f = \bar{f} \circ q$.*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\forall f} & Y \\ q \downarrow & \nearrow \exists! \bar{f} & \\ X/\sim & & \end{array}$$

Démonstration :

Unicité : Si \bar{f} existe alors $\bar{f}([x]) = f(x)$ est déterminé par f .

Existence : On pose $\bar{f}([x]) = f(x)$. C'est bien défini car f est constante sur les classes d'équivalence. De plus \bar{f} est continue. En effet, pour \mathcal{U} un ouvert de Y ,

$$\begin{aligned} (\bar{f})^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{O}(X/\sim) &\iff q^{-1}((\bar{f})^{-1}(\mathcal{U})) \in \mathcal{O}(X) \\ &\iff f^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{O}(X) \end{aligned}$$

Problème technique : Si X est séparé, X/\sim ne l'est pas forcément !

1.2.2 Écrasement d'un sous-espace

L'écrasement X/A d'un sous-espace $A \subset X$ est le quotient de X par la relation d'équivalence définie par :

$$x \sim y \iff x = y \text{ ou } (x \in A \text{ et } y \in A)$$

Exemple :

On note $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ et $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$. On a $S^{n-1} \subset D^n$ et D^n/S^{n-1} est homéomorphe à S^n .

Démonstration :

On voit que $D^n = \{(x_1, \dots, x_n, 0) \mid \sum_{i=0}^n x_i^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ et $u = (0, \dots, 0, 1)$. On pose

$$f : \begin{cases} D^n & \longrightarrow & S^n \\ x & \longmapsto & \cos(\pi\|x\|)u + \sin(\pi\|x\|)\frac{x}{\|x\|} \end{cases}$$

▷ f est continue et surjective

▷ $f(S^{n-1}) = \{-u\}$

Donc f passe au quotient en une application $\bar{f} : D^n/S^{n-1} \rightarrow S^n$ continue et surjective. Or \bar{f} est injective. Comme S^n est séparé, D^n/S^{n-1} est séparé. Comme D^n/S^{n-1} est séparé et D^n compact, alors D^n/S^{n-1} est compact. On utilise le critère d'homéomorphisme pour conclure que \bar{f} en est un.

1.2.3 Actions de groupes topologiques sur un espace

Définition 1.9 (groupe topologique). Un groupe topologique est un groupe (G, \bullet) muni d'une topologie telle que $G \times G \xrightarrow{\bullet} G$ et $G \xrightarrow{\cdot^{-1}} G$ soient continues.

Exemples :

1. N'importe quel groupe muni de la topologie discrète
2. $GL_n(\mathbb{C})$, $GL_n(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{R})$, $O_n(\mathbb{R})$, $SO_n(\mathbb{R})$, ... (munis de la topologie induite par la topologie usuelle de $M_n(\mathbb{C})$ ou $M_n(\mathbb{R})$)

Définition 1.10. Un groupe topologique G agit continuellement sur un espace topologique X si l'action de G sur X définit une application continue $G \times X \rightarrow X$.

Dans ce cas, on note X/G l'espace des orbites sous l'action de G muni de la topologie quotient.

Exemple 1 : \mathbb{Z} agit sur \mathbb{R} par translation $\begin{cases} \mathbb{Z} \times \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (n, x) & \longmapsto n + x \end{cases}$

Via cette action, \mathbb{R}/\mathbb{Z} est homéomorphe à S^1 .

Démonstration :

On pose $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & S^1 \\ t & \longmapsto & e^{2i\pi t} \end{cases}$

- ▷ f est continue, surjective et induit $\bar{f} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow S^1$ une bijection continue.
- ▷ \mathbb{R}/\mathbb{Z} est compact : il est séparé car S^1 l'est et que f est injective. Puis $[0, 1] \xrightarrow{\hookrightarrow} \mathbb{R} \xrightarrow{\twoheadrightarrow} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ avec $[0, 1]$ compact donc \mathbb{R}/\mathbb{Z} est compact.
- ▷ Le critère d'homéomorphisme termine le travail.

Exemple 2 : Espaces projectifs

Fixons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , \mathbb{K}^* agit sur $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ par multiplication :

$$\begin{cases} \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda x \end{cases}$$

L'espace quotient est notée $\mathbb{K}P^n$ ou $P^n(\mathbb{K})$, c'est l'espace projectif de dimension n sur \mathbb{K} . En exo, montrer que $\mathbb{K}P^n$ est séparé.

1.2.4 Recollement d'espaces topologiques

Soient $f : A \rightarrow X$ et $f' : A \rightarrow X'$ deux applications continues. On note $X \cup_A X'$ le quotient de $X \amalg X'$ par la relation d'équivalence engendrée par (la clôture symétrique transitive de) :

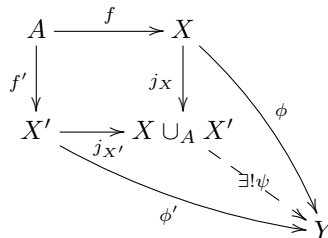
$$x \sim y \iff x = y \vee \exists a \in A, f(a) = x, f'(a) = y$$

On note j_X et $j_{X'}$ les injections respectives de X et X' dans $X \cup_A X'$.

Théorème 1.2 (Propriété universelle du recollement).

Pour toutes applications $\phi : X \rightarrow Y$ et $\phi' : X' \rightarrow Y$ continues telles que $\phi \circ f = \phi' \circ f'$, il existe une unique application ψ telle que

$$\phi = j_X \circ \psi \qquad \phi' = j_{X'} \circ \psi$$



Démonstration : Similaire à la propriété universelle du quotient.

Exemple : Soient X et X' deux espaces vectoriels, $x \in X$, $x' \in X'$. Le bouquet de $X \vee X'$ est l'espace topologique $X \cup_{\{*\}} X'$ avec

$$f : \begin{cases} \{*\} & \longrightarrow & X \\ * & \longmapsto & x \end{cases} \qquad f' : \begin{cases} \{*\} & \longrightarrow & X' \\ * & \longmapsto & x' \end{cases}$$

1.3 Variétés topologiques

Définition 1.11. Une variété topologique de dimension n est un espace topologique X séparé, tel que tout $x \in X$ admet un voisinage ouvert homéomorphe à $\overset{\circ}{D}^n$ (ou de manière équivalente à \mathbb{R}^n).

Exemples :

1. Les ouverts de \mathbb{R}^n sont des variétés topologiques de dimension n .
2. $GL_n(\mathbb{R})$ est une variété de dimension n^2 , $GL_n(\mathbb{C})$ de dimension $2n^2$.
3. la sphère S^n est une variété topologique de dimension n (sphère unité de \mathbb{R}^{n+1})
 En effet, posons $\phi : D^n/S^{n-1} \xrightarrow{\sim} S^n$.
 \triangleright Si $x \neq \phi([S^{n-1}])$, alors ϕ induit un homéomorphisme :

$$\overset{\circ}{D}^n = (D^n/S^{n-1}) \setminus \{[S^{n-1}]\} \xrightarrow[\sim]{\phi} S^n \setminus \{\phi([S^{n-1}])\}$$

qui est un ouvert contenant x .

- \triangleright Si $x = \phi([S^{n-1}])$, on utilise l'homéomorphisme :

$$\begin{aligned} S^n &\xrightarrow{\sim} S^n \xleftarrow[\phi]{\sim} D^n/S^{n-1} \\ x &\longmapsto -x \end{aligned}$$

donc $\phi([S^{n-1}])$ admet aussi un voisinage homéomorphe à $\overset{\circ}{D}^n$.

4. $\mathbb{R}P^n$ est une variété topologique de dimension n

En effet, on note $q : \begin{cases} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R}P^n \\ (x_0, \dots, x_n) & \longmapsto & [x_0 : \dots : x_n] \end{cases}$

Soit $x = [x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{R}P^n$, on suppose par exemple que $x_0 \neq 0$. On pose $\mathcal{U}_0 = \{[1 : z_1 : \dots : z_n] \mid z_0 \neq 0\}$.
 C'est un ouvert de $\mathbb{R}P^n$ (car $q^{-1}(\mathcal{U}_0) = \{[z_0 : z_1 : \dots : z_n] \mid z_0 \neq 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$).

$$\psi : \begin{cases} q^{-1}(\mathcal{U}_0) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x_0, \dots, x_n) & \longmapsto & \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right) \end{cases}$$

est continue, surjective et on dispose de $\bar{\psi} : q^{-1}(\mathcal{U}_0)/\mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^n$ en passant au quotient. L'application réciproque est donnée par $(z_1, \dots, z_n) \mapsto [1 : z_1 : \dots : z_n]$ qui est d'image \mathcal{U}_0 donc on a un homéomorphisme $\mathcal{U}_0 \simeq \mathbb{R}^n$

5. $\mathbb{C}P^n$ est une variété topologique de dimension $2n$
6. Les variétés topologiques de dimension 0 sont les espaces discrets
7. Les variétés topologiques de dimension 1 sont les "courbes topologique"
8. Les variétés topologiques de dimension 2 sont les "surfaces topologiques"
9. Toute sous-variété différentiable de \mathbb{R}^n est une variété topologique
10. $O_n(\mathbb{R})$ est une variété topologique de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$

1.4 Homotopies

Définition 1.12. Soient $f, g : X \rightarrow Y$ deux applications continues. f est homotope à g s'il existe une application continue $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ telle que $\forall x \in X, H(x, 0) = f(x)$ et $H(x, 1) = g(x)$. On note $f \sim g$, et H est dite une homotopie entre f et g .

Lemme 1.2. La relation "être homotope" est une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}(X, Y)$.

Démonstration :

- réflexive : $f \sim_H f$ avec $H(x, t) = f(x)$
- symétrique : Si $f \sim_H g$, alors $g \sim_K f$ avec $K(x, t) = H(x, 1 - t)$.

– transitive : Si $f \sim_H g$ et $g \sim_K h$ alors $f \sim_L h$ via

$$L(x, t) = \begin{cases} H(x, 2t) & \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ K(x, 2t - 1) & \text{si } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Lemme 1.3. *La relation d'homotopie est compatible avec la composition.*

Démonstration :

Soient $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$, $g_0, g_1 : Y \rightarrow Z$ tels que $f_0 \sim_L f_1$ et $g_0 \sim_M g_1$ alors $g_0 \circ f_0 \sim g_1 \circ f_1$. En effet, $g_0 \circ f_0 \sim_H g_0 \circ f_1$ via $H(x, t) = g_0(L(x, t))$, puis $g_0 \circ f_1 \sim_K g_1 \circ f_1$ via $K(x, t) = M(f_1(x), t)$. Par transitivité, on a le résultat.

Définition 1.13. Deux espaces topologiques X, Y ont même type d'homotopie (= sont homotopiquement équivalents) si il existe $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow X$ continues telles que $g \circ f \sim \text{Id}_X$ et $f \circ g \sim \text{Id}_Y$. On dit que g et f sont des équivalences d'homotopies.

Exemples :

1. Deux espaces homéomorphes ont même type d'homotopie.
2. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et S^{n-1} ont même type d'homotopie. En effet, $f : S^{n-1} \xrightarrow{\subset} \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est une équivalence d'homotopie d'inverse $g : \begin{cases} \mathbb{R}^n \setminus \{0\} & \longrightarrow & S^{n-1} \\ x & \longmapsto & \frac{x}{\|x\|} \end{cases}$
 $g \circ f = \text{Id}_{S^{n-1}}$ et $f \circ g \sim_H \text{Id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ via $H(x, t) = tx + (1-t)\frac{x}{\|x\|}$ qui est bien continue.

Définition 1.14. Un espace topologique X est contractile s'il est homotopiquement équivalent à un point.

Remarque 1.4.1. X est contractile $\iff \text{Id} : X \rightarrow X$ est homotope à une fonction constante.

Exemple 1 : Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un convexe, alors C est contractile. En effet, si $x_0 \in C$, alors $\text{Id}_C \sim \underbrace{\overline{x_0}}_{x \mapsto x_0}$ via

$$H : \begin{cases} C \times I & \longrightarrow & C \\ (x, t) & \longmapsto & tx + (1-t)x_0 \end{cases} .$$

Exemple 2 : \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m ont même type d'homotopie $\forall n, m$.

Aparté : Deux espaces topologiques X et Y sont “les mêmes”, peut signifier :

- ils sont homéomorphes
- ils ont même type d'homotopie

Les invariants $\pi_k(X)$, $H_k(X)$, $H^k(X)$ seront invariants pour la relation “avoir le même type d'homotopie”.

1.5 L'ensemble d'homotopie π_0

Définition 1.15. Soit X un espace topologique. $\pi_0(X)$ est l'ensemble obtenu en quotientant X par la relation

$$x \sim y \iff \exists \gamma : [0, 1] \rightarrow X, \text{ un chemin tel que } \gamma(0) = x \text{ et } \gamma(1) = y$$

$\pi_0(X)$ est l'ensemble des composantes connexes par arcs de X .

Proposition 1.3.

1. On a une bijection $\pi_0(X \times Y) \simeq \pi_0(X) \times \pi_0(Y)$

2. Si $f : X \rightarrow Y$ est continue, alors l'application suivante est bien définie :

$$\pi_0(f) : \begin{cases} \pi_0(X) & \longrightarrow \pi_0(Y) \\ \bar{x} & \longmapsto \overline{f(x)} \end{cases}$$

3. Si $f, g : X \rightarrow Y$ sont homotopes alors $\pi_0(f) = \pi_0(g)$.

4. Si $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ sont continues alors $\pi_0(g \circ f) = \pi_0(g) \circ \pi_0(f)$

5. Si X et Y ont même type d'homotopie alors on a une bijection $\pi_0(X) \simeq \pi_0(Y)$

Démonstration :

(1), (2) et (4) sont évidents

Pour (3), Si H est une homotopie entre f et g

$$\begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow X \\ t & \longmapsto H(x, t) \end{cases}$$

est un chemin continu entre $f(x)$ et $g(x)$ donc $\pi_0(f)([x]) = \pi_0(g)([x])$

Pour (5), Soit $f : X \rightarrow Y$ une équivalence d'homotopie et $g : Y \rightarrow X$ son inverse. Alors,

$$\begin{aligned} \pi_0(f) \circ \pi_0(g) &= \pi_0(g \circ f) \\ &= \pi_0(\text{Id}_Y) \\ &= \text{Id}_{\pi_0(Y)} \end{aligned}$$

de même, $\pi_0(g) \circ \pi_0(f) = \text{Id}_{\pi_0(X)}$

Application :

Proposition 1.4. *Il n'y a pas d'homéomorphisme entre \mathbb{R}^1 et \mathbb{R}^m pour $m > 1$.*

Preuve : Supposons par l'absurde que l'on ait $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ un homéomorphisme alors $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ donc $\pi_0(\tilde{\varphi})$ réalise une bijection de $\pi_0(\mathbb{R}^*)$ (de cardinal 2) dans $\pi_0(\mathbb{R}^m \setminus \{0\})$ (de cardinal 1).

2 Le groupe fondamental

Idée de départ : Essayons de reprendre la preuve précédente pour montrer que \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 ne sont pas homéomorphes. π_0 est un invariant trop simple pour cela. Par contre, si on considère le plan et l'espace privé d'un point, on remarque que tout chemin peut se déformer continument à extrémité fixées vers n'importe quel autre chemin de même extrémités dans l'espace (privé d'un point) ce qui n'est pas le cas dans le plan (toujours privé d'un point).

2.1 Définition du groupe fondamental

2.1.1 Homotopies de chemins à extrémités fixées

Définition 2.1. Soit X un espace topologique :

– un chemin de X de a vers b est une application continue $\gamma : I \rightarrow X$ ($I = [0, 1]$) telle que

$$\gamma(0) = a \text{ et } \gamma(1) = b$$

– une homotopie de chemins à extrémités fixées entre γ et μ est une application continue :

$$H : \begin{cases} I \times I & \longrightarrow X \\ (s, t) & \longmapsto H(s, t) \end{cases}$$

telle que

1. $H(0, t) = \gamma(t) \quad \forall t \in I$
2. $H(1, t) = \mu(t) \quad \forall t \in I$
3. $\forall s \in I \begin{cases} H(s, 0) = a \\ H(s, 1) = b \end{cases}$

Notations :

- $C_{a,b}(X)$ est l'ensemble des chemins de a vers b dans X .
- Si γ et μ sont homotopes à extrémités fixées via H , on note $\gamma \sim_H \mu$

Lemme 2.1. “être homotope à extrémités fixées” est une relation d'équivalence sur $C_{a,b}(X)$

Démonstration :

Réflexivité : $\gamma \sim_H \gamma$ via $H(s, t) = \gamma(t)$

Symétrie : Si $\gamma \sim_H \mu$ alors $\mu \sim_K \gamma$ via $K(s, t) = H(1 - s, t)$

Transitivité : Si $\gamma \sim_H \mu$ et $\mu \sim_K \delta$ alors $\gamma \sim_L \delta$ via

$$L(s, t) = \begin{cases} H(2s, t) & \text{si } s \leq \frac{1}{2} \\ K(2s - 1, t) & \text{si } s \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Définition 2.2. Si $\gamma \in C_{a,b}(X)$ et $\mu \in C_{b,c}(X)$ alors $\gamma \cdot \mu \in C_{a,c}$ est défini par :

$$(\gamma \cdot \mu)(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & t \leq \frac{1}{2} \\ \mu(2t - 1) & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Lemme 2.2. La relation “être homotope à extrémités fixées” est compatible avec la composition.

Démonstration : Si $\gamma_0 \sim_H \gamma_1$ et $\mu_0 \sim_K \mu_1$ alors $\gamma_0 \cdot \mu_0 \sim_L \gamma_1 \cdot \mu_1$ via

$$L(s, t) = \begin{cases} H(s, 2t) & t \leq \frac{1}{2} \\ K(s, 2t - 1) & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Définition 2.3. Si $\gamma \in C_{a,b}(X)$ alors $\gamma^{-1} \in C_{b,a}(X)$ est le chemin défini par : $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1 - t)$

Définition 2.4. Si $a \in X$, on note $\mathcal{E}_a \in C_{a,a}(X)$, $\mathcal{E}_a(t) = a$

Lemme 2.3. La composition des chemins :

- ▷ est associative à homotopie à extrémités fixées près :

$$(\gamma_1 \cdot \gamma_2) \cdot \gamma_3 \sim \gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot \gamma_3)$$

- ▷ possède des éléments neutres à homotopie à extrémités fixées près : Si $\gamma \in C_{a,b}(X)$ alors $\mathcal{E}_a \cdot \gamma = \gamma$ et $\gamma \cdot \mathcal{E}_b = \gamma$
- ▷ possède des inverses à homotopie à extrémités fixées près : Si $\gamma \in C_{a,b}(X)$ alors $\gamma \cdot \gamma^{-1} = \mathcal{E}_a$ et $\gamma^{-1} \cdot \gamma = \mathcal{E}_b$

Démonstration : Pour (1), l'homotopie H suivante convient (faire le dessin) :

$$H(s, t) = \begin{cases} \gamma_1\left(\frac{4t}{1+s}\right) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} + \frac{s}{4} \\ \gamma_2(4t - s - 1) & \frac{1}{4} + \frac{s}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} + \frac{s}{4} \\ \gamma_3\left(\frac{4t}{2-s} - 1\right) & \frac{1}{2} + \frac{s}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Pour (2), on utilise l'homotopie qui envoie \mathcal{E}_a sur 0.

Pour (3), on emploie

$$H(s, t) = \begin{cases} a & 0 \leq t \leq \frac{s}{2} \\ \gamma(2t - s) & \frac{s}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(2 - 2t - s) & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} + \frac{s}{2} \\ a & \frac{1}{2} + \frac{s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

2.1.2 Groupe fondamental d'un espace topologique

Un espace topologique pointé est une paire (X, x) où X est un espace topologique et $x \in X$ que l'on nomme *point de base*.

Définition 2.5. Soit (X, x) un espace topologique pointé,

$$\pi_1(X, x) = C_{x,x}(X) / \sim$$

où \sim est la relation d'homotopie à extrémités fixées. On appelle π_1 le groupe fondamental. Si $\gamma \in C_{x,x}(X)$, on note $[\gamma]$ sa classe d'équivalence. La structure de groupe est donnée par l'opération $[\gamma] \cdot [\mu] = [\gamma \cdot \mu]$. L'élément neutre est $[\mathcal{E}_x]$.

Remarque 2.1.1. Le lemme 2 assure que le produit est bien défini, le lemme 3 assure que $\pi_1(X, x)$ est un groupe.

Proposition 2.1 (Changement de point de base).

Soit $\gamma \in C_{x,y}(X)$ alors $\phi_\gamma : \begin{cases} \pi_1(X, x) & \longrightarrow & \pi_1(X, y) \\ [\mu] & \longmapsto & [\gamma^{-1}\mu\gamma] \end{cases}$ est un isomorphisme de groupes.

Démonstration :

D'une part ϕ_γ est un morphisme de groupes car :

$$\begin{aligned} \phi_\gamma([\mu\nu]) &= [\gamma^{-1}\mu\nu\gamma] \\ &= [\gamma^{-1}\mu\mathcal{E}_x\nu\gamma] \\ &= [\gamma^{-1}\mu\gamma\gamma^{-1}\nu\gamma] \\ &= [\gamma^{-1}\mu\gamma][\gamma^{-1}\nu\gamma] \\ &= \phi_\gamma([\mu])\phi_\gamma([\nu]) \end{aligned}$$

D'autre part, $(\phi_\gamma)^{-1} = \phi_{\gamma^{-1}}$.

Définition 2.6. Un espace topologique X est simplement connexe si

1. Il est connexe par arcs.
2. $\pi_1(X, x) = \{1\}$

2.1.3 Effet d'une application continue sur π_1

Proposition 2.2. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue et $x \in X$. Alors f induit un morphisme de groupe $\pi_1(f) : \begin{cases} \pi_1(X, x) & \longrightarrow & \pi_1(Y, f(x)) \\ [\gamma] & \longmapsto & [f \circ \gamma] \end{cases}$

Démonstration :

- ▷ $\pi_1(f)$ est bien définie : Si $\gamma \sim_H \mu$ alors $f \circ \gamma \sim_{f \circ H} f \circ \mu$
- ▷ $\pi_1(f)$ est un morphisme de groupes (remontrer en utilisant $f \circ (\gamma \cdot \mu) = (f \circ \gamma) \cdot (f \circ \mu)$)

Théorème 2.1. Si $f : X \rightarrow Y$ est une équivalence d'homotopie alors $\forall x \in X, \pi_1(f) : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$ est un isomorphisme.

Proposition 2.3. Soient $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ continues et $f_0 \sim_H f_1$ avec $H : X \times I \rightarrow Y, H(x, 0) = f_0(x), H(x, 1) = f_1(x)$. on note $\gamma \in C_{f_0(x), f_1(x)}(X)$ défini par $\gamma(t) = H(x, t)$. Alors on a le diagramme comutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x) & \xrightarrow{\pi_1(f_0)} & \pi_1(Y, f_0(x)) \\ & \searrow \pi_1(f_1) & \downarrow \phi_\gamma \\ & & \pi_1(Y, f_1(x)) \end{array}$$

Démonstration de la proposition :

- Il faut montrer que si $\mu \in C_{x,x}(X)$ alors $\gamma^{-1} \cdot (f_0 \circ \mu) \cdot \gamma$ et $f_1 \circ \mu$ sont homotopes à extrémités fixées
- On pose $K(s, t) : \begin{cases} I \times I & \longrightarrow & Y \\ (s, t) & \longmapsto & H(\mu(s), t) \end{cases}$
- Soit $\psi : I \times I \rightarrow I \times I$ continue envoyant le chemin horizontal $(0, \alpha) \rightarrow (1, \alpha)$ sur le chemin $(0, 1) \rightarrow (0, \alpha) \rightarrow (1, \alpha) \rightarrow (1, 1)$. Alors $K \circ \psi$ fournit une homotopie à extrémités fixées entre $\gamma^{-1} \cdot (f_0 \circ \mu) \cdot \gamma$ et $f_1 \circ \mu$.

Démonstration du théorème :

Si f est une équivalence d'homotopie, soit g un inverse homotopique : $g \circ f \sim_H \text{Id}_X$. On a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x) & \xrightarrow{\pi_1(g \circ f)} & \pi_1(X, x) \\ & \searrow \sim \pi_1(\text{Id}) & \downarrow \sim \phi_\gamma \\ & & \pi_1(X, x) \end{array}$$

Donc $\pi_1(g \circ f) = \pi_1(g) \circ \pi_1(f)$ est un isomorphisme de groupes. D'où l'injectivité de $\pi_1(f)$. De même, $\pi_1(f \circ g) = \pi_1(f) \circ \pi_1(g)$ est un isomorphisme de groupes et $\pi_1(f)$ est surjectif.

Corollaire 2.1. Un espace contractile est simplement connexe.

2.2 Groupe fondamental du cercle, degré

2.2.1 $\pi_1(S^1, 1)$

On considère $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\}$ ainsi que l'application $exp : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & S^1 \\ t & \longmapsto & e^{2i\pi t} \end{cases}$

On note $\mathcal{U} = S^1 \setminus \{1\}$ et $\mathcal{V} = S^1 \setminus \{-1\}$. exp induit des homéomorphismes :

$$\begin{array}{c}]n, n+1[\xrightarrow{\sim} \mathcal{U} \\ \left. \vphantom{]n, n+1[} \right] n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}[\xrightarrow{\sim} \mathcal{V} \end{array}$$

Proposition 2.4. *Pour tout $\gamma : [a, b] \rightarrow S^1$ continue et tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $exp(x) = \gamma(a)$, il existe un unique $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :*

$$\begin{cases} exp \circ \tilde{\gamma} = \gamma \\ \tilde{\gamma}(a) = x \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R} & \\ & \nearrow \exists! \tilde{\gamma} & \downarrow exp \\ [a, b] & \xrightarrow{\gamma} & S^1 \end{array}$$

Lemme 2.4 (de Lebesgue). *Soit X un espace métrique compact, et $(U_i)_i$ un recouvrement ouvert de X , il existe $\epsilon > 0$ tel que $\forall x \in X$, il existe U_i tel que $B(x, \epsilon) \subset U_i$.*

Démonstration du lemme en exercice.

Démonstration de la proposition : On utilise le lemme de Lebesgue. D'après ce lemme, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\forall x \in X, B(x, \epsilon) \subset \gamma^{-1}(\mathcal{U})$ ou $\gamma^{-1}(\mathcal{V})$ donc on peut découper $[a, b]$ régulièrement : $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ tel que $[a_i, a_{i+1}] \subset \gamma^{-1}(\mathcal{U})$ ou $\gamma^{-1}(\mathcal{V}), \forall i$ c'est à dire tel que $\gamma([a_i, a_{i+1}]) \subset \mathcal{U}$ ou \mathcal{V} .

Existence : on suppose $\tilde{\gamma}|_{[a, a_i]}$ est construite et on l'étend en $\tilde{\gamma}|_{[a, a_{i+1}]}$. Supposons $\gamma([a, a_i]) \subset \mathcal{U}$ alors $\tilde{\gamma}(a_i) \in]n-1, n[\subset exp^{-1}(\mathcal{U})$. On pose alors $\tilde{\gamma}|_{[a, a_{i+1}]} = exp^{-1}|_{]n-1, n[} \circ \gamma|_{[a, a_{i+1}]}$.

Unicité : Si $\tilde{\gamma}$ et $\bar{\gamma}$ sont deux relèvements tels que $\tilde{\gamma}(a) = \bar{\gamma}(a) = x$. Supposons que $\tilde{\gamma}|_{[a, a_i]} = \bar{\gamma}|_{[a, a_i]}$. Si par exemple $\tilde{\gamma}(a_i) = \bar{\gamma}(a_i) \in]n-1, n[\subset exp^{-1}(\mathcal{U})$:

$$\begin{array}{ccc} &]n-1, n[& \\ & \nearrow \tilde{\gamma}, \bar{\gamma} & \downarrow \sim exp \\ [a_i, a_{i+1}] & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{U} \end{array}$$

Alors sur $[a_i, a_{i+1}]$, $\tilde{\gamma} = exp^{-1} \circ \gamma = \bar{\gamma}$.

Définition 2.7. Si $\gamma : I \rightarrow S^1$ est un chemin continu tel que $\gamma(0) = \gamma(1)$, alors on définit

$$deg(\gamma) = \tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0)$$

où $\tilde{\gamma}$ est un relèvement quelconque de γ par exp .

Remarque 2.2.1.

- ▷ Les chemins γ tels que $exp \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ sont de la forme $\tilde{\gamma}(t) = n(t) + \bar{\gamma}(t)$ avec $n(t) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{Z}$ continue donc constante à n , ils sont donc de la forme $\tilde{\gamma}(t) = n + \bar{\gamma}(t)$
- ▷ Comme $\gamma(0) = \gamma(1) = a$, on a $\tilde{\gamma}(0)$ et $\tilde{\gamma}(1)$ dans $exp^{-1}(a)$ donc ils diffèrent d'un entier. Donc $deg(\gamma) \in \mathbb{Z}$

Proposition 2.5. Soit $f : [a, b] \times I \rightarrow S^1$ continue, et soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(x) = f(a, 0)$. Alors il existe une unique application $\tilde{f} : [a, b] \times I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \exp \circ \tilde{f} = f \\ \tilde{f}(a, 0) = x \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{R} \\ & \nearrow \exists! \tilde{f} & \downarrow \exp \\ [a, b] \times I & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

Démonstration : On découpe $[a, b] \times I$ en petits carrés $c_{ij} = [a_i, a_{i+1}] \times [x_j, x_{j+1}]$ tels que :

$$f(c_{ij}) \subset \mathcal{U} \text{ ou } f(c_{ij}) \subset \mathcal{V}$$

(à l'aide du lemme de Lebesgue)

Existence : Supposons \tilde{f} déjà construite pour $(x, a) \in C_{i', j'}, \forall (j', i') <_{lex} (j, i)$. Soit $C = C_{j, i}$, on a par exemple $f(C) \subset \mathcal{U}$ alors $\tilde{f}(C) \subset]n-1, n[\subset \exp^{-1}(\mathcal{U})$ et on pose $\tilde{f} = (\exp|_{]n-1, n[})^{-1} \circ f$

Unicité : en exercice

Théorème 2.2. Le degré induit un isomorphisme de groupes :

$$\deg : \begin{cases} \pi_1(S^1, z) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ [\gamma] & \longmapsto & \deg(\gamma) \end{cases}$$

Démonstration : L'application est bien définie : si $\gamma \sim_H \gamma'$ sont homotopes à extrémités fixées

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{R} \\ & \nearrow \exists \tilde{H} & \downarrow \exp \\ I \times I & \xrightarrow{H} & S^1 \end{array}$$

l'application continue :

$$\delta : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ s & \longmapsto & \tilde{H}(1, s) - \tilde{H}(0, s) = \deg(\gamma_s) \end{cases}$$

(où $\gamma_s(t) = H(t, s)$) est à valeurs dans \mathbb{Z} donc elle est constante.

$$\deg(\gamma) = \delta(0) = \delta(1) = \deg(\gamma')$$

Le degré est un morphisme de groupes :

Si $\gamma, \mu \in C_{z, z}(S^1)$, soient $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\mu}$ des relèvements de γ et μ tels que $\tilde{\mu}(0) = \tilde{\gamma}(0)$. Alors $\tilde{\gamma} \cdot \tilde{\mu}$ est un relèvement de $\gamma\mu$ donc

$$\begin{aligned} \deg(\gamma\mu) &= (\tilde{\gamma} \cdot \tilde{\mu})(1) - (\tilde{\gamma} \cdot \tilde{\mu})(0) \\ &= \tilde{\mu}(1) - \tilde{\gamma}(0) \\ &= (\tilde{\mu}(1) - \tilde{\mu}(0)) + (\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0)) \\ &= \deg(\gamma) + \deg(\mu) \end{aligned}$$

Le degré est surjectif : $\deg(t \mapsto e^{2i\pi nt}) = n, \forall n \in \mathbb{Z}$.

Le degré est injectif :

Si $\deg(\gamma) = 0$, alors $\gamma = \exp \circ \tilde{\gamma}$, $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}(0) = x$. Soit $H(s, t) = sx + (1-s)\tilde{\gamma}(t)$, alors $\tilde{\gamma} \sim_H \mathcal{E}_x$ est homotope à extrémités fixées. Donc $\exp \circ H$ est une homotopie à extrémités fixées entre $\gamma = \exp \circ \tilde{\gamma}$ et $\mathcal{E}_{\exp(x)}$. Donc $[\gamma] = 1 \in \pi_1(S^1, z)$.

2.2.2 Applications

Théorème 2.3. (D'Alembert) *Tout polynôme complexe non constant admet une racine.*

Démonstration : On procède par l'absurde.

Soit P non constant, sans racine :

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 \qquad \tilde{P} : \begin{cases} S^1 & \longrightarrow S^1 \\ z & \longmapsto \frac{P(z)}{|P(z)|} \end{cases}$$

▷ P n'a pas de racine dans $D^1 = \{z \mid |z| = 1\}$ donc : $H(z, t) = \frac{P(tz)}{|P(tz)|}$ est une homotopie entre \tilde{P} et $\frac{P(0)}{|P(0)|}$.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^1, 1) & \xrightarrow{\pi_1(\tilde{P})} & \pi_1(S^1, \tilde{P}(1)) \\ & \searrow \text{trivial} & \downarrow \sim \\ & & \pi_1\left(S^1, \frac{P(0)}{|P(0)|}\right) \end{array}$$

donc $\pi_1(\tilde{P})$ est un morphisme trivial.

▷ P n'a pas de racines dans $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 1\}$

$$K(z, t) = \frac{t^n P\left(\frac{z}{t}\right)}{|t^n P\left(\frac{z}{t}\right)|}$$

est une homotopie entre \tilde{P} et $\phi_n : \begin{cases} S^1 & \longrightarrow S^1 \\ z & \longmapsto z^n \end{cases}$

Or $\pi_1(\phi_n)$ envoie le générateur de $\pi_1(S^1, 1)$ sur un élément non trivial (n fois le générateur) :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^1, 1) & \xrightarrow{\pi_1(\tilde{P})} & \pi_1(S^1, \tilde{P}(1)) \\ & \searrow \pi_1(\phi_n) & \downarrow \sim \\ & & \pi_1(S^1, \phi_n(1)) \end{array}$$

Donc $\pi_1(\tilde{P})$ est injective ce qui est absurde.

Théorème 2.4 (Brouwer). *Toute application $f : D^2 \rightarrow D^2$ continue admet un point fixe.*

Démonstration : On procède une fois de plus par l'absurde. Supposons qu'il existe une fonction $f : D^2 \rightarrow D^2$ continue qui n'a pas de point fixe. Donc $\forall x \in D^2, f(x) \neq x$, on peut donc tracer la demi-droite $[f(x), x]$ qui est bien définie et intersecte $S^1 = \partial D^2$ en un point $r(x)$. L'application $r : D^2 \rightarrow S^1$ est continue. De plus, si $x \in S^1, r(x) = x$, c'est à dire : l'application $Id_{S^1} : S^1 \rightarrow S^1$ s'écrit comme la composée :

$$S^1 \xrightarrow{i} D^2 \xrightarrow{r} S^1$$

Donc :

$$\begin{aligned} Id_{\pi_1(S^1, 1)} &= \pi_1(Id_{S^1}) \\ &= \pi_1(r \circ i) \\ &= \pi_1(r) \circ \pi_1(i) \end{aligned}$$

Comme $\pi_1(D^2, 1) = \{0\}$ (D^2 est contractile). $\pi_1(i)$ est alors une application constante et $\pi_1(r) \circ \pi_1(i)$ l'est donc aussi.

Corollaire 2.2. Soit α et β deux chemins continus d'un rectangle R joignant des paires différentes de cotés opposés. Alors $\alpha(I) \cap \beta(I) \neq \emptyset$.

Démonstration : On peut supposer $R = [-1, 1] \times [-1, 1]$ et $\alpha, \beta : [-1, 1] \rightarrow R$.

$$\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s)) \qquad \beta(s) = (\beta_1(s), \beta_2(s))$$

Par l'absurde, on suppose que $\alpha(I) \cap \beta(I) = \emptyset$. On pose :

$$N(s, t) = \max_{i=1,2} \{ |\alpha_i(s) - \beta_i(s)| \mid (s, t) \in [-1, 1]^2 \} > 0 \text{ par hypothèse}$$

On définit :

$$F : \begin{cases} [-1, 1]^2 & \longrightarrow & [-1, 1]^2 \\ (s, t) & \longmapsto & \frac{1}{N(s,t)}(\beta_1(t) - \alpha_1(s), \beta_2(t) - \alpha_2(s)) \end{cases}$$

Comme $\exists \phi : D^2 \xrightarrow{\sim} [-1, 1]^2$ un homéomorphisme, $\phi^{-1} \circ F \circ \phi$ a un point fixe x , donc F a aussi un point fixe $y = \phi(x)$. L'image de F est constitué de couple de la forme $(\pm 1, t)$ et $(s, \pm 1)$. On suppose par exemple que $y = (s_0, t_0)$ avec $s_0 = \pm 1$. Alors

$$(\pm 1, t_0) = (s_0, t_0) = \underbrace{N(s_0, t_0)}_{>0} F(s_0, t_0) = (\beta_1(t_0) - \alpha_1(\pm 1), \beta_2(t_0) - \alpha_2(\pm 1))$$

Or $\alpha_1(1) = 1$ et $\alpha_1(-1) = -1$ et $\beta_1(t_0) \in [-1, 1]$ donc le signe de $\beta_1(t_0) - \alpha_1(s_0)$ est celui de ∓ 1 d'où l'absurdité.

2.3 Théorème de Van Kampen

2.3.1 Groupes libres et sommes amalgamées

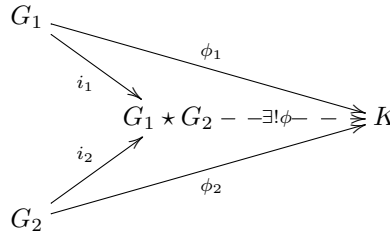
Groupes libres :

Définition 2.8. Soient G_1 et G_2 deux groupes. Leur produit libre $G_1 \star G_2$ est le groupe défini par l'ensemble des mots du type $a_1 \dots a_n$ avec $a_i \in G_1 \setminus \{e\} \cup G_2 \setminus \{e\}$ tel que si $a_i \in G_1$ alors $a_{i+1} \in G_2$ et inversement ainsi que le mot vide noté "e". Le produit de deux éléments $a_1 \dots a_n$ et $b_1 \dots b_m$ est donné par :

- ▷ $a_1 \dots a_{n-1} a_n b_1 b_2 \dots b_m$ si a_n et b_1 n'appartiennent pas au même groupe.
- ▷ $a_1 \dots a_{n-1} c b_2 \dots b_m$ avec $c = a_n b_1$ si les deux éléments appartiennent au même groupe.
- ▷ Si $a_n = b_1^{-1}$ alors il s'agit du produit $(a_1 \dots a_{n-1})(b_2 \dots b_m)$ dans $G_1 \star G_2$ (définition récursive).
- ▷ Le mot vide est l'élément neutre à gauche et à droite pour ce produit.

Proposition 2.6 (universalité). Si $\phi_k : G_k \rightarrow K$ pour $k = 1, 2$ sont des morphismes de groupes alors il existe un unique $\phi : G_1 \star G_2 \rightarrow K$ tel que

$$\phi \circ i_k = \phi_k \quad \forall k = 1, 2$$



Démonstration :

Unicité : Si $a_1 \dots a_n \in G_1 \star G_2$ avec par exemple $\begin{cases} a_i \in G_1 & \text{pour } i \text{ pair} \\ a_i \in G_2 & \text{pour } i \text{ impair} \end{cases}$

Alors :

$$\begin{aligned} \phi(a_1 \dots a_n) &= \phi(a_1) \dots \phi(a_n) \\ &= \phi(i_1(a_1)\phi(i_2(a_2))) \dots \\ &= \phi_1(a_1)\phi_2(a_2) \dots \end{aligned}$$

bien déterminé.

Existence : La formule

$$\phi(a_1 \dots a_n) = \phi_1(a_1) \dots \phi_n(a_n)$$

définit bien un morphisme de groupes.

Définition 2.9 (Groupe libre). On appelle groupe libre à n générateurs le produit itéré $\overbrace{C \star (C \star (C \star \dots))}^{n \text{ fois}}$ où C est le groupe cyclique infini ($\simeq \mathbb{Z}$). Si t_1 désigne le générateur de la $i^{\text{ème}}$ copie de C le groupe libre est noté $\langle t_1, \dots, t_n \rangle$

Corollaire 2.3 (Propriété universelle). Si g_1, \dots, g_n sont des éléments d'un groupe G alors il existe un unique morphisme de groupe :

$$\phi : \langle t_1, \dots, t_n \rangle \rightarrow G$$

tel que $\phi(t_i) = g_i$ pour $i = 1, \dots, n$.

Corollaire 2.4. Les groupes de type fini sont les quotients de groupes libres.

Abélianisation : Si G est un groupe libre, on note $[G, G]$ le groupe des commutateurs de G , c'est à dire le sous-groupe de G engendré par les éléments de la forme $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$, $\alpha, \beta \in G$.

Proposition 2.7. $[G, G]$ est le plus petit sous-groupe normal H de G tel que G/H est abélien.

Démonstration :

- $[G, G] \triangleleft G$: Si $x \in G$ et $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} \in [G, G]$ alors $x\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}x^{-1} = (x\alpha x^{-1})(x\beta x^{-1})(x\alpha x^{-1})^{-1}(x\beta x^{-1})^{-1}$
- $G/[G, G]$ est abélien : $[\alpha][\beta][\alpha]^{-1}[\beta]^{-1} = \underbrace{[\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}]}_{\in [G, G]} = e$
- $[G, G]$ est minimal : Si G/H est abélien, $0 = [\alpha][\beta][\alpha]^{-1}[\beta]^{-1} = [\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}]$ et $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} \in H$. Donc $[G, G] \subset H$.

Corollaire 2.5. Soit $\phi : G \rightarrow K$ un morphisme de groupes, K un groupe abélien. Alors il existe un unique $\bar{\phi} : G/[G, G] \rightarrow K$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\phi} & K \\ \downarrow & \nearrow \exists! \bar{\phi} & \\ G/[G, G] & & \end{array}$$

Notation : Le quotient $G/[G, G]$ est souvent noté G_{ab} , c'est l'abélianisé de G .

Proposition 2.8. $\langle t_1, \dots, t_n \rangle_{ab} \simeq \mathbb{Z}^n$

Démonstration :

- ▷ $\exists! \phi : \langle t_1, \dots, t_n \rangle \rightarrow \mathbb{Z}^n$ telle que $\phi(t_i) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ avec un 1 à la $i^{\text{ème}}$ place. ϕ induit un homomorphisme $\bar{\phi} : \langle t_1, \dots, t_n \rangle_{ab} \rightarrow \mathbb{Z}^n$.
- ▷ On définit $\psi : \mathbb{Z}^n \rightarrow \langle t_1, \dots, t_n \rangle_{ab}$ comme l'unique morphisme de groupe abélien tel que :

$$\psi(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) = [t_i]$$

avec un 1 à la $i^{\text{ème}}$ place.

- ▷ Ces deux morphismes de groupes sont inverses l'un de l'autre.

Sommes amalgamées :

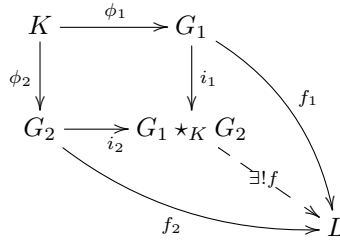
Définition 2.10. Soient $\phi_1 : K \rightarrow G_1$ et $\phi_2 : K \rightarrow G_2$. La somme amalgamée $G_1 \star_K G_2$ est le quotient de $G_1 \star G_2$ par le sous-groupe normal de $G_1 \star G_2$ engendré par les éléments $\phi_1(k)\phi_2(k)^{-1}$, $\forall k \in K$. Pour $l = 1, 2$, on note i_l la composée :

$$G_l \longrightarrow G_1 \star G_2 \xrightarrow{q} G_1 \star_K G_2$$

Proposition 2.9 (propriété universelle). *Si*

$$\begin{array}{ll} \phi_1 : K \rightarrow G_1 & \phi_2 : K \rightarrow G_2 \\ f_1 : G_1 \rightarrow L & f_2 : G_2 \rightarrow L \end{array}$$

des morphismes de groupes tel que $f_1 \circ \phi_1 = f_2 \circ \phi_2$ alors il existe un unique morphisme $f : G_1 \star_K G_2 \rightarrow L$ tel que $f \circ i_1 = f_1$ et $f \circ i_2 = f_2$



Démonstration :

Existence : f_1 et f_2 donnent $\tilde{f} : G_1 \star G_2 \rightarrow L$ (propriété universelle de groupe libre). Comme $f_1 \circ \phi_1 = f_2 \circ \phi_2$, \tilde{f} s'annule sur les éléments du type $\phi_1(k)\phi_2(k)^{-1}$, donc \tilde{f} passe au quotient en $f : G_1 \star_K G_2 \rightarrow L$. $f(i_1(g_1)) = \tilde{f}(g_1) = f_1(g_1)$ et de même pour i_2 et g_2 .

Unicité : exo.

2.3.2 Théorème de Van Kampen

Énoncé : Soit X un espace topologique, \mathcal{U}, \mathcal{V} deux ouverts de X tels que :

$$\begin{cases} X = \mathcal{U} \cup \mathcal{V} \\ x_0 \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \\ \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \end{cases} \text{ est connexe par arcs}$$

On note :

$$\begin{array}{ll} i_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{U} & i_{\mathcal{V}} : \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{V} \\ j_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{U} \cup \mathcal{V} & j_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{U} \cup \mathcal{V} \end{array}$$

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
\pi_1(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}, x_0) & \xrightarrow{\pi_1(i_{\mathcal{U}})} & \pi_1(\mathcal{U}, x_0) & & \\
\pi_1(i_{\mathcal{V}}) \downarrow & & \downarrow i_1 & \searrow \pi_1(j_{\mathcal{U}}) & \\
\pi_1(\mathcal{V}, x_0) & \xrightarrow{i_2} & \pi_1(\mathcal{U}, x_0) \star_{\pi_1(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})} \pi_1(\mathcal{V}, x_0) & & \\
& & \dashrightarrow \exists! \phi & & \\
& \searrow \pi_1(j_{\mathcal{V}}) & & \searrow & \\
& & & & \pi_1(X, x_0)
\end{array}$$

avec ϕ obtenu par la propriété universelle des sommes amalgamées.

Théorème 2.5. ϕ est un isomorphisme de groupe.

Démonstration de la surjectivité de ϕ :

▷ Il suffit de montrer que :

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi} &= \phi \circ q : \pi_1(\mathcal{V}) \star \pi_1(\mathcal{V}) \rightarrow \pi_1(X) \\
q &: \pi_1(\mathcal{U}) \star \pi_1(\mathcal{V}) \rightarrow \pi_1(\mathcal{U}) \star_{\pi_1(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})} \pi_1(\mathcal{V})
\end{aligned}$$

est surjective. Par construction, $\tilde{\phi}$ vérifie :

$$\pi_1(\mathcal{U}) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{U}) \star \pi_1(\mathcal{V}) \xrightarrow{\tilde{\phi}} \pi_1(X)$$

est égale à $\pi_1(j_{\mathcal{U}})$ (idem pour \mathcal{V}).

▷ Soit $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ un lacet de X de base $x_0 = \alpha_0 = \alpha_1$. En utilisant le lemme de Lebesgue, on découpe $[0, 1]$ en $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ tel que $\alpha([t_i, t_{i+1}]) \subset \mathcal{U}$ ou \mathcal{V} . On peut (quitte à éliminer certains t_i) supposer que $\alpha([t_i, t_{i+1}])$ est alternativement dans \mathcal{U} et dans \mathcal{V} . Pour tout t_j , $\alpha(t_j) \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ (on est alternativement dans \mathcal{U} puis dans \mathcal{V}). Comme $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ est connexe par arcs, on peut choisir β_j un chemin de $\alpha(t_j)$ à x_0 . On pose $\alpha_j = \beta_j^{-1} \alpha|_{[t_j; t_{j+1}]} \beta_{j+1}$. Et on a dans $\pi_1(X)$:

$$\begin{aligned}
[\alpha] &= [\alpha|_{[t_0, t_1]} \dots \alpha|_{[t_{n-1}, t_n]}] \\
&= [\beta_0^{-1} \alpha|_{[t_0, t_1]} \beta_1^{-1} \beta_1 \alpha|_{[t_1, t_2]} \dots \beta_{n-1}^{-1} \alpha|_{[t_{n-1}, t_n]} \beta_n] \\
&= [\alpha_0] \dots [\alpha_{n-1}] \text{ où les } \alpha_i \text{ sont alternativements dans } \mathcal{U} \text{ et } \mathcal{V} \\
&= \tilde{\phi}([\alpha_0] \dots [\alpha_{n-1}])
\end{aligned}$$

D'où la surjectivité.

Démonstration de l'injectivité de ϕ

▷ Soit $[\alpha_1] \dots [\alpha_n] \in \pi_1(\mathcal{U}) \star_{\pi_1(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})} \pi_1(\mathcal{V})$. Il faut montrer que si le lacet composé $\alpha_1(\dots \alpha_n)$ de X est homotopiquement trivial dans X alors $[\alpha_1] \dots [\alpha_n] = e$ dans la somme amalgamée. On part d'une homotopie à extrémités fixées H entre $\alpha = \alpha_1(\dots \alpha_n)$ et \mathcal{E}_{x_0} . D'après le lemme de Lebesgues, on peut découper $I \times I$ en petits carrés $C_{ij} = [s_i, s_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}]$ tels que $H(C_{ij}) \subset \mathcal{U}$ ou \mathcal{V} . Quitte à subdiviser, on peut supposer que le découpage $t_0 < \dots < t_n$ soit un raffinement de la subdivision induite par l'écriture de α comme une composée.

▷ On commence par considérer le cas où $H(s_i, t_j) = x_0, \forall i, j$. On note dans $C_{i,j}$:

$$c_{ij} = H|_{\{s_i\} \times [t_j, t_{j+1}]} \quad d_{ij} = H|_{[s_i, s_{i+1}] \times \{t_j\}}$$

On a par exemple $H(C_{ij}) \subset \mathcal{U}$, donc $c_{i,j} \cdot d_{i+1,j}$ est homotope à extrémités fixées à $d_{i,j} \cdot c_{i,j+1}$ dans \mathcal{U} .

Alors on a dans $\pi_1(\mathcal{U}) \star_{\pi_1(\mathcal{U} \cup \mathcal{V})} \pi_1(\mathcal{V})$, en supposant que $\begin{cases} \alpha_i : I \rightarrow \mathcal{U} & \text{pour } i \text{ impair} \\ \alpha_i : I \rightarrow \mathcal{V} & \text{pour } i \text{ pair} \end{cases}$

$$\begin{aligned} [\alpha_1] \dots [\alpha_n] &= i_2([c_{0,0}]_{\in \pi_1(\mathcal{U})}) i_1([c_{1,0}]_{\in \pi_1(\mathcal{V})}) \dots \\ &= i_2([\mathcal{E}_{x_0}][c_{0,1}][d_{1,0}]^{-1}) i_1([d_{1,0}][c_{1,1}][d_{2,0}]^{-1}) \dots \\ &= i_2([\mathcal{E}_{x_0}]) i_2([c_{0,1}]) \underbrace{i_2([d_{1,0}]^{-1}) i_1([d_{1,0}])}_{=e} i_1([c_{1,1}]) i_1([d_{2,0}]^{-1}) \dots \end{aligned}$$

En itérant le processus, on obtient : $[\alpha_1] \dots [\alpha_n] = i_2([\mathcal{E}_{x_0}]) i_1([\mathcal{E}_{x_0}]) \dots = e$

▷ Dans le cas général, on remplace l'homotopie H par une homotopie H' qui vérifie l'hypothèse favorable – le cas précédent. On va étendre H en une application $\tilde{H} : I^3 \rightarrow X$ et on prendra $H' = \tilde{H}|_{\{1\} \times I^2}$ (et $H' = \tilde{H}|_{\{0\} \times I^2}$). De manière précise, \tilde{H} est construite de la façon suivante :

1. On veut $\tilde{H}(1, s_i, t_j) = x_0$. Pour chaque (i, j) , on choisit un chemin γ_{ij} qui va de $H(s_i, t_j)$ à x_0 tel que γ_{ij} est à valeurs dans \mathcal{U} si $H(s_i, t_j) \in \mathcal{U}$, à valeurs dans \mathcal{V} sinon. On pose :

$$\begin{cases} \tilde{H}(r, s_i, t_j) = \gamma_{ij}(r) \\ \tilde{H}(0, s, t) = H(s, t) \end{cases}$$

2. On étend \tilde{H} à la face $C = [0, 1] \times \{s_i\} \times [t_j, t_{j+1}]$ en considérant une projection continue de la face q sur $D = [0, 1] \times \{s_i\} \times \{t_j\} \cup \{0\} \times \{s_i\} \times [t_j, t_{j+1}] \cup [0, 1] \times \{s_i\} \times \{t_{j+1}\}$ et en posant $\tilde{H} \circ q = \gamma_{ij} \uplus H \uplus \gamma_{i,j+1}$. On fait ensuite de même pour les faces $[0, 1] \times [s_i, s_{i+1}] \times \{t_j\}$.
3. \tilde{H} est maintenant défini sur des parallélépipèdes évidés privés de leur face “du haut”. On procède de même qu'auparavant en considérant une projection du parallélépipède sur son “bord” sur lequel \tilde{H} est déjà défini, puis en définissant \tilde{H} comme il faut.

Maintenant que \tilde{H} est construite, en regardant la restriction de \tilde{H} à la “face avant” $[0, 1] \times \{0\} \times [0, 1]$, on voit que $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont homotopes à extrémités fixées à $\beta_i = \tilde{H}|_{\{1\} \times \{0\} \times [t_{k_i}, t_{k_{i+1}}]}$

donc :

- $[\alpha_i] = [\beta_i]$ dans $\pi_1(\mathcal{U})$ ou $\pi_1(\mathcal{V})$ (selon que α soit à valeurs dans \mathcal{U} ou dans \mathcal{V})
- $[\beta_1] \dots [\beta_n] = e$ car $H' = \tilde{H}|_{\{1\} \times I^2}$ est une homotopie entre $\beta_1(\dots \beta_n)$ et \mathcal{E}_{x_0} vérifiant les hypothèses favorables du cas précédent.

Synthèse :

- ▷ On a le théorème de Van Kampen qui étant donné $X = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ avec $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ connexe par arcs permet de calculer $\pi_1(X)$ en fonction de $\pi_1(\mathcal{U}), \pi_1(\mathcal{V})$ et $\pi_1(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$.
- ▷ $\pi_1(S^1, 1) \simeq \mathbb{Z}$
- ▷ Si $x \in X$ et X est contractile, $\pi_1(X, x) = \{1\}$

2.4 Premières applications

2.4.1 $\pi_1(S^n), n \geq 2$

Une sphère S^n peut s'écrire comme la réunion de deux hémisphères H_N et H_S ouverts chacun homéomorphes à D^n . Si x est un point de l'équateur S^{n-1} , on a $\begin{cases} \pi_1(H_N, x) = \{1\} \\ \pi_1(H_S, x) = \{1\} \end{cases}$. L'intersection $H_N \cap H_S$ est connexe par arcs (c'est homéomorphe à $I \times S^{n-1}$ connexe par arcs car $n \geq 2$). Donc par le théorème de Van Kampen,

$$\{1\} \simeq \pi_1(H_N) \star \pi_1(H_S) \twoheadrightarrow \pi_1(S^n, x)$$

Proposition 2.10. $\pi_1(S^n) = \{1\}$ si $n \geq 2$.

Corollaire 2.6. \mathbb{R}^2 n'est pas homéomorphe à \mathbb{R}^n pour $n \neq 2$.

Démonstration :

▷ On sait déjà que $\mathbb{R}^2 \not\cong \mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2 \not\cong \mathbb{R}^1$ (en utilisant le π_0).

▷ Si $n \geq 3$, si on a un homéomorphisme $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ alors ϕ induit un homéomorphisme $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ donc on aurait un isomorphisme

$$\pi_1(\phi) : \underbrace{\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, x)}_{\simeq \pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}} \rightarrow \underbrace{\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{\phi(0)\}, \phi(x))}_{\simeq \pi_1(S^n) \simeq 0}$$

2.4.2 π_1 d'un bouquet d'espace

Définition 2.11. Un espace topologique pointé (X, x_0) est correctement pointé s'il existe :

- ▷ Un voisinage ouvert \mathcal{V} de x_0
- ▷ Une application $H : \mathcal{V} \times I \rightarrow \mathcal{V}$ continue telle que

$$\begin{cases} H(x, 1) = x & \forall x \in \mathcal{V} \\ H(x, 0) = x_0 & \forall x \in \mathcal{V} \\ H(x_0, t) = x_0 & \forall t \in I \end{cases}$$

Par exemple : Si x_0 admet un voisinage homéomorphe à D^n alors (X, x_0) est correctement pointé.

Théorème 2.6. Soient (X_1, x_1) et (X_2, x_2) des espaces topologiques correctement pointés. Les morphismes de groupes $\pi_1(X_i, x_i) \rightarrow \pi_1(X_1 \vee X_2, x_0)$ – où x_0 est le point de recollement de x_1 et x_2 – induits par les inclusions $X_i \hookrightarrow X_1 \vee X_2$, induisent un isomorphisme entre $\pi_1(X_1, x_1) \star \pi_1(X_2, x_2)$ et $\pi_1(X_1 \vee X_2, x_0)$.

Démonstration :

- Soit \mathcal{V}_{x_2} un voisinage de x_2 dans X_2 vérifiant les hypothèses de la définition. Alors l'inclusion $i : X_1 \hookrightarrow X_1 \cup \mathcal{V}_{x_2} \subset X_1 \wedge X_2$ est une équivalence d'homotopie.
- De même $X_2 \hookrightarrow X_2 \cup \mathcal{V}_{x_1}$ est aussi une équivalence d'homotopie.
- donc $\pi_1(X_1) \star \pi_1(X_2) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X_1 \cup \mathcal{V}_{x_2}) \star \pi_1(X_2 \cup \mathcal{V}_{x_1})$
- et $\pi_1(X_1 \cup \mathcal{V}_{x_2}) \star \pi_1(X_2 \cup \mathcal{V}_{x_1}) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X_1 \wedge X_2)$ est un isomorphisme par Van Kampen.

Par exemple : $\pi_1(\bigvee_{i=1}^n S^1) = \langle t_1, \dots, t_n \rangle$. En particulier $A \sim O$, $B \sim \infty$, $C \sim \cdot$ donc ils ne sont pas homéomorphes.

2.5 Complexes cellulaires finis et surfaces

2.5.1 Attachement d'une cellule à un espace topologique

Idée : Attacher une cellule de dimension n à un espace topologique X , c'est recoller une copie de D^n à X via $f : S^{n-1} \rightarrow X$.

Concrètement : Soit X un espace topologique, soit $f : S^{n-1} \rightarrow X$ continue

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{\quad} & D^n \\ f \downarrow & & \downarrow j_{D^n} \\ X & \xrightarrow{j_X} & X \cup_{S^{n-1}} D^n \end{array}$$

$X \cup_{S^{n-1}} D^n$ est souvent noté $X \cup_f D^n$, c'est l'espace obtenu en recollant X et D^n le long de $S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ et $f : S^{n-1} \rightarrow X$.

Proposition 2.11.

1. (a) $X \cup_{S^{n-1}} D^n = j_X(X) \cup j_{D^n}(\overset{\circ}{D}^n)$ $\overset{\circ}{D}^n = D^n/S^{n-1}$
(b) $j_X(X)$ est un fermé de $X \cup_{S^{n-1}} D^n$
(c) $j_{D^n}(\overset{\circ}{D}^n)$ est un ouvert de $X \cup_{S^{n-1}} D^n$
(d) $j_X(X) \cap j_{D^n}(\overset{\circ}{D}^n) = \emptyset$
2. j_X induit un homéomorphisme $X \xrightarrow{\sim} j_X(X)$
3. j_{D^n} induit un homéomorphisme $\overset{\circ}{D}^n \rightarrow j_{D^n}(\overset{\circ}{D}^n)$
4. X est séparé $\iff X \cup_{S^{n-1}} D^n$ est séparé

Démonstration :

1. $X \cup_{S^{n-1}} D^n = X \amalg D^n / \mathcal{R}$ où \mathcal{R} est la relation d'équivalence engendrée par $x \mathcal{R} f(x)$, $x \in S^{n-1} = \partial D^n$
 - (a) Soit $[z] \in X \cup_f D^n$. Si $z \in X$ ou $\overset{\circ}{D}^n$, c'est bon. Il suffit de traiter le cas $z \in S^{n-1}$. Mais $[z] = [f(z)]$ et $f(z) \in X$.
 - (b) $j_X(X)$ fermé dans $X \cup_f D^n \iff q^{-1}(j_X(X))$ fermé dans $X \amalg D^n \iff X \amalg f^{-1}(X)$ fermé dans $X \amalg D^n$: ok.
 - (c) $j_{D^n}(\overset{\circ}{D}^n)$ ouvert dans $X \cup_f D^n \iff q^{-1}(j_{D^n}(\overset{\circ}{D}^n))$ ouvert dans $X \amalg D^n \iff \emptyset \amalg \overset{\circ}{D}^n$ ouvert dans $X \amalg D^n$: ok.
 - (d) Si $\alpha \in j_X(X) \cap j_{D^n}(\overset{\circ}{D}^n)$, il existe $x \in X$ tel que $\alpha = [x]$ et $d \in \overset{\circ}{D}^n$ tel que $\alpha = [d]$. De là, $x \mathcal{R} d$: absurde.

$$2. j_X \text{ est la composée } \begin{array}{ccc} X \hookrightarrow X \amalg D^n & \xrightarrow{q} & X \cup_{S^{n-1}} D^n \\ & \searrow^{j_X} & \nearrow \end{array}$$

$$\triangleright j_X(x) = j_X(y) \iff \begin{cases} \exists s \in S^{n-1} \text{ et } t \in S^{n-1} \\ x = f(s) \\ y = f(t) \\ i(s) = i(t) \quad i : S^{n-1} \rightarrow D^n \end{cases} \quad \text{donc } s = t, x = y \text{ et } j_X \text{ induit une bijection}$$

continue de X sur $j_X(X)$

$\triangleright j_X$ est fermée : Soit $F \subset X$ un fermé, F est alors fermé dans $X \amalg D^n$ et $F \amalg \underbrace{f^{-1}(F)}_{q^{-1}(j_X(F))}$ est un fermé

de $X \amalg D^n$ donc $j_X(F)$ est un fermé de $j_X(X)$.

$\triangleright j_X$ induit donc un homéomorphisme sur son image.

3. se fait de la même manière que (2).
4. \iff est évident, \implies en exercice (indication : séparer 4 cas selon la définition de la relation d'équivalence employée pour le recollement).

Proposition 2.12. Soit X un espace topologique connexe par arcs, $f : S^{n-1} \rightarrow X$ continue et $Y = X \cup_f D^n$

Si $n \geq 3$ Alors l'injection $X \hookrightarrow Y$ induit un isomorphisme au niveau des groupes fondamentaux.

Si $n = 2$ l'injection $X \hookrightarrow Y$ induit une surjection $\pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, x_0)$ et le noyau est le sous-groupe normal engendré par $[f] \in \pi_1(X, x_0)$.

Devinette : Que se passe-t-il si $n = 1$?

Démonstration :

▷ On suppose $n \geq 2$, on écrit $Y = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ où

$$\begin{cases} \mathcal{V} = j_{D^n}(\mathcal{V}') & \text{et } \mathcal{V}' \text{ est la boule ouverte de } D^n \text{ de centre } 0 \text{ et de rayon } \frac{1}{2} \\ \mathcal{U} = q(X \coprod \coprod \mathcal{U}') & \text{où } \mathcal{U}' \text{ est le complémentaire de la boule fermée de centre } 0 \text{ et de rayon } \frac{1}{4} \end{cases}$$

On applique Van Kampen :

- $\mathcal{V} \xrightarrow{j_{D^n}} \mathcal{V}'$ qui est contractile donc $\pi_1(\mathcal{V}, x_0) = \{1\}$
- $X \hookrightarrow \mathcal{U}$ est une équivalence d'homotopie.
- $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \xrightarrow{j_{D^n}} \mathcal{U}' \cap \mathcal{V}'$ est une couronne dans D^n donc est connexe par arcs (puisqu'il a le type d'homotopie de S^{n-1} , connexe par arcs pour $n \geq 2$)

D'après Van Kampen,

$$\pi_1(X) = \pi_1(\mathcal{U}, x_0) \star \{1\} \xrightarrow{\pi_1(X \hookrightarrow Y)} \pi_1(Y)$$

se factorise en un isomorphisme

$$\pi_1(X) \star_{\pi_1(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})} \{1\} \rightarrow \pi_1(Y)$$

Si $n \geq 3$ $\pi_1(S^{n-1}, x_0) = \{1\}$ donc $\pi_1(\hookrightarrow)$ est un isomorphisme

Si $n = 2$ $\pi_1(S^1, x_0) = \mathbb{Z}$ donc $\pi_1(\mathcal{U}, x_0) \star_{\pi_1(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})} \{1\} = \pi_1(X, x_0) / \langle [f] \rangle$

2.5.2 Espaces cellulaires finis (CW-complexes finis)

Définition 2.12. Un CW complexe fini est un espace topologique X muni d'une filtration $X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n = X$ telle que :

- X_0 est un sous ensemble fini
- X_k s'obtient de X_{k-1} en recollant un nombre fini de cellules de dimension k

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\alpha \in A_k} S_\alpha^{k-1} & \xrightarrow{\quad} & \coprod_{\alpha \in A_k} D_\alpha^k \\ \downarrow \coprod_{\alpha} f_\alpha & & \downarrow \\ X_{k-1} & \xrightarrow{\quad} & X_k = X_{k-1} \cup_{\coprod_{\alpha} f_\alpha} (\coprod D^k) \end{array}$$

Remarque 2.5.1. On peut recoller les cellules les unes après les autres :

$$X_{k+1} = ((X_k \cup_{f_{\alpha_1}} D^{k+1}) \cup_{f_{\alpha_2}} D^{k+1}) \cup \dots$$

Vocabulaire : Le sous espace X_k s'appelle le k -squelette de X . L'entier n tel que $X_n = X$ s'appelle la dimension de X .

Exemples :

1. un graphe fini est un CW-complexe fini de dimension 1 (les sommets sont des 0-cellules et les arrêtes de 1-cellules)
2. S^n peut être vue comme un CW-complexe de plusieurs façons (= avec plusieurs filtrations) :
 - ▷ $(S^n)_0 = \{s\}, (S^n)_i = (S^n)_{i-1} \forall 1 \leq i < n, (S^n)_n = S^n$
 - ▷ $(S^n)_0 = \{n, s\}, (S^n)_k \simeq S^k$ en employant $2(n+1)$ cellules.

Proposition 2.13. Soit X un CW-complexe fini. Alors l'inclusion $X_2 \hookrightarrow X$ induit un isomorphisme au niveau des π_1 .

Démonstration : X s'obtient à partir de X_2 en recollant des cellules de dimension ≥ 3 .

Définition 2.13. Un groupe G est de présentation fini s'il est le quotient d'un groupe libre fini par un sous-groupe normal engendré par un nombre fini d'éléments.

Proposition 2.14. Soit G un groupe de présentation finie. Alors G est le groupe fondamental d'un CW-complexe fini.

Démonstration :

▷ Un groupe libre est le groupe fondamental d'un bouquet de S^1 .

▷ $G = \langle t_1, \dots, t_n \rangle / N$, N engendré par $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

Alors $G = \pi_1(X, x_0)$ où $X = (\dots ((\bigvee_n S^1) \cup_{f_1} D^2) \dots) \cup_{f_m} D^2$ où $f_i : S^1 \rightarrow \bigvee_{k=1}^n S^1$ est tel que $[f_i] = \alpha_i$ dans $\bigvee_{k=1}^n S^1$.

2.6 Surfaces

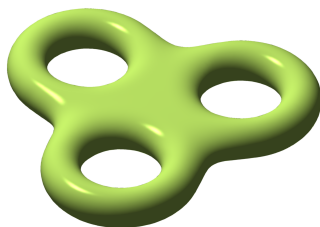
2.6.1 Dessin

La surface réelle orientable de genre g est la variété topologique de dimension 2 suivante :

$g = 0$: La sphère

$g = 1$: Le tore

$g = n$: Le tore à n trous



2.6.2 Définition

Exemple de la surface de genre 3 : On découpe afin d'obtenir une sphère à 3 trous et 3 tores à un trou.

Définition 2.14. La surface compacte orientable de genre $g \geq 1$ S_g est le quotient du polygone à $4g$ cotés P_{4g} par la relation d'identification $c \sim c^{-1}$ lorsque l'on étiquette les arrêtes du polygone avec le mot $(b_i a_i b_i^{-1} a_i^{-1})_{1 \leq i \leq g}$.

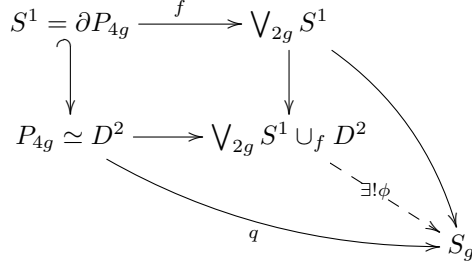
Proposition 2.15. S_g est bien une surface compacte.

Démonstration en exercice.

2.6.3 Structure cellulaire

Proposition 2.16. Pour $g \geq 1$, S_g est homéomorphe à l'espace obtenu en attachant une cellule de dimension 2 à $\bigvee_{1 \leq i \leq 2g} S^1$ via une application $f : S^1 = \partial D^2 \rightarrow \bigvee_{1 \leq i \leq 2g} S^1$ telle que $f(\text{générateur de } S^1) = b_1 a_1 b_1^{-1} a_1^{-1} b_2 a_2 b_2^{-1} a_2^{-1} \dots b_g a_g b_g^{-1} a_g^{-1}$ où a_i, b_i sont des générateurs des π_1 des $2g$ copies de S^1 dans $\bigvee_{2g} S^1$

Démonstration : $q : P_{4g} \rightarrow S_g$ induit $f : S^1 = \partial P_{4g} \rightarrow q(\partial P_{4g}) = \bigvee_{2g} S^1$



Par la proposition universelle du recollement, il existe un unique $\phi : (\bigvee_{2g} S^1) \cup_f D^2 \rightarrow S_g$. Par définition des applications, ϕ est continue et bijective. Entre 2 compacts, c'est un homéomorphisme.

Corollaire 2.7. $\pi_1(S_g) = \langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 \rangle$

3 Revêtements

3.1 Définitions – exemples – questions

Définition 3.1. Un revêtement est une application $p : E \rightarrow B$ telle que tout point $b \in B$ admet un voisinage (ouvert) \mathcal{U} satisfaisant la condition suivante : Il existe un espace discret F_b et un homéomorphisme $\Phi : p^{-1}(\mathcal{U}) \rightarrow F_b \times \mathcal{U}$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} F_b \times \mathcal{U} & \xleftarrow[\Phi]{\sim} & p^{-1}(\mathcal{U}) \\ & \searrow pr_{\mathcal{U}} & \downarrow p \\ & & \mathcal{U} \end{array}$$

On peut voir la définition précédente comme $F_b \times \mathcal{U}$ représentant une “pile d'assiette” de \mathcal{U} isomorphe à $p^{-1}(\mathcal{U})$ tel que p et $pr_{\mathcal{U}}$ aient la “même” action.

Vocabulaire :

- B est la base du revêtement
- E est l'espace total
- $F_b = p^{-1}(b)$ est la fibre au dessus de $b \in B$
- Les ouverts \mathcal{U} sont les “ouverts trivialisant”
- Les copies de \mathcal{U} dans $F_b \times \mathcal{U}$ sont les feuillettes au dessus de \mathcal{U}
- p s'appelle un revêtement de B

Définition 3.2. Si p, p' sont deux revêtements à base B , un morphisme de p vers p' est une application continue

$$h : \underbrace{E}_{\text{espace total de } p} \rightarrow \underbrace{E'}_{\text{espace total de } p'}$$

tel que le diagramme commute :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{h} & E' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & & B \end{array}$$

Vocabulaire : h est un isomorphisme s'il existe h' de p' vers p tel que $h' \circ h = Id_E$ et $h \circ h' = Id_{E'}$. On note :

- $Hom(p, p')$ les morphismes de revêtement de p vers p'
- $Isom(p, p')$ les isomorphismes de p vers p'
- $Aut(p)$ les isomorphismes de p vers lui même

Exemples :

1. Si F est un espace topologique discret, B un espace topologique quelconque :

$$F \times B \xrightarrow{pr_B} B$$

est un revêtement. Les revêtements de ce type sont les *revêtements triviaux*.

2. Si $p : E \rightarrow B$ est un revêtement et $B' \subset B$ alors $p : p^{-1}(B') \rightarrow B'$ est un revêtement

3. $exp : \begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ z & \mapsto e^{2i\pi z} \end{cases}$ est un revêtement

En effet, :

- exp est un homéomorphisme local (c'est à dire $\forall z_0 \in \mathbb{C}$, il existe \mathcal{U} ouvert contenant z_0 tel que $exp : \mathcal{U} \rightarrow exp(\mathcal{U})$ est un homéomorphisme via le théorème d'inversion locale)
- Si $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, exp est surjective; on peut choisir z_0 tel que $exp(z_0) = b$. On peut ensuite choisir $\mathcal{U}_0 \ni z_0$ tel que $exp|_{\mathcal{U}_0}$ est un homéomorphisme. Quitte à rétrécir \mathcal{U}_0 , on peut supposer que $\forall n \in \mathbb{Z}, n + \mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_0 = \emptyset$. Alors V est un ouvert contenant b , $exp^{-1}(V) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}_0 + n$ et $\Phi : \begin{cases} \mathbb{Z} \times \mathcal{U}_0 & \rightarrow exp^{-1}(V) \\ (n, z) & \mapsto z + n \end{cases}$ est un homéomorphisme fournissant une trivialisatoin pour V .

4. De même, $\phi_n : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{0\} & \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ z & \mapsto z^n \end{cases}$ est un revêtement

5. Revêtements et actions de groupes :

Proposition 3.1. Soit G un groupe discret agissant continument sur un espace topologique E . On dit que l'action est "totalement discontinue" si $\forall x \in E$, il existe \mathcal{U} ouvert contenant x tel que si $g\mathcal{U} \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ alors $g = e$. Dans ce cas, la projection quotient $E \xrightarrow{q} E/G$ est un revêtement.

Démonstration : Si $[x] \in E/G$, alors il existe \mathcal{U} ouvert de E contenant x tel que $g\mathcal{U} \cap \mathcal{U} \neq \emptyset \implies g = e$

- Alors $G \cdot \mathcal{U} = \bigcup_{g \in G} g\mathcal{U}$ ouvert . $q(G \cdot \mathcal{U})$ est un ouvert de E/G contenant $[x]$ et q réalise un homéomorphisme de \mathcal{U} sur $q(G\mathcal{U})$.
- $V = q(G \cdot \mathcal{U})$ est un ouvert trivialisant car :

$$\Phi : \begin{cases} \overbrace{G \times \mathcal{U}}^{\simeq G \times V} & \rightarrow q^{-1}(V) \\ (g, y) & \mapsto gy \end{cases}$$

est un homéomorphisme et on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G \times V & \xrightarrow{\Phi} & q^{-1}(V) \\ & \searrow V & \swarrow q \\ & & V \end{array}$$

Questions :

1. Peut-on classifier les revêtements? Par exemple, existe-t-il d'autres revêtements de base $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ que exp ou ϕ_n

2. Problème de relèvement :

Définition 3.3. Soit $p : E \rightarrow B$ un revêtement et $f : X \rightarrow B$ une application continue. Un relèvement de f à travers p est une application continue $\bar{f} : X \rightarrow E$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ \bar{f} \nearrow & \downarrow p & \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Existe-t-il toujours des relèvements et combien en existe-t-il?

Par exemple, le problème du logarithme : Soit \mathcal{U} un ouvert de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ On appelle détermination continue du logarithme sur \mathcal{U} une application continue $\log : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ \log \nearrow & \downarrow exp & \\ \mathcal{U} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C} \setminus \{0\} \end{array}$$

Remarque 3.1.1. Une détermination continue du log est toujours analytique.

3. Peut-on déterminer $Aut(p)$ en général?

4. Peut-on utiliser les revêtements pour calculer le π_1 ?

3.2 Relèvement des applications

On se fixe un revêtement $p : E \rightarrow B$.

3.2.1 Unicité des relèvements

Proposition 3.2. X est un espace topologique connexe. Deux relèvements de $f : X \rightarrow B$ qui coïncident en un point sont égaux.

Démonstration : Soient $f_0, f_1 : X \rightarrow E$ deux relèvements de f qui coïncident en un point. $F = \{x \in X \mid f_0(x) = f_1(x)\}$ est non vide.

- F est ouvert : Si $x \in X, f_0(x) = f_1(x) = y$. Alors, il existe $\mathcal{U} \subset B$ un ouvert trivialisant contenant $p(y)$.

$$\begin{array}{ccc} & p^{-1}(\mathcal{U}) = \coprod_i \mathcal{U}_i & \\ f_1 \nearrow & \downarrow p & \\ x & \xrightarrow{f} & \mathcal{U} \\ f_0 \nearrow & & \end{array}$$

Soit \mathcal{U}_{i_0} le feuillet contenant y , alors sur $f_0^{-1}(\mathcal{U}_{i_0}) \cap f_1^{-1}(\mathcal{U}_{i_0}) \ni x$ ouvert, on a :

$$f_0 = \left(p|_{\mathcal{U}_{i_0}} \right)^{-1} \circ f = f_1$$

car p réalise un homéomorphisme de \mathcal{U}_{i_0} sur \mathcal{U} .

- F est fermé $\iff E \setminus F$ est ouvert. Soit x tel que $f_0(x) \neq f_1(x)$. Soit \mathcal{U} un ouvert trivialisant contenant $f(x)$. \mathcal{U}_{i_j} le feuillet de $p^{-1}(\mathcal{U})$ contenant $x_j = f_j(x)$. Sur $f_0^{-1}(\mathcal{U}_{i_0}) \cap f_1^{-1}(\mathcal{U}_{i_1}) \neq \emptyset$, on a $f_0 \neq f_1$.

- Par connexité, $X = F$.

3.2.2 Relèvements des homotopies

Proposition 3.3. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow B$ un chemin, et $x \in E$ tel que $p(x) = \gamma(a)$. Alors il existe un (unique) chemin $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow E$ relevant γ , tel que $\tilde{\gamma}(a) = x$.

Démonstration : On a déjà l'unicité, il ne reste plus qu'à montrer l'existence (cf démonstration pour exp dans la partie 1). En utilisant le lemme de Lebesgue, on trouve une subdivision $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ tel que $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\gamma([t_i, t_{i+1}])$ est inclus dans un ouvert trivialisant. On construit $\tilde{\gamma}$ sur $[a, t_i]$ par récurrence :
 - Sur $[a, t_0]$, $\tilde{\gamma}(t) = x$
 - Si $\tilde{\gamma}$ est construite sur $[a, t_i]$, alors $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset \mathcal{U}$ un ouvert trivialisant. Soit \mathcal{U}_{i_0} le feuillet de $p^{-1}(\mathcal{U})$ qui contient $\tilde{\gamma}(t_i)$. p réalise un homéomorphisme de \mathcal{U}_{i_0} sur \mathcal{U} donc on peut prendre

$$\tilde{\gamma}|_{[t_i, t_{i+1}]} = \left(p|_{\mathcal{U}_{i_0}} \right)^{-1} \circ \gamma$$

Théorème 3.1 (relèvement des homotopies). Soit $H : X \times I \rightarrow B$ continue, $f_0 : X \rightarrow B$ donnée par $f_0(x) = H(x, 0)$. Supposons qu'il existe un relèvement \tilde{f}_0 de f_0 à travers p . Alors, il existe un relèvement \tilde{H} de H tel que $\tilde{H}(x, 0) = \tilde{f}_0(x)$. Ce relèvement est unique.

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} & \xrightarrow{\tilde{f}_0} & E \\ \downarrow & \nearrow \exists! \tilde{H} & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

Démonstration : L'unicité a déjà été traitée auparavant. Pour l'existence : $\forall x \in X$, on pose

$$\gamma_x : \begin{cases} I & \longrightarrow & B \\ t & \longmapsto & H(x, t) \end{cases}$$

Il existe un unique chemin $\tilde{\gamma}_x : I \rightarrow E$ relevant γ_x et tel que $\tilde{\gamma}_x(0) = \tilde{f}_0(x)$. On pose $\tilde{H}(x, t) = \tilde{\gamma}_x(t)$. Alors \tilde{H} vérifie toutes les conditions du théorème, sauf peut-être la continuité.

Montrons que \tilde{H} est continue :

Il nous suffit de montrer que pour tout $x \in X$ il existe un voisinage V_x de x tel que $\tilde{H}|_{V_x \times I}$ est continue. On se fixe $x \in X$, et soit $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille d'ouverts trivialisant recouvrant B . En utilisant le lemme de Lebesgue (il y a un peu de boulot pour vérifier les hypothèses), on peut trouver un ouvert $V_x \ni x$ et une subdivision

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$$

de I telle que $H(V_x \times [t_i, t_{i+1}])$ soit contenu dans un \mathcal{U}_α . Alors $\tilde{H}|_{V_x \times I}$ est continue. En effet, il suffit de montrer que $\tilde{H}|_{V_x \times [0, t_i]}$ est continue $\forall i$. On démontre cela par récurrence. La situation est donnée par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & & \text{espace discret} \\ & & \widehat{F} \\ & \nearrow p^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \simeq \mathcal{U}_\alpha \times & \downarrow \\ V_x \times [t_i, t_{i+1}] & \xrightarrow{\tilde{H}} & \mathcal{U}_\alpha \\ & \xrightarrow{H} & \mathcal{U}_\alpha \end{array}$$

pour $i = 0$, $\tilde{H}|_{V_x \times [0, 0]} = \tilde{f}_0$ est continue. L'hérédité découle du lemme suivant.

Lemme 3.1. Soit $H : X \times [a, b] \rightarrow B$ continue, $\tilde{H} : X \times [a, b] \rightarrow B \times F$, F discret tels que :

- $\tilde{H}|_{X \times \{a\}}$ est continue
- $\tilde{H}|_{\{x\} \times [a,b]}$ est continue $\forall x \in X$
- $H = pr_B \circ \tilde{H}$

Alors \tilde{H} est continue.

3.3 Applications du théorème de relèvement des homotopies

1. Le théorème nous dit que l'existence d'un relèvement de f_0 ne dépend que de la classe d'homotopie de f_0 . C'est à dire si $f_0 \sim f_1$, alors f_0 admet un relèvement $\iff f_1$ admet un relèvement.
2. Soit α et β sont deux lacets de E basés en $x \in E$. On suppose que $p \circ \alpha$ et $p \circ \beta$ sont homotopes à extrémités fixées dans B via $H : I \times I \rightarrow B$. En appliquant le théorème à H , on produit une homotopie \tilde{H} entre α et β à extrémités fixées.

Corollaire 3.1. $\forall x \in E, \pi_1(p) : \pi_1(E, x) \rightarrow \pi_1(B, p(x))$ est injective.

3. Soient $x, y \in B$ et $F_x = p^{-1}(x), F_y = p^{-1}(y)$ les fibres correspondantes. Supposons qu'il existe un chemin $\gamma : I \rightarrow B$ de x à y . On peut appliquer le théorème de relèvement au diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 F_x \times \{0\} & \xrightarrow{\quad} & E \\
 \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\
 F \times I & \xrightarrow{H: (z,t) \mapsto \gamma(t)} & B
 \end{array}$$

On obtient $\tilde{H} : F_x \times I \rightarrow E$. Donc en restreignant à $F_x \times \{1\}$, on obtient une application $\phi_\gamma : F_x \rightarrow F_y$. De même, γ^{-1} donne une application $\phi_{\gamma^{-1}} : F_y \rightarrow F_x$ et $\phi_\gamma \circ \phi_{\gamma^{-1}} = id_{F_y}$ et $\phi_{\gamma^{-1}} \circ \phi_\gamma = id_{F_x}$.

Remarque 3.3.1. Une application vérifiant le théorème de relèvement s'appelle une fibration (se généralise à autre chose que des revêtements).

Corollaire 3.2. Dans un revêtement $p : E \rightarrow B$, de base B connexe par arcs, toutes les fibres $F_b, b \in B$ ont même cardinal.

Définition 3.4. Un revêtement dont toutes les fibres sont de cardinal $k \in \mathbb{N}^*$ s'appelle un revêtement à k feuillets.

3.4 Théorème de relèvement des applications

Notation : Si $f : X \rightarrow Y$ continue, $x \in X$, on notera $p_\# \pi_1(X, x)$ à la place de $\pi_1(p)(\pi_1(X, x))$

Définition 3.5. Un espace X est localement connexe par arcs s'il admet une base d'ouverts connexes par arcs.

Par exemple, les espaces cellulaires et les variétés topologiques sont localement connexe par arcs .

Théorème 3.2. Soit $p : E \rightarrow B$ un revêtement et X un espace connexe par arcs et localement connexe par arcs. Soit $f : X \rightarrow B$ continue, $x_0 \in X$ et $y_0 \in E$. Il existe un relèvement \tilde{f} de f tel que $\tilde{f}(x_0) = y_0 \iff f_\# \pi_1(X, x_0) \subset p_\# \pi_1(E, y_0)$ (inclusion de sous-groupes de $\pi_1(B, f(x_0))$).

Remarque 3.4.1. La condition est nécessaire ; en effet, si \tilde{f} existe on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 & & (E, y_0) \\
 & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\
 (X, x_0) & \xrightarrow{f} & (B, f(x_0))
 \end{array}$$

donc $\pi_1(f) = \pi_1(p \circ \tilde{f}) = \pi_1(p) \circ \pi_1(\tilde{f})$ donc $Im(\pi_1(f)) \subset Im(\pi_1(p))$.

Remarque 3.4.2. Le relèvement est unique d'après la première section.

Exemple d'application :

Le problème du logarithme :

$$\begin{array}{ccc}
 & & \mathbb{C} \\
 & \nearrow \exists? \log & \downarrow \text{exp} \\
 x \in \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \{0\}
 \end{array}$$

Il existe une détermination continue du log sur \mathcal{U} si et seulement si l'inclusion $\mathcal{U} \hookrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ induit une application triviale $\pi_1(\mathcal{U}, x) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, x)$ (\star) .

En particulier : Si \mathcal{U} est simplement connexe, il existe une détermination continue du log sur \mathcal{U} .

Devinette : Trouvez un ouvert non simplement connexe vérifiant (\star) .

Démonstration : Il faut montrer que la condition est suffisante. Supposons donc $f_{\#}\pi_1(X, x_0) \subset p_{\#}\pi_1(E, y_0)$.

Analyse du problème : on veut construire $\tilde{f} : X \rightarrow E$, on pose $\tilde{f}(x_0) = y_0$. Pour tout $x \in X$, soit γ_x un chemin de X d'origine x_0 et d'arrivée x . Alors il existe un unique relèvement $\tilde{\gamma}_x$ de $f \circ \gamma_x$ tel que $\tilde{\gamma}_x(0) = y_0$. Donc, si \tilde{f} est un relèvement de f , on a nécessairement $\tilde{f}(x) = \tilde{\gamma}_x(1)$. Il reste à montrer que \tilde{f} est continue.

1. La construction de $\tilde{f}(x)$ ne dépend pas du chemin γ_x (reliant x_0 à x) choisi.

En effet, Si μ_x est un autre chemin $[\gamma_x \mu_x^{-1}] \in \pi_1(X, x_0)$. Par hypothèse : $f([\gamma_x \mu_x^{-1}]) \in p_{\#}\pi_1(E, y_0)$. Donc, il existe $\nu \in \mathcal{C}_{y_0, y_0}(E)$ tel que $f \circ (\gamma_x \mu_x^{-1})$ est homotope à $p \circ \nu$ à extrémités fixées via H . On applique le théorème de relèvement des homotopies à la situation :

$$\begin{array}{ccc}
 I \times \{0\} & \xrightarrow{\nu} & E \\
 \downarrow & \nearrow \exists! \tilde{H} & \downarrow p \\
 I \times I & \xrightarrow{H} & B
 \end{array}$$

$\tilde{H}|_{I \times \{1\}}$ est un relèvement de $f \circ (\gamma_x \mu_x^{-1}) = (f \circ \gamma_x)(f \circ \mu_x^{-1})$.

De plus, $H|_{\{0\} \times I}$ et $H|_{\{1\} \times I}$ sont constantes égales à x_0 . Donc $\tilde{H}|_{\{0\} \times I}$ et $\tilde{H}|_{\{1\} \times I}$ sont continues et à valeur dans la fibre discrète $p^{-1}(x_0)$. Donc elles sont constantes et valent y_0 .

Par unicité du relèvement des chemins :

$$\underbrace{\tilde{H}|_{I \times \{1\}} \cdot \widetilde{f \circ \mu_x}}_{= \widetilde{f \circ \mu_x}(1) \text{ en } 1} = \underbrace{\widetilde{f \circ \gamma_x}}_{= \widetilde{f \circ \gamma_x}(1) \text{ en } 1}$$

donc $\tilde{f}(x)$ reste inchangée seon que l'on utilise μ_x ou γ_x .

2. Continuité de \tilde{f} : Soit \mathcal{U} un ouvert trivialisant de B contenant $f(x)$. Soit $\mathcal{V} = f^{-1}(\mathcal{U})$, c'est un ouvert de X contenant x . Quitte à rétrécir \mathcal{V} on peut le supposer connexe par arcs (et contenant x). Alors

d'après l'étape précédente, pour tout $x' \in \mathcal{V}$, $\tilde{f}(x') = \widetilde{f \circ \gamma_{x'}}(1)$ où :

- $\gamma_{x'}$ désigne un chemin de \mathcal{V} d'origine x et d'extrémité x'
- $\widetilde{f \circ \gamma_{x'}}$ désigne le relèvement de $f \circ \gamma_{x'}$ tel que $\widetilde{f \circ \gamma_{x'}}(0) = \tilde{f}(x)$. La situation est donnée par :

$$\begin{array}{ccc}
 & & p^{-1}(\mathcal{U}) \\
 & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\
 x \in \mathcal{V} & \xrightarrow{f} & \mathcal{U}
 \end{array}$$

Soit \mathcal{U}_0 le feuillet de $p^{-1}(\mathcal{U})$ qui contient $\tilde{f}(x)$. Par la définition de \tilde{f} relative au point x , $\tilde{f}|_{\mathcal{V}}$ est à valeur dans \mathcal{U}_0 . Or p induit un homéomorphisme $p : \mathcal{U}_0 \rightarrow \mathcal{U}$ donc $\tilde{f} = \left(p|_{\mathcal{U}_0}\right)^{-1} \circ f$ est continue sur \mathcal{V} , donc continue en $x \in X$.

3.5 Monodromie et morphismes de revêtements

3.5.1 Monodromie

Soit $p : E \rightarrow B$ un revêtement, $b \in B$, $F_b = p^{-1}(b)$ la fibre au dessus de b , $x \in F_b$, $\gamma \in C_{b,b}(B)$ un lacet basé en b . On note $\widetilde{\gamma}_x$ le relevé de γ tel que $\widetilde{\gamma}_x(0) = x$. On a une application :

$$\widetilde{\mathcal{M}} : \begin{cases} F_b \times C_{b,b}(B) & \longrightarrow & F_b \\ (x, \gamma) & \longmapsto & \widetilde{\gamma}_x(1) \end{cases}$$

D'après le théorème de relèvement des homotopies, si γ et μ sont homotopes à extrémités fixées, alors $\widetilde{\gamma}_x(1) = \widetilde{\mu}_x(1)$ donc $\widetilde{\mathcal{M}}$ induit :

$$\mathcal{M} : \begin{cases} F_b \times \pi_1(B, b) & \longrightarrow & F_b \\ (x, [\gamma]) & \longmapsto & \widetilde{\gamma}_x(1) \end{cases}$$

Comme $(\widetilde{\gamma \cdot \mu})_x = \widetilde{\gamma}_x \cdot \widetilde{\mu}_{\widetilde{\gamma}_x(1)}$ on voit que \mathcal{M} est une action à droite de $\pi_1(B, b)$ sur F_b .

Définition 3.6. \mathcal{M} s'appelle la monodromie du revêtement.

Théorème 3.3. Soit $p : E \rightarrow B$ un revêtement, $b \in B$

1. Si $x \in F_b$,

$$\underbrace{Stab(x)}_{\text{stabilisateur de } x \text{ sous l'action de } \pi_1(B, b)} = p_{\#}\pi_1(E, x) \subset \pi_1(B, b)$$

2. Si E est connexe par arcs,

(a) l'action de $\pi_1(B, b)$ est transitive. En particulier, on a :

$$F_b \simeq p_{\#}\pi_1(E, x) \setminus \pi_1(B, b)$$

(isomorphisme compatible avec l'action de $\pi_1(B, b)$)

(b) Les stabilisateurs des points de F_b forment exactement une classe de conjugaison dans $\pi_1(B, b)$.

Démonstration :

1.

$$\begin{aligned} x[\gamma] = x &\iff \widetilde{\gamma}_x(1) = x \\ &\iff \widetilde{\gamma}_x \text{ est un lacet basé en } x \\ &\iff [\gamma] = p_{\#} \underbrace{[\widetilde{\gamma}_x]}_{\in \pi_1(E, x)} \end{aligned}$$

donc $Stab(x) = p_{\#}\pi_1(E, x) \subset \pi_1(B, b)$.

2. (a) Si $x, y \in F_b$, on peut trouver γ un chemin de E , d'origine x et d'extrémité y .

$$x \underbrace{[p \circ \gamma]}_{\text{lacet de } B \text{ basé en } b} = (p \circ \gamma)_x(1) = \gamma(1) = y$$

(b) Les stabilisateurs sont conjugués. Si $x[\gamma] = y$ alors $Stab(y) = Stab(x[\gamma]) = [\gamma]^{-1}Stab(x)[\gamma]$.

Comme l'action est transitive, les stabilisateurs sont conjugués. Si $H \subset \pi_1(B, b)$, $H = [\gamma]^{-1}Stab(x)[\gamma]$ donc $H = Stab(x[\gamma])$.

Corollaire 3.3. Soit $p : E \rightarrow B$ un revêtement avec E connexe par arcs. Supposons B simplement connexe. Alors p est un homomorphisme.

Démonstration : Comme l'action du groupe fondamental est transitive, les fibres n'ont qu'un élément donc p est bijective continue et p est un homéomorphisme local, donc ouverte.

Exemple d'emploi :

Proposition 3.4. *Si M est une variété différentiable simplement connexe, alors M est orientable.*

Démonstration : Le revêtement d'orientation de B est nécessairement trivial.

3.5.2 Morphismes de revêtements

Un morphisme de revêtements est équivalent à un relèvement de p_1 à travers p_2 .

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{h} & E_2 \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & & B \end{array}$$

Proposition 3.5. *Si E_1 est connexe, deux morphismes de revêtement qui coïncident en un point sont égaux (Unicité des relèvements).*

Un morphisme de revêtements

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{h} & E_2 \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & & B \end{array}$$

induit pour tout $b \in B$ une application

$$h_b : p_1^{-1}(b) \rightarrow p_2^{-1}(b)$$

Proposition 3.6. h_b est $\pi_1(B, b)$ -équivariante (i.e. : $h_b(x)[\gamma] = h_b(x[\gamma])$).

Démonstration :

$$\begin{aligned} h_b(x[\gamma]) &= h_b(\widetilde{\gamma_x}(1)) \\ &= (h_b \circ \widetilde{\gamma_x})(1) \\ &= \widetilde{\gamma_{h_b(x)}}(1) \\ &= h_b(x)[\gamma] \end{aligned}$$

Notation : “Un revêtement CALCA” est un revêtement où l'espace total et la base sont connexe par arcs.

Théorème 3.4 (de classification). *Soient $p_1 : E_1 \rightarrow B$ et $p_2 : E_2 \rightarrow B$ des revêtements CALCA, $b \in B$. On a une bijection :*

$$\Phi : \begin{cases} Hom(p_1, p_2) & \longrightarrow & Hom_{\pi_1(B, b)}(p_1^{-1}(b), p_2^{-1}(b)) \\ h & \longmapsto & h_b \end{cases}$$

$Hom_{\pi_1(B, b)}$ dénote les homomorphismes $\pi_1(B, b)$ -équivariants.

Démonstration :

- ▷ Φ est injective car deux morphismes de revêtements qui coïncident en un point sont égaux.
- ▷ Φ est surjective : Soit $g : p_1^{-1}(b) \rightarrow p_2^{-1}(b)$ $\pi_1(B, b)$ -équivariante, alors, $p_{1\#}\pi_1(E, x_0) \subset p_{2\#}\pi_1(E_2, g(x_0))$ (on choisit $x_0 \in p_1^{-1}(b)$, $Stab(x_0) \subset Stab(g(x_0))$ car g est $\pi_1(B, b)$ -équivariante). Donc, il existe un unique $h : E_1 \rightarrow E_2$ telle que $h(x_0) = g(x_0)$

$$\begin{array}{ccc} & & E_2 \\ & \nearrow h & \downarrow p_2 \\ E_1 & \xrightarrow{p_1} & B \end{array}$$

h_b et g coïncident en x_0 , donc en tout point car elles sont $\pi_1(B, b)$ -équivariante et l'action est transitive.

Corollaire 3.4. Soit $p_1 : E_1 \rightarrow B$ et $p_2 : E_2 \rightarrow B$ deux revêtements CALCA, il existe un isomorphisme h envoyant $x_0 \in p_1^{-1}(b)$ sur $y_0 \in p_2^{-1}(b) \iff p_{1\#}\pi_1(E_1, x_0) = p_{2\#}\pi_1(E_2, y_0)$.

Démonstration :

\implies clair, on écrit $E_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \xleftarrow{h^{-1}} \\ \searrow p_1 \\ \swarrow p_2 \end{array} E_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \xleftarrow{h^{-1}} \\ \swarrow p_2 \\ \searrow p_1 \end{array} E_2$ d'où $p_{1\#}\pi_1(E_1, x_0) \subset p_{2\#}\pi_1(E_2, y_0)$ et $p_{1\#}\pi_1(E_1, x_0) \supset p_{2\#}\pi_1(E_2, y_0)$

\Leftarrow

$$p_1^{-1}(b) \simeq p_{1\#}\pi_1(E_1, x_0) \setminus \pi_1(B, b) = p_{2\#}\pi_1(E_2, y_0) \setminus \pi_1(B, b) \simeq p_2^{-1}(b)$$

donc l'isomorphisme $\alpha : p_1^{-1}(b) \xrightarrow{\simeq} p_2^{-1}(b)$ et son inverse fournissent un isomorphisme h convenable (et son inverse).

3.6 Revêtements galoisien

3.6.1 Définition

Définition 3.7. Soit $p : E \rightarrow B$ un revêtement CALCA. On dit que p est galoisien s'il vérifie l'une des conditions équivalentes :

1. $\exists b_0 \in B \exists x_0 \in F_b$ tel que $p_{\#}\pi_1(E, x_0) \triangleleft \pi_1(B, b)$
2. $\forall b \in B \forall x \in F_b$ on a $p_{\#}\pi_1(E, x) \triangleleft \pi_1(B, b)$
3. $Aut(p)$ agit transitivement sur les fibres.

Démonstration :

(2) \implies (1) : clair

(1) \implies (2) : Soit b_0 donné par (1) et $b \in B$. Soit γ un chemin d'origine b_0 et d'extrémité b , et $\widetilde{\gamma}_{x_0}$ son relevé valant x_0 en 0 et $y_0 \in F_b$ en 1. On a un diagramme commutatif de groupes :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(E, x_0) & \xrightarrow[\phi_{\widetilde{\gamma}_{x_0}}]{\simeq} & \pi_1(E, y_0) \\ \downarrow p_{\#} & & \downarrow p_{\#} \\ \pi_1(B, b_0) & \xrightarrow[\phi_{\gamma}]{\simeq} & \pi_1(B, b) \end{array}$$

donc $p_{\#}\pi_1(E, y_0) \triangleleft \pi_1(B, b)$, c'est à dire $\forall b \in B, \exists x \in E$ tel que $p_{\#}\pi_1(E, x) \triangleleft \pi_1(B, b)$. De plus, les $p_{\#}\pi_1(E, x), x \in F_b$ sont tous conjugués dans $\pi_1(B, b)$ donc ils sont tous normaux dans $\pi_1(B, b)$.

(3) \implies (2) : $Aut(p)$ agit transitivement sur F_b . Le corollaire 3.4 implique que la classe de conjugaison de $p_{\#}\pi_1(E, x)$ est réduite à un élément.

(2) \implies (3) : Si $p_{\#}\pi_1(E, x) \triangleleft \pi_1(B, b)$, alors $\forall y \in F_b, p_{\#}\pi_1(E, x) = p_{\#}\pi_1(E, y)$ donc le corollaire implique qu'il existe un isomorphisme envoyant x sur y .

Exemple :

Proposition 3.7. *Soit un groupe G opérant de façon continue et totalement discontinue sur un espace E CALCA. Alors $q : E \rightarrow E/G$ est un revêtement galoisien et $Aut(q) \simeq G$.*

Démonstration : On sait que q est un revêtement et si $[x] \in E/G$ alors $G \cdot x = F_{[x]}$. On a :

$$\begin{cases} G \hookrightarrow Aut(q) \\ g \mapsto (x \mapsto g \cdot x) \end{cases}$$

donc l'action est transitive sur les orbites (car elle l'est déjà avec $G!$). Donc q est un revêtement galoisien.

L'injection est un isomorphisme : si $f \in Aut(q)$ et $x_0 \in X$ alors $f(x_0) \in F_{[x_0]} = Gx_0$. Donc il existe $g \in G$ tel que l'automorphisme $x \mapsto g \cdot x$ envoie x_0 sur $f(x_0)$, donc coïncide avec f par unicité des morphismes de revêtements.

3.6.2 Structure

Théorème 3.5.

1. Si $p : E \rightarrow B$ est un revêtement galoisien, alors $Aut(q)$ agit totalement discontinuement sur E et l'application $E/Aut(q) \rightarrow B$ est un homéomorphisme.
2. De plus, l'action de monodromie de $\pi_1(B, b)$ sur F_b induit un isomorphisme de groupes :

$$Aut(p) \simeq \pi_1(B, b) / p_{\#}\pi_1(E, x) \quad (\text{où } x \in p^{-1}(b))$$

Démonstration :

1. $Aut(p)$ agit totalement discontinuement. En effet,

▷ L'action est libre : si un automorphisme à un point fixe, il est égal à l'identité par unicité des morphismes de revêtements.

▷ L'action est totalement discontinue : soit $x \in E$, Soit $\mathcal{V} \subset B$ un ouvert trivialisant connexe de B qui contient $p(x)$ et soit \mathcal{U} le feuillet de $p^{-1}(\mathcal{V})$ contenant x . Si $f(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ pour $f \in Aut(p)$ alors il existe $y \in \mathcal{U}$ tel que $f(y) \in \mathcal{U}$. Mais comme $f \in Aut(p), f(y) \in F_{p(y)}$ et $f(y) \in \mathcal{U} \cap F_{p(y)} = \{y\}$. Donc f admet un point fixe y , donc $f = Id$.

▷ On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E & & \\ \downarrow q & \searrow p & \\ E/Aut(p) & \xrightarrow{\bar{p}} & B \end{array}$$

$\rightsquigarrow \bar{p}$ est continue

$\rightsquigarrow \bar{p}$ est surjective car p l'est

$\rightsquigarrow \bar{p}$ est injective car

$$\begin{aligned} \bar{p}[x] = \bar{p}[y] &\iff p(x) = p(y) \\ &\iff y \in F_{p(x)} \\ &\iff y \in Aut(p) \cdot x \text{ revêtement galoisien (action transitive de } Aut(p) \text{ sur les fibres)} \\ &\iff [y] = [x] \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow \bar{p}$ est ouverte : \mathcal{U} est un ouvert de $E/Aut(q) \iff q^{-1}(\mathcal{U})$ est un ouvert de $E \implies p(q^{-1}(\mathcal{U}))$ est un ouvert de B car p est ouvert, donc $\bar{p}(\mathcal{U})$ est ouvert.

2.

$$\begin{cases} Aut(p) & \longrightarrow Bij_{\pi_1(B,b)}(p^{-1}(b), p^{-1}(b)) \\ h & \longmapsto h_b \end{cases}$$

est un isomorphisme de groupes. On considère :

$$\mathfrak{S} : \begin{cases} \pi_1(B, b) & \longrightarrow Bij_{\pi_1(B,b)}(p^{-1}(b), p^{-1}(b)) \\ g & \longmapsto \sigma_g \end{cases}$$

où

$$\sigma_g : \begin{cases} p^{-1}(b) = \pi_1(B, b) \setminus p_{\#}\pi_1(E, x) & \longrightarrow \pi_1(B, b) \setminus p_{\#}\pi_1(E, x) = p^{-1}(b) \\ [\gamma] & \longmapsto g[\gamma] \end{cases}$$

qui est bien définie car $p_{\#}\pi_1(E, x) \triangleleft \pi_1(B, b)$. \mathfrak{S} est un morphisme de groupe surjectif car l'action de $\pi_1(B, b)$ est transitive de noyau $p_{\#}\pi_1(E, x)$. On a ainsi un isomorphisme de groupes :

$$\pi_1(B, b)/p_{\#}\pi_1(E, x) \simeq Bij_{\pi_1(B,b)}(p^{-1}(b), p^{-1}(b)) \simeq Aut(p)$$

Remarque 3.6.1. On peut utiliser les revêtement galoisien pour calculer des groupes fondamentaux : $p : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ est un revêtement et $Aut(p) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. De là, $\pi_1(\mathbb{R}P^n, \star) = Aut(p) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour $n \geq 2$.

3.7 Classification des revêtements

3.7.1 Revêtement universel

Définition 3.8. Un revêtement universel est un revêtement $p : E \rightarrow B$ CALCA, tel que E soit simplement connexe.

Exemple :

- ▷ $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$
- ▷ $exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$
- ▷ $\mathbb{R}^2 \rightarrow T^2 = \text{Tore}$

Proposition 3.8. Soit $p_u : \tilde{B} \rightarrow B$ un revêtement universel de B . Soit $p : E \rightarrow B$ un revêtement. On choisit $b \in B$, $\tilde{b} \in p_u^{-1}(\tilde{b})$ et $x \in p^{-1}(b)$. Alors il existe un unique morphisme de revêtement tel que $h(\tilde{b}) = x$:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{B} & \overset{\exists! h}{\dashrightarrow} & E \\ & \searrow p_u & \swarrow p \\ & B & \end{array}$$

Démonstration : théorème de relèvement des applications.

Corollaire 3.5. Un revêtement universel, s'il existe, est unique à isomorphisme près.

Définition 3.9. un espace B est *semi-localement simplement connexe* (SLSC) si pour tout $b \in B$, il existe un voisinage \mathcal{U} de b tel que l'inclusion induise un morphisme trivial $\pi_1(\mathcal{U}, b) \rightarrow \pi_1(B, b)$.

Exemple : Les variétés topologiques, les CW-complexes sont localement contractiles et à fortiori SLSC.

Exemple : On fixe un point $x \in \mathbb{R}^2$ et on considère X la réunion des cercles de diamètre $\frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ tangents en x . Cet espace n'est ni contractile ni SLSC. Puis, si on considère le cône CX , ce nouvel espace est contractile mais pas localement contractile. Il est donc SLSC car tout point admet CX comme voisinage contractile. Enfin, si on prend deux versions de X , une basée en $x \in \mathbb{R}^3$ et l'autre en $y \neq x$ et que l'on recolle CX et CY de manière à ce que le sommet de CX soit y et le sommet de CY soit CX , alors l'espace obtenu est SLSC mais il existe un point n'admettant pas de voisinage contractile (x).

Théorème 3.6. *Soit B un espace topologique CALCA. B admet un revêtement universel $\iff B$ est SLSC.*

Démonstration : Si $p : \tilde{B} \rightarrow B$ est un revêtement universel de B et $b \in B$, soit \mathcal{U} un ouvert trivialisant de B contenant b . Soit \mathcal{V} un feuillet de $p^{-1}(\mathcal{U})$ et $x \in F_b \cap \mathcal{V}$. Alors on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathcal{V}, x) & \longrightarrow & \pi_1(\tilde{B}, x) = \star \\ p_{\#} \downarrow \simeq & & \downarrow p_{\#} \\ \pi_1(\mathcal{U}, b) & \longrightarrow & \pi_1(B, b) \end{array}$$

car $p_{\#}^{\mathcal{U}}$ est un homéomorphisme. Donc $\pi_1(\mathcal{U}, b) \rightarrow \pi_1(B, b)$ est triviale. L'implication réciproque est en exo dans le TD.

3.7.2 Classification

Théorème 3.7 (de classification). *Soit B un espace CALCA et SLSC. On a une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphismes de revêtement CALCA vers l'ensemble des classes de conjugaisons dans $\pi_1(B, b)$ qui à une classe représentée par $p : E \rightarrow B$ associe la classe de $p_{\#}\pi_1(E, x)$ où $x \in p^{-1}(b)$.*

Démonstration :

- ▷ Injectivité : D'après le corollaire 3.4, on sait que deux revêtements p et p' sont isomorphes par h tel que $h(x) = x'$ (où $x \in F_b$)

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{h} & E' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & & B \end{array}$$

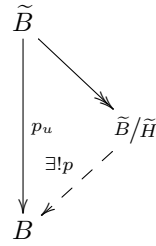
$$\iff p_{\#}\pi_1(E, x) = p'_{\#}\pi_1(E', x')$$

- ▷ Les $p_{\#}\pi_1(E, x), x \in F_b$ sont exactement la classe de conjugaison de $\pi_1(E, x)$ dans $\pi_1(B, b)$. Donc p et p' sont isomorphes \iff les classes de conjugaison de $p_{\#}\pi_1(E, x)$ et $p'_{\#}\pi_1(E', x')$ sont égales.
- ▷ Surjectivité : Soit H un sous-groupe de $\pi_1(B, b)$
- ▷ $p_u : \tilde{B} \rightarrow B$ le revêtement universel de B , il est galoisien donc

$$\begin{array}{ccc} \text{Aut}(p_u) & \xleftarrow{\Psi} & \pi_1(B, b) \\ \cup & & \cup \\ \tilde{H} & & H \end{array}$$

$$\tilde{H} = \Psi(H)$$

▷ On a la situation suivante :



\tilde{H} agit totalement discontinuement sur \tilde{B} ; p est obtenu par la propriété de la topologie quotient.

▷ p est un revêtement (vérification facile).

▷ Choisissons $x \in \tilde{B}$ tel que $p_u(x) = b$. Soit $[\gamma] \in \pi_1(B, b)$ et $\tilde{\gamma}_x$ le relèvement de γ tel que $\tilde{\gamma}(0) = x$

$$\begin{aligned} [\gamma] \in H &\iff \tilde{\gamma}_x(1) \in \tilde{H}x \\ &\iff q \circ \tilde{\gamma}_x \text{ est un lacet de } \tilde{B}/\tilde{H} \\ &\iff [\gamma] \in p_{\#}\pi_1(\tilde{B}/\tilde{H}, q(x)) \end{aligned}$$

Le dernier \implies vient de $p \circ q \circ \tilde{\gamma}_x = p \circ \tilde{\gamma}_x = \gamma$. Réciproquement, γ peut se relever en un lacet μ basé en $q(x)$, $\tilde{\mu}_x = \tilde{\gamma}_x$ où $\tilde{\mu}_x$ est un relèvement à travers q donc $q \circ \tilde{\gamma}_x = \mu$.

4 Homologie Singulière

Les groupes d'homologie singulière sont des R -modules notés $H_i(X, R)$ où :

▷ $i \in \mathbb{N}$

▷ X est un espace topologique

▷ R est un anneau commutatif (\mathbb{Z}, \mathbb{Q} ou \mathbb{F}_p)

On les obtient en deux étapes : A partir de l'espace topologique X , on construit pour chaque $i \in \mathbb{N}$ un complexe des chaînes singulières $C_i(X)$ qui est un modèle algébrique de X puis on construit les groupes d'homologie dessus.

Le principal intérêt des groupes d'homologie est que leur calcul est extrêmement simple par rapport aux groupes d'homotopies. Par exemple,

$$\mathcal{H}_i(S^n, R) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq n \\ R & \text{si } i = n \end{cases}$$

4.1 Catégories & Foncteurs

Définition 4.1. Une catégorie \mathcal{C} est la donnée :

▷ d'une collection d'objets

▷ pour chaque paire (X, Y) d'objets, d'un ensemble de morphisme $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$

▷ d'une loi de composition des morphismes associative ayant les identités de chaque objets comme élément neutre

Exemple :

1. *Ens*

Objets : Ensembles

Morphismes : Applications

Loi : Composition usuelle

2. *Top*

Objets : Espaces topologiques
Morphismes : Applications continues
Loi : Composition usuelle

3. $hTop$

Objets : Espace topologiques
Morphismes : Classes d'homotopies d'applications continues
Loi : Donnée par $[g] \circ [f] = [g \circ f]$

4. Avec R un anneau, les R -modules

Objets : R -module (à gauche)
Morphismes : Applications R -linéaires
Loi : Composition usuelle

Définition 4.2. Soient \mathcal{C}, \mathcal{D} deux catégories, un foncteur $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est la donnée

1. pour chaque objet X de \mathcal{C} , d'un objet $\mathcal{F}(X)$ de \mathcal{D}
2. pour chaque morphisme $f : X \rightarrow Y$, d'un morphisme $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ tels que :
 - (a) $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$
 - (b) $\mathcal{F}(Id_X) = Id_{\mathcal{F}(X)}$

Exemple :

1. Le foncteur d'oubli $Top \rightarrow Ens$ qui supprime la structure topologique
2. Le foncteur "topologie discrète" $Ens \rightarrow Top$
3. Les foncteurs "quotient" ou "localisation" $Top \rightarrow hTop$
4. $\pi_0 : Top \rightarrow Ens$

Lemme 4.1. Soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur, f un isomorphisme, alors $F(f)$ est un isomorphisme.

4.2 Complexes de chaînes et homologie

Soit R un anneau.

Définition 4.3.

Un complexe de chaînes est une paire (C_*, d_*) où :
 $\triangleright C_* = (C_i)_{i \geq 0}$ où les C_i sont des R -modules
 $\triangleright d_* = (d_i)_{i \geq 1}$ où d_i est un morphisme de R -module, $d_i : C_i \rightarrow C_{i-1}$, tel que

$$\forall i, \quad d_i \circ d_{i+1} = 0$$

Notation :

- \triangleright les d_i sont les *différentielles* du complexe
- $\triangleright C_i$ est le R -module des éléments de degré i
- \triangleright Un complexe est noté (C_*, d_*) ou (C_*, d) , ou encore tout simplement C_*

Dessin :

$$\dots C_3 \xrightarrow{d_3} C_2 \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0$$

Définition 4.4. Si C_* et D_* sont des complexes de R -modules, un morphisme de complexes $f_* : C_* \rightarrow D_*$ est une famille $f_* = (f_i)_{i \geq 0}$ d'applications R -linéaires $f_i : C_i \rightarrow D_i$ telles que $d_i^D \circ f_i = f_{i-1} \circ d_i^C$ ($d \circ f = f \circ d$).

Dessin :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & C_i & \xrightarrow{d_i^C} & C_{i-1} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow f_i & & \downarrow f_{i-1} & & \\
 \dots & \longrightarrow & D_i & \xrightarrow{d_i^D} & D_{i-1} & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

Définition 4.5. On note $Ch_{\geq 0}(R\text{-mod})$ la catégorie suivante :

Objets : Les complexes de chaînes de R -modules

Morphismes : Les morphismes de complexes

Loi : $f_{\star} \circ g_{\star} = (f_i \circ g_i)_{i \geq 0}$

Définition 4.6. Soit C_{\star} un complexe de R -modules. Pour tout $i \geq 0$, on considère les R -modules suivants :

- ▷ $Z_i = \text{Ker}[d_i : C_i \rightarrow C_{i-1}] \subset C_i$ (avec par convention $d_0 = 0$ donc $Z_0 = C_0$) l'ensemble des cycles de degrés i .
- ▷ $B_i = \text{Im}[d_{i+1} : C_{i+1} \rightarrow C_i] \subset C_i$ l'ensemble des bords de degrés i .
- ▷ $H_i(C) = Z_i/B_i$ le $i^{\text{ème}}$ groupe d'homologie de C_{\star} .

Notation : Si $z \in Z_i$, on note $[z]$ sa classe dans $H_i(C)$.

Lemme 4.2. H_i définit un foncteur :

$$H_i : \begin{cases} Ch_{\geq 0}(R\text{-mod}) & \longrightarrow & R\text{-mod} \\ C_{\star} & \longmapsto & H_i(C) \\ f_{\star} : C_{\star} \rightarrow D_{\star} & \longmapsto & H_i(f) \end{cases}$$

où

$$H_i(f) : \begin{cases} H_i(C) & \longrightarrow & H_i(D) \\ [z] & \longmapsto & [f_i(z)] \end{cases}$$

Définition 4.7. $f_{\star}, g_{\star} : C_{\star} \rightarrow D_{\star}$ sont *homotopes* s'il existe une famille d'applications $(h_i)_{i \geq 0}$ R -linéaires $h_i : C_i \rightarrow D_{i+1}$ telle que

$$\forall i \quad h_{i-1} \circ d_i^C + d_{i+1}^D \circ h_i = g_i - f_i$$

avec la convention $h_{-1} = 0$ ($h \circ d + d \circ h = g - f$).

$$\begin{array}{ccc}
 & & D_{i+1} \\
 & \nearrow h_i & \downarrow d_{i+1}^D \\
 C_i & \xrightarrow{g_i - f_i} & D_i \\
 \downarrow d_i^C & \nearrow h_{i-1} & \downarrow \\
 C_{i-1} & &
 \end{array}$$

Lemme 4.3. Si f_{\star} et g_{\star} sont homotopes, alors $H_i(f) = H_i(g) \forall i$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
 H_i(g)([z]) - H_i(f)([z]) &= [g(z) - f(z)] \\
 &= [h_{i-1}(d(z)) + d(h_i(z))] \\
 &\quad = 0 \text{ car } z \text{ cycle} \\
 &= [\underbrace{d(h_i(z))}_{\text{bord}}] = 0
 \end{aligned}$$

4.3 Complexe de chaîne singulière, homologie singulière

4.3.1 Simplexes standard

Soient $\{a_1, \dots, a_n\}$ n points de \mathbb{R}^k . On note $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ leur enveloppe convexe. On a

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \bigcap_{\substack{C \text{ convexe} \\ a_1, \dots, a_n \in C}} C = \left\{ x \in \mathbb{R}^k \mid x = \sum_{i=1}^n t_i a_i, t_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n t_i = 1 \right\}$$

Les points $\{a_1, \dots, a_n\}$ sont affinement indépendants s'ils vérifient une des conditions suivantes équivalentes :

- ▷ $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ est libre
- ▷ $\forall i$, le sous-espace affine engendré par $\langle a_1, \dots, \widehat{a}_i, \dots, a_n \rangle$ est strictement inclus dans le sous-espace affine engendré par $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$
- ▷ $\forall x \in \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, l'écriture barycentrique est unique.

Si les points $\{a_1, \dots, a_n\}$ sont affinement indépendants et si $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}^k$, $\exists ! f : \langle a_1, \dots, a_n \rangle \rightarrow \langle b_1, \dots, b_n \rangle$ affine tel que $f(a_i) = b_i$.

Définition 4.8.

- ▷ Le simplexe standard Δ^n est l'espace topologique $\Delta^n = \langle e_0, \dots, e_n \rangle \subset \mathbb{R}^{n+1}$ où (e_0, \dots, e_n) est la base canonique de \mathbb{R}^{n+1} . (cf wikipédia pour de zolis dessins)
- ▷ Le simplexe $\langle e_0, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n \rangle \stackrel{\text{notation}}{=} \langle e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_n \rangle$ est noté $\partial_i \Delta^n$, et on l'appelle la $i^{\text{ème}}$ face de Δ^n .
- ▷ Il existe une unique application $d^i : \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$ telle que

$$d^i(e_k) = \begin{cases} e_k & \text{si } k < i \\ e_{k+1} & \text{si } k \geq i \end{cases}$$

de plus d^i induit un isomorphisme affine de Δ^{n-1} sur $\partial_i \Delta^n$.

Lemme 4.4. Si $i < j$ les composées suivantes sont égales :

$$\Delta^{n-1} \xrightarrow{d^i} \Delta^n \xrightarrow{d^j} \Delta^{n+1} = \Delta^{n-1} \xrightarrow{d^{j-1}} \Delta^n \xrightarrow{d^i} \Delta^{n+1}$$

$$d^i \circ d^j = d^{j-1} \circ d^i$$

4.3.2 Chaînes singulières et homologie singulière

Définition 4.9. Soit X un espace topologique, R un anneau, le complexe $C_*(X; R)$ des chaînes singulières de X à coefficients dans R est défini par :

1. $\forall n \geq 0, C_n(X; R)$ est le R -module libre de base les applications continues $\Delta^n \rightarrow X$. Les $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ sont alors appelés les n -simplexes (singuliers) de X .
2. La différentielle $d_n : C_n(X; R) \rightarrow C_{n-1}(X; R)$ est définie en envoyant $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ sur

$$d_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \circ d^i$$

Remarque 4.3.1. d_* est bien une différentielle :

$$\begin{aligned}
d_n(d_{n+1}(\sigma)) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \sigma \circ d^j \circ d^i \\
&= \sum_{0 \leq i < j \leq n+1} (-1)^{i+j} \sigma \circ d^i \circ d^j + \sum_{0 \leq j \leq i \leq n} (-1)^{i+j} \sigma \circ d^j \circ d^i \\
&= \sum_{0 \leq k \leq l \leq n} (-1)^{k+l+1} \sigma \circ d^k \circ d^l + \sum_{0 \leq j \leq i \leq n} (-1)^{i+j} \sigma \circ d^j \circ d^i \\
&= 0
\end{aligned}$$

Exemple :

1. $C_*(\emptyset; R) = 0$ en chaque degré avec différentielle nulle.
2. $C_*(\{\star\}; R) = R$ en chaque degré (de base l'unique fonction $\Delta^n \rightarrow \{\star\}$)

$$d_n = \begin{cases} Id_R & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

3. $C_*(X; R) = \bigoplus_{\alpha} C_*(X_{\alpha}; R)$ où les X_{α} sont les composantes connexes par arcs de X .

Définition 4.10. L'homologie singulière de X est définie par $H_i(X; R) = H_i(C_*(X; R))$.

Exemple :

1. $H_i(\emptyset, R) = 0 \quad \forall i$
2. $H_i(\{\star\}; R) = \begin{cases} R & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
3. $H_i(X; R) = \bigoplus_{\alpha} H_i(X_{\alpha}; R)$ (où X_{α} sont les composantes connexes par arcs).

Remarques d'ordre géométrique :

1. Pourquoi les "cycles" pour $Z_n = Ker(d_n)$?
Dans le cas $n = 1$, $d\sigma = \sigma(e_1) - \sigma(e_0) = \sigma \circ d^0 - \sigma \circ d^1$. Ainsi, pour avoir

$$d\left(\sum_i \alpha_i \sigma_i\right) = 0$$

il faut avoir une boucle.

2. Pourquoi les "bords" pour $B_n = Im(d_{n+1})$?
Pour σ un 2-simplexe d'arêtes $(\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2)$, on a $d\sigma = \sigma^2 + \sigma^0 - \sigma^1$ c'est à dire la somme des simplexes correspondant au bord de $Im(\sigma)$.
3. Pourquoi l'homologie singulière capture l'information "géométrique" sur X ?
Dans \mathbb{R}^2 , si τ est un 2-simplexe, il peut être écrit comme un bord car on peut remplir son intérieur, c'est à dire $[\tau] = 0$.
Dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, un 2-simplexe τ "contenant 0" ne peut pas être rempli donc τ n'est pas un bord et $[\tau] \neq 0$ dans $H_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$.

4.3.3 Propriétés

Proposition 4.1.

▷ Le complexe des chaînes singulières définit un foncteur :

$$C_\star(-; R) : \begin{cases} Top & \longrightarrow & Ch_{\geq 0}(R\text{-mod}) \\ X & \longmapsto & C_\star(X; R) \\ f : X \rightarrow Y & \longmapsto & f_\star : \begin{cases} C_\star(X; R) & \longrightarrow & C_\star(Y; R) \\ \sigma : \Delta^n \rightarrow X & \longmapsto & f_n \circ \sigma \end{cases} \end{cases}$$

▷ Le $i^{\text{ème}}$ groupe d'homologie définit un foncteur :

$$H_i(-; R) : \begin{cases} Top & \longrightarrow & R\text{-mod} \\ X & \longmapsto & C_\star(X; R) \\ f : X \rightarrow Y & \longmapsto & H_i(f) : \begin{cases} H_i(X; R) & \longrightarrow & H_i(Y; R) \\ [z] & \longmapsto & [f_\star(z)] \end{cases} \end{cases}$$

Théorème 4.1.

- ▷ Si $f, g : X \rightarrow Y$ sont homotopes, alors $f_\star, g_\star : C_\star(X; R) \rightarrow C_\star(Y; R)$ sont homotopes.
- ▷ En particulier, $H_i(f) = H_i(g)$.
- ▷ En re-particulier, une équivalence d'homotopie induit un isomorphisme en homologie.

Démonstration :

▷ Soit $H : X \times I \rightarrow Y$ continue telle que

$$\forall x, \begin{cases} H(x, 0) = f(x) \\ H(x, 1) = g(x) \end{cases}$$

On note

$$i_0 : \begin{cases} X & \longrightarrow & X \times [0; 1] \\ x & \longmapsto & (x, 0) \end{cases} \quad \text{et} \quad i_1 : \begin{cases} X & \longrightarrow & X \times [0; 1] \\ x & \longmapsto & (x, 1) \end{cases}$$

de telle sorte que $f = H \circ i_0$ et $g = H \circ i_1$. Pour montrer le théorème, il faut voir que $(i_0)_\star, (i_1)_\star : C_\star(X; R) \rightarrow C_\star(X \times [0; 1]; R)$ sont homotopes.

▷ Idée géométrique de la preuve : Notons

$$\begin{cases} v_i = (e_i, 0) \in \mathbb{R}^{n+1} \times I \\ w_i = (e_i, 1) \in \mathbb{R}^{n+1} \times I \end{cases}$$

les sommets du prisme $\Delta^n \times I$. On a alors

$$\Delta^n \times I = \bigcup_{i=0}^n \underbrace{\langle v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n \rangle}_{\substack{\text{simplexes qui s'intersectent} \\ \text{le long de leur bord}}}$$

Notons $[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n] : \Delta^{n+1} \rightarrow \Delta^n \times I$ qui envoie $\begin{cases} e_j & \text{sur } v_j \text{ si } j \leq i \\ e_j & \text{sur } w_{j-1} \text{ si } j > i \end{cases}$

On pose :

$$P_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]$$

Formule :

$$dP_n = [w_0, \dots, w_n] - [v_0, \dots, v_n] + \sum_{j=0}^n (-1)^{j+1} (d \times id_I)_*(P_{n-1})$$

Explications :

- dans dP_n les simplexes singuliers correspondant aux "faces intérieures" du prisme $\Delta^n \times I$ apparaissent deux fois (et les signes sont réglés pour que ces contributions s'annulent).
- Il reste donc la contribution de $\Delta^n \times \{1\}, \Delta^n \times \{0\}$ et les faces des simplexes correspondant à $\partial_j \Delta^n \times I$ pour $0 \leq j \leq n$, qu'on identifie à $\Delta^n \times I$ via $d^j \times id_I : \Delta^{n-1} \times I \rightarrow \Delta^n \times I$

▷ Construction de l'homotopie h entre $(i_1)_*$ et $(i_0)_*$:

$$h_n : \begin{cases} C_n(X; R) & \longrightarrow & C_{n+1}(X \times I; R) \\ \sigma & \longmapsto & (\sigma \times id)_*(P_n) \end{cases}$$

Alors $\forall \sigma \in C_n(X)$,

$$\begin{aligned} (dh + hd)(\sigma) &= d((\sigma \times id)_*(P_n)) + h\left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \circ d^i\right) \\ &= (\sigma \times id)_*(dP_n) + \sum_{i=0}^n (-1)^i (\sigma \circ d^i \times id)_*(P_{n-1}) \\ &= \underbrace{(\sigma \times id) \circ [w_0, \dots, w_n]}_{(i_1)_*(\sigma)} - \underbrace{(\sigma \times id) \circ [v_0, \dots, v_n]}_{(i_0)_*(\sigma)} \\ &\quad + \sum_{j=0}^n (-1)^{j+1} \underbrace{(\sigma \times id)_* \circ (d^j \times id)_*}_{=(\sigma \circ d^j \times id)_*} (P_{n-1}) \\ &\quad + \sum_{j=0}^n (-1)^{j+1} (\sigma \circ d^j \times id)_*(P_{n-1}) \quad (\text{les deux sommes s'annulent}) \\ &= (i_0)_*(\sigma) - (i_1)_*(\sigma) \end{aligned}$$

▷ Calcul de dP_n :

$$\begin{aligned} P_n &= \sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n] \\ dP_n &= \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \sum_{i=0}^n \underbrace{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]}_{\circ d^j} \\ &= \begin{cases} [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n] & \text{si } j \leq i \\ [v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_{\hat{j}-1}, \dots, w_n] & \text{si } j > i \end{cases} \\ &= \sum_{0 \leq j \leq i \leq n} (-1)^{i+j} [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n] + \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} [v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_{\hat{j}-1}, \dots, w_n] \\ &= \underbrace{[w_0, \dots, w_n]}_{i=j=0} + \sum_{0 \leq j < i \leq n} (-1)^{i+j} [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n] \\ &\quad - \underbrace{[v_0, \dots, v_n]}_{i=j=n} + \sum_{0 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j+1} [v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \hat{w}_j, \dots, w_n] \\ &\quad + \underbrace{\sum_{1 \leq i \leq n} (-1)^{2i} [v_0, \dots, \hat{v}_i, w_i, \dots, w_n] + \sum_{0 \leq i \leq n-1} (-1)^{2i+1} [v_0, \dots, v_i, \hat{w}_i, \dots, w_n]}_{=0} \end{aligned}$$

$$(d^j \times id)_*(P_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i (d^j \times id)_* \underbrace{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]}_{\substack{[v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_{i+1}, w_{i+1}, \dots, w_n] \text{ si } j \leq i \\ [v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \hat{w}_j, \dots, w_n] \text{ si } j > i}}$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n (-1)^{j+1} (d^j \times id)_*(P_{n-1}) &= \sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=j}^{n-1} (-1)^{i+j+1} [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^{i+j+1} [v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \hat{w}_j, \dots, w_n] \right) \\ &= \sum_{0 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j+1} [v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \hat{w}_j, \dots, w_n] \\ &\quad + \sum_{0 \leq j < i \leq n} (-1)^{i+j} [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n] \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } dP_n = [w_0, \dots, w_n] - [v_0, \dots, v_n] + \sum_{j=0}^n (-1)^j (d^j \times id)_*(P_{n-1})$$

4.3.4 Suites exactes courtes et longues

Définition 4.11.

▷ Une suite de morphismes de R -modules :

$$M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \rightarrow \dots \xrightarrow{f_n} M_{n+1}$$

est exacte si $\forall i \text{ Ker}(f_{i+1}) = \text{Im}(f_i)$

▷ Une suite exacte courte de R -modules est une suite exacte de la forme

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

▷ Une suite exacte courte de complexes de R -modules est une suite :

$$0 \rightarrow A_\star \xrightarrow{f_\star} B_\star \xrightarrow{g_\star} C_\star \rightarrow 0$$

telle que $\forall n$,

$$0 \rightarrow A_n \xrightarrow{f_n} B_n \xrightarrow{g_n} C_n \rightarrow 0$$

est une suite exacte courte de R -module.

Théorème 4.2. Si $0 \rightarrow A_\star \xrightarrow{f_\star} B_\star \xrightarrow{g_\star} C_\star \rightarrow 0$ est une SEC (suite exacte courte) de complexes, alors on a une suite exacte (dite longue) en homologie :

$$\begin{aligned} \dots \xrightarrow{\partial_{k+1}} H_k(A) \xrightarrow{H_k(f)} H_k(B) \xrightarrow{H_k(g)} H_k(C) \xrightarrow{\partial_k} H_{k-1}(A) \rightarrow \dots \\ \dots \xrightarrow{\partial_1} H_0(A) \xrightarrow{H_0(f)} H_0(B) \xrightarrow{H_0(g)} H_0(C) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Démonstration : Construction du connectant $\partial_n : H_n(C) \rightarrow H_{n-1}(A)$

$$\begin{array}{ccccc}
A_n & \xhookrightarrow{f_n} & B_n & \xrightarrow{g_n} & C_n \\
d \downarrow & & d \downarrow & & d \downarrow \\
A_{n-1} & \xhookrightarrow{f_{n-1}} & B_{n-1} & \xrightarrow{g_{n-1}} & C_{n-1} \\
d \downarrow & & d \downarrow & & d \downarrow \\
A_{n-2} & \xhookrightarrow{\quad} & B_{n-2} & \xrightarrow{\quad} & C_{n-2}
\end{array}$$

Soit x un cycle de C_n

▷ $\exists y \in B_n$ tel que $g_n(y) = x$

▷ $g_{n-1}(dy) = d(g_n(y)) = dx = 0$ car x est un cycle donc il existe $z \in A_{n-1}$ par exactitude tel que $f_{n-1}(z) = dy$

$$\begin{array}{ccc}
y & \xrightarrow{g_n} & x \\
d \downarrow & & \\
z & \xrightarrow{f_{n-1}} & dy
\end{array}$$

Lemme 4.5. z est un cycle et $[z] \in H_{n-1}(A)$ ne dépend pas du choix de y .

Démonstration :

▷ z est un cycle

$$\begin{aligned}
dz = 0 &\iff f_{n-2}(dz) = 0 \\
&\iff d(f_{n-1}(z)) = 0 \\
&\iff d(dy) = 0
\end{aligned}$$

▷ Si \tilde{y} est un autre choix, $g_n(y - \tilde{y}) = 0$, or par exactitude de $A_n \xrightarrow{f_n} B_n \xrightarrow{g_n} C_n$, $\exists s \in A_n$ tel que $f_n(s) = y - \tilde{y}$. De là, $dy - d\tilde{y} = d(f_n(s)) = f_{n-1}(ds)$. Comme f_{n-1} est injective, $f_{n-1}(z - \tilde{z} - ds) = 0$ et $z - \tilde{z} = ds$. De là, en homologie, z et \tilde{z} sont égaux modulo un bord donc $[z] = [\tilde{z}]$.

On a donc une application bien définie $\tilde{\partial}_n : \begin{cases} Z_n(C) & \longrightarrow & H_{n-1}(A) \\ x & \longmapsto & [z] \end{cases}$.

Lemme 4.6. $\tilde{\partial}_n$ est R -linéaire.

Démonstration : Si $\tilde{\partial}_n(x) = [z]$ et $\tilde{\partial}_n(x') = [z']$ alors

$$\begin{array}{ccc}
\lambda y + \lambda' y' & \xrightarrow{g_n} & \lambda x + \lambda' x' \\
d \downarrow & & \\
\lambda z + \lambda' z' & \xrightarrow{f_{n-1}} & d(\lambda y + \lambda' y')
\end{array}$$

De là, $\tilde{\partial}_n(\lambda x + \lambda' x') = [\lambda z + \lambda' z'] = \lambda \tilde{\partial}_n(x) + \lambda' \tilde{\partial}_n(x')$.

Lemme 4.7. $\tilde{\partial}_n(b) = 0$ si b est un bord de C_n .

Démonstration : Soit b un bord de C_n . Soit $\beta \in C_{n+1}$ tel que $b = d\beta$

$$\begin{array}{ccc}
 \alpha & \xrightarrow{g_{n+1}} & \beta \\
 \downarrow d & & \downarrow d \\
 d\alpha & \xrightarrow{g_n} & b \\
 \downarrow d & & \\
 0 & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Il existe $\alpha \in B_{n+1}$ tel que $g_{n+1}(\alpha) = \beta$. Alors $g_n(d\alpha) = d(g_{n+1}(\alpha)) = d\beta = b$. De là, $\widetilde{\partial}_n(b) = [d(d(\alpha))] = [0] = 0$.

On dispose donc de $\partial_n : H_n(C) \rightarrow H_{n-1}(A)$.

Exactitudes :

1. Montrons que $H_n(A) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(B) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(C)$ est exacte en $H_n(B)$. $Im(H_n(f)) \subset Ker(H_n(g))$ car $H_n(g) \circ H_n(f) = H_n(g \circ f) = 0$ car $g_n \circ f_n = 0$.

Si $H_n(g)[b] = 0$, c'est à dire b est un cycle de B_n et $g_n(b)$ est un bord de C_n , alors $\exists x$ tel que $d_{n+1}(x) = g_n(b)$, $\exists y$ tel que $g_{n+1}(y) = x$

$$\begin{array}{ccc}
 y & \xrightarrow{g_{n+1}} & x \\
 & & \downarrow d_{n+1} \\
 b & \xrightarrow{g_n} & g_n(b)
 \end{array}$$

et on a $g_n(d_{n+1}(y)) = d_{n+1}(g_{n+1}(y)) = g_n(b)$ donc $g_n(d_{n+1}(y) - b) = 0$ donc par exactitude, il existe z tel que $f_n(z) = d_{n+1}(y) - b$ donc b est dans l'image de f_n modulo un bord $d_{n+1}(y)$ donc $[f_n(z)] = [b]$ donc $b \in Im(H_n(f))$

2. Montrons que $H_n(C) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{H_{n-1}(f)} H_{n-1}(B)$ est exacte en $H_{n-1}(A)$. Si $x \in H_n(C)$ alors $\partial_n([x]) = [z]$ où $[z]$ est tel que $f_{n-1}(z) = d_n x$ et $g_n(y) = x$. Donc $H_{n-1}(f)(\partial_n[x]) = [f_{n-1}(z)] = 0$ et on a $Im(\partial_n) \subset Ker(H_{n-1}(f))$. Réciproquement ; si $[z] \in Ker(H_{n-1}(f))$, il existe $y \in B_{n-1}$ un bord et $z \in A_{n-1}$ est un cycle.

$$\begin{array}{ccc}
 y & \longrightarrow & g_n(y) \\
 & & \downarrow d \\
 z & \xrightarrow{f_{n-1}} & f_{n-1}(z)
 \end{array}$$

De là, $\widetilde{\partial}_n(g_n(y)) = [z]$ c'est à dire $[z] \in Im(\partial)$

3. De même pour la dernière exactitude.

Lemme 4.8 (des cinq). Si on a un diagramme commutatif de R -module

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5 \\
 \downarrow f_1 & & \sim \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \sim \downarrow f_4 & & \downarrow \\
 B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_4 & \longrightarrow & B_5
 \end{array}$$

tel que les lignes soient exactes, alors f_3 est un isomorphisme.

4.3.5 Homologie relative

Soit R un anneau, X un espace topologique et $A \subset X$. L'inclusion $i : A \hookrightarrow X$ induit un morphisme $i_* : C_*(A; R) \rightarrow C_*(X; R)$ qui est injectif en chaque degré.

Définition 4.12.

▷ Le complexe singulier relatif $C_*(X, A; R)$ est défini par :

$$C_n(X, A; R) = C_n(X; R) / C_n(A; R)$$

et

$$d_n : \begin{cases} C_n(X, A; R) & \longrightarrow C_{n-1}(X, A; R) \\ [x] & \longmapsto [d_n^{C_n(X; R)}(x)] \end{cases}$$

▷ L'homologie relative $H_i(X, A; R)$ est l'homologie de $C_*(X, A; R)$

Exemples :

- ▷ $C_*(X, \emptyset; R) = C_*(X; R)$
- ▷ $C_*(X, X; R) = 0$

Théorème 4.3. Soit X un espace topologique et $A \subset X$, alors on a une suite exacte longue en homologie :

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_k(A; R) \xrightarrow{H_k(i)} H_k(X; R) \rightarrow H_k(X, A; R) \xrightarrow{\partial} H_{k-1}(A; R) \xrightarrow{H_{k-1}(i)} H_{k-1}(X; R) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow H_0(A; R) \rightarrow H_0(X; R) \rightarrow H_0(X, A; R) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Démonstration : On a une suite exacte de complexes

$$0 \rightarrow C_*(A; R) \xrightarrow{i_*} C_*(X; R) \rightarrow C_*(X, A; R) \rightarrow 0$$

qui induit une suite exacte longue en homologie.

4.4 Calcul de l'homologie singulière

On connaît :

- ▷ $H_i(\emptyset; R) = 0, \forall i$
- ▷ $H_i(\{pt\}; R) = \begin{cases} R & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{si } i > 0 \end{cases}$
- ▷ $H_i(X; R) = \bigoplus_{\alpha} H_i(X_{\alpha}; R)$ pour X_{α} composante connexe par arc de X
- ▷ $H_i(X; R)$ ne dépend que du type d'homotopie de X , en particulier un espace contractile a même homologie que $\{pt\}$.

4.4.1 H_0 et H_1

Théorème 4.4. $H_0(X; R)$ est le R -module libre engendré par l'ensemble des composantes connexes par arc de X .

Démonstration : Il suffit de le montrer pour X connexe par arcs. Soit

$$\epsilon : \begin{cases} C_0(X; R) & \longrightarrow R \\ \sum_{\text{finie}} \lambda_i x_i & \longmapsto \sum \lambda_i \end{cases}$$

ϵ est R -linéaire, surjective.

- ▷ ϵ s'annule sur $B_0(X) = \text{Im}(d_1)$ car si $\gamma : I = \Delta^1 \rightarrow X$ est un 1-simplexe, $d\gamma = \gamma(1) - \gamma(0)$ donc $\epsilon(d\gamma) = 0$
- ▷ Si $\sum \lambda_i x_i \in \text{Ker}(\epsilon)$, alors $\sum \lambda_i = 0$. On choisit $x_{i_0} \in X$. Comme X est connexe par arcs, pour tout $i \neq i_0$ on peut trouver un chemin γ_i d'origine x_{i_0} et d'extrémité x_i

$$\sum \lambda_i x_i = \sum_i \lambda_i (x_i - x_{i_0}) + \underbrace{\left(\sum \lambda_i \right)}_{=0} x_{i_0} = \sum_{i \neq i_0} \lambda_i (x_i - x_{i_0}) = d \left(\sum_{i \neq i_0} \lambda_i \gamma_i \right)$$

Théorème 4.5. Soit X un espace connexe par arcs, $x \in X$. Alors on a un isomorphisme

$$h : \pi_1(X, x)_{ab} \xrightarrow{\sim} H_1(X; \mathbb{Z})$$

Démonstration : Construction de h (morphisme de Hurewicz) : Si $\gamma \in C_{x,x}(X)$, alors γ est une application de $I = \Delta^1 \rightarrow X$ donc un 1-simplexe singulier, et $d\gamma = \gamma(1) - \gamma(0) = 0$ donc γ est un cycle de $C_1(X; R)$, donc on a :

$$\tilde{h} : \begin{cases} C_{x,x}(X, x) & \longrightarrow & H_1(X; R) \\ \gamma & \longmapsto & \llbracket \gamma \rrbracket \end{cases}$$

où $\llbracket \gamma \rrbracket$ est la classe d'homologie de γ (et $[\gamma]$ sa classe d'homotopie à extrémités fixées).

Lemme 4.9. Si γ et μ sont homotopes à extrémités fixées, alors $\llbracket \gamma \rrbracket = \llbracket \mu \rrbracket$.

Démonstration : On a une homotopie $H : I \times I \rightarrow X$ tel que $\gamma \sim_H \mu$. On découpe la source de H pour produire deux 2-simplexes :

$$\begin{aligned} \sigma_{sup} &= \langle 0 \mapsto (0, 0); 1 \mapsto (1, 0); 2 \mapsto (1, 1) \rangle \\ \sigma_{inf} &= \langle 0 \mapsto (0, 0); 1 \mapsto (0, 1); 2 \mapsto (1, 1) \rangle \end{aligned}$$

On a $\gamma : (0, 0) \rightsquigarrow (0, 1)$, $\mu : (1, 0) \rightsquigarrow (1, 1)$, $\epsilon_x : (0, 0) \rightsquigarrow (1, 0)$ et $(0, 1) \rightsquigarrow (1, 1)$ ainsi que $\alpha : (0, 0) \rightsquigarrow (1, 1)$ d'où

$$\begin{aligned} d(\sigma_{sup}) &= \mu - \alpha + \epsilon \\ d(\sigma_{inf}) &= \epsilon_x - \alpha + \gamma \end{aligned}$$

donc $\mu - \gamma = d(\sigma_{sup} - \sigma_{inf})$ donc $\llbracket \gamma \rrbracket = \llbracket \mu \rrbracket$.

Donc \tilde{h} passe au quotient en $\bar{h} : \pi_1(X, x) \rightarrow H_1(X; R)$.

Lemme 4.10. \bar{h} est un morphisme de groupes.

Démonstration : Il faut montrer que $\llbracket \lambda \cdot \mu \rrbracket = \llbracket \lambda \rrbracket + \llbracket \mu \rrbracket$. Soit σ le 2-simplexe de bords $\lambda(0 \rightsquigarrow 1), \mu(1 \rightsquigarrow 2)$ et $\lambda \cdot \mu(0 \rightsquigarrow 2)$ constant le long des verticales



On a $d(\sigma) = \mu + \lambda - \lambda \cdot \mu$ donc $\llbracket \lambda \rrbracket + \llbracket \mu \rrbracket = \llbracket \lambda \cdot \mu \rrbracket$.

Donc \bar{h} passe au quotient en :

$$h : \pi_1(X, x)_{ab} \rightarrow H_1(X; R)$$

h est un isomorphisme si $R = \mathbb{Z}$ (cf. feuille d'exercice).

4.4.2 Théorème des chaînes \mathcal{U} -petites

- ▷ X est un espace, et $\mathcal{U} = (U_i)$ est une famille de parties de X telle que $X = \bigcup_i \overset{\circ}{U}_i$
- ▷ Un n -simplexe singulier $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ est dit \mathcal{U} -petit si son image est contenue dans l'un des U_i

$$\underbrace{C_n^{\mathcal{U}}(X; R)}_{\text{sous-module des simplexes singulier } \mathcal{U}\text{-petit}} \subset C_n(X; R)$$

- ▷ La différentielle $d_n : C_n(X; R) \rightarrow C_{n-1}(X; R)$ envoie $C_n^{\mathcal{U}}(X; R)$ dans $C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X; R)$. On a donc l'inclusion de complexes :

$$\Phi : (C_{\star}^{\mathcal{U}}(X; R), d_{\star}) \hookrightarrow (C_{\star}(X; R), d_{\star})$$

Théorème 4.6 (Des chaînes petites). Φ est un isomorphisme en homologie.

Rajouter l'idée de la preuve

Subdivision barycentrique des simplexes géométriques

Soit $\langle v_0, \dots, v_n \rangle \subset \mathbb{R}^n$ un n -simplexe affine (on suppose les v_i affinement indépendant). On définit la subdivision barycentrique par récurrence sur n :

Si $n = 0$: la subdivision barycentrique de $\langle v_0 \rangle$ est $\langle v_0 \rangle$.

Si $n = 1$: la subdivision barycentrique de $\langle v_0, v_1 \rangle$ est $\langle v_0, b \rangle$ et $\langle b, v_1 \rangle$ où b est le centre de gravité de $\{v_0, v_1\}$.

Si $n > 1$: la subdivision barycentrique de $\langle v_0, \dots, v_n \rangle$ est l'ensemble des simplexes de la forme : $\langle b, w_0, \dots, w_{n-1} \rangle$ où

- ▷ b est le centre de gravité de $\{v_0, \dots, v_n\}$
- ▷ $\langle w_0, \dots, w_{n-1} \rangle$ est un simplexe de la subdivision barycentrique d'une des faces de $\langle v_0, \dots, v_n \rangle$

Exemple : Dans le cas $n = 2$:



Le diamètre d'une partie X de \mathbb{R}^n est un nombre $\delta(X) = \sup_{(x,y) \in X^2} d(x,y)$ où d est la distance euclidienne. Si X est compact, cette quantité est finie.

Lemme 4.11. Si σ est un simplexe géométrique de la subdivision barycentrique de $\langle v_0, \dots, v_n \rangle$ alors :

$$\delta(\sigma) \leq \frac{n}{n+1} \delta(\langle v_0, \dots, v_n \rangle)$$

Démonstration : Par récurrence sur n , les cas $n = 0$ et $n = 1$ étant évident. Supposons la propriété vérifiée pour $n - 1$.

- ▷ Si $x, y \in \langle v_0, \dots, v_n \rangle$, alors

$$d(x, y) \leq \max_i d(x, v_i) \leq \max_{i,j} d(v_i, v_j)$$

En effet, $y = \sum t_i v_i$, $\sum t_i = 1$, $t_i > 0$.

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \left\| x - \sum t_i v_i \right\| \\ &= \left\| \left(\sum t_i \right) x - \sum t_i v_i \right\| \\ &\leq \sum_{i=0}^n t_i \|x - v_i\| \\ &\leq \max_i \|x - v_i\| \end{aligned}$$

Il suffit donc de vérifier que pour $\sigma = \langle b, w_0, \dots, w_{n-1} \rangle$, on a :

$$\begin{cases} (1) : d(b, w_i) \leq \frac{n}{n+1} \delta(\langle v_0, \dots, v_n \rangle), \forall i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \\ (2) : d(w_i, w_j) \leq \frac{n}{n+1} \delta(\langle v_0, \dots, v_n \rangle), \forall i \neq j \end{cases}$$

▷ (2) :

$$\begin{aligned} d(w_i, w_j) &\leq \frac{n-1}{n} \delta(\langle w_0, \dots, w_{n-1} \rangle) \\ &\leq \frac{n-1}{n} \delta(\partial_k \langle v_0, \dots, v_n \rangle) \\ &\leq \frac{n-1}{n} \delta(\langle v_0, \dots, v_n \rangle) \\ &\leq \frac{n}{n+1} \delta(\langle v_0, \dots, v_n \rangle) \end{aligned}$$

▷ (1) : $d(b, w_i) \leq \max_k d(b, v_k)$

$b = \frac{1}{n+1} v_k + \frac{n}{n+1} b_k$ où b_k est le centre de gravité de la face $\partial_i \langle v_0, \dots, v_n \rangle$ donc $d(b, v_b) = \frac{n}{n+1} d(v_b, b_k) < \frac{n}{n+1} \delta(\langle v_0, \dots, v_n \rangle)$ donc $d(b, w_i) \leq \frac{n}{n+1} \delta(\langle v_0, \dots, v_n \rangle)$

Subdivision des simplexes singuliers affines

Soit $Y \subset \mathbb{R}^N$ convexe et $L_n(Y) \subset C_n(Y; R)$ le sous R -module engendré par les applications affines $\Delta^n \rightarrow Y$. On note $[y_1, \dots, y_n]$ l'application affine qui envoie $l_i \in \Delta^n$ sur y_i . $d_n : C_n(Y; R) \rightarrow C_{n-1}(Y; R)$ envoie $L_n(Y)$ dans $L_{n-1}(Y)$ donc on a une inclusion de complexes :

$$(L_\star(Y), d) \hookrightarrow (C_\star(Y; R), d_\star)$$

Si $b \in Y$, on définit un opérateur R -linéaire de Cône de sommet b

$$(C_b)_n : \begin{cases} L_n(Y) & \longrightarrow & L_{n+1}(Y) \\ [y_0, \dots, y_n] & \longmapsto & [b, y_0, \dots, y_n] \end{cases}$$

Lemme 4.12.

$$d_{n+1} \circ (C_b)_n + (C_b)_{n-1} \circ d_n = Id_{L_n(Y)}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} d(C_b([y_0, \dots, y_n])) &= d[b, y_0, \dots, y_n] \\ &= [y_0, \dots, y_n] - \underbrace{\sum_{i=0}^n (-1)^i [b, y_0, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_n]}_{C(d[y_0, \dots, y_n])} \end{aligned}$$

On définit un opérateur R -linéaire de subdivision $S_n : L_n(Y) \rightarrow L_n(Y)$ par récurrence sur n :

$\mathbf{n} = \mathbf{0}$: $S_0 = Id$

$\mathbf{n} \geq \mathbf{1}$: Si $\sigma : \Delta^n \rightarrow Y$ est affine et b_σ le centre de gravité de l'image σ alors $S_n(\sigma) = C_{b_\sigma}(S_{n-1}(d\sigma))$

Remarque 4.4.1. $S_n(\sigma)$ est constitué d'une somme (avec signes) d'applications $[b_\sigma, w_0, \dots, w_n]$ où les $\langle b_\sigma, w_0, \dots, w_n \rangle$ sont les simplexes géométriques de la subdivision barycentrique du simplexe $\langle v_0, \dots, v_{n+1} \rangle$ (où $\sigma[v_0, \dots, v_n]$)

Lemme 4.13. $S_* : L_*(Y) \rightarrow L_*(Y)$ est un morphisme de complexes de chaînes.

Démonstration : Par récurrence sur n , on prouve $dS_n(\sigma) = S_{n-1}(d\sigma)$

$$\begin{aligned} d(S_n(\sigma)) &= (dC_{b_\sigma})S_{n-1}d\sigma \\ &= (-C_{b_\sigma}d + Id)S_{n-1}d\sigma \\ &= S_{n-1}d\sigma - \underbrace{(C_{b_\sigma} dS_{n-1}d\sigma)}_{=S_{n-2}d} \\ &= S_{n-1}d\sigma - \underbrace{C_{b_\sigma} \underbrace{dd}_{=0} \sigma}_{=0} \end{aligned}$$

Lemme 4.14. S_* est homotope à l'identité.

Démonstration : On définit $h_n : L_n(Y) \rightarrow L_{n+1}(Y)$ par $h_{-1}(\sigma) = 0$ et $h_n(\sigma) = C_{b_\sigma}(\sigma - h_{n-1}d\sigma)$. On démontre que $dh_n + h_{n-1}d = Id - S_n$ par récurrence sur n :

$$\begin{aligned} dh_n(\sigma) &= \underbrace{dC_{b_\sigma}}_{(-C_{b_\sigma}d + Id)} \sigma - \underbrace{dC_{b_\sigma}}_{\text{même chose}} h_{n-1}d\sigma \\ &= \sigma - C_{b_\sigma}d\sigma + C_{b_\sigma} \underbrace{dh_{n-1}d\sigma}_{-h_{n-2}d + Id - S_{n-1}} - h_{n-1}d\sigma \end{aligned}$$

donc $C_{b_\sigma}dh_{n-1}d\sigma = C_{b_\sigma}d\sigma - C_{b_\sigma}S_{n-1}d\sigma$ donc $dh_n\sigma = \sigma - \underbrace{C_{b_\sigma}S_{n-1}d\sigma}_{S_n\sigma} - h_{n-1}d\sigma$

Subdivision des chaînes singulières :

Si $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ est un n -simplexe singulier, on a :

$$L_*(\Delta^n) \xrightarrow{S_*} L_*(\Delta^n) \subset C_*(\Delta^n; R) \xrightarrow{\sigma_*} C_*(X; R)$$

On définit :

$$\widetilde{S}_n : \begin{cases} C_n(X; R) & \longrightarrow & C_n(X; R) \\ \sigma & \longmapsto & \sigma_* \circ S_*(id_{\Delta^n}) \end{cases}$$

Remarque 4.4.2. $\widetilde{S}_n(\sigma)$ est somme (avec signe) ds restrictions de σ au simplexe $\langle b, w_0, \dots, w_{n-1} \rangle \subset \Delta^n$ correspondant à la subdivision barycentrique de Δ^n .

Lemme 4.15. $\widetilde{S}_* : C_*(X; R) \rightarrow C_*(X; R)$ est un morphisme de complexes de chaînes.

Démonstration : On montre que $d \circ \widetilde{S}_n = \widetilde{S}_{n-1} \circ d$

$$\begin{aligned}
d\widetilde{S}_n(\sigma) &= d\sigma_* S_* Id_{\Delta_n} = \sigma_* S_* dId_{\Delta_n} \text{ car } \sigma_*, S_* \text{ sont des morphismes de complexes} \\
&= \sigma_* S_n \sum_{i=0}^n (-1)^i d^i = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_* S_n d^i \\
\widetilde{S}_{n-1} \circ d(\sigma) &= \widetilde{S}_{n-1} \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \circ d^i \right) \\
&= \sum_{i=0}^n (-1)^i \widetilde{S}_{n-1}(\sigma \circ d^i) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \underbrace{(\sigma \circ d^i)_* S_{n-1}(id_{\Delta_{n+1}})}_{= \sigma_* S_{n-1} d^i}
\end{aligned}$$

Lemme 4.16. \widetilde{S}_* est homotope à Id

Démonstration : $\widetilde{h}_n : C_n(X; R) \rightarrow C_{n+1}(X; R)$ définie par $\widetilde{h}_n(\sigma) = \sigma_*(h_n(Id_{\Delta_n}))$. Un calcul similaire à celui du lemme précédent montre que $\forall n$:

$$d\widetilde{h}_n + \widetilde{h}_n d = Id - \widetilde{S}_n$$

Subdivision barycentrique itérées :

Lemme 4.17. Soit $\sigma \in C_j(X; R)$ Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$(\widetilde{S}_j)^k = \underbrace{(\widetilde{S}_j \circ \dots \circ \widetilde{S}_j)}_{k \text{ fois}}(\sigma) \in C_j^{\mathcal{U}}(X; R)$$

Démonstration : Soit $\sigma = \sum \lambda_i \sigma_i$ avec $\sigma_i : \Delta^n \rightarrow X$. Si on subdivise Δ^n barycentriquement k fois de suite, alors les simplexes obtenus sont de diamètre $\leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^k \delta(\Delta^n)$. D'après le lemme de Lebesgue, il existe k tel que $\forall i, \forall \tau \subset \Delta^n$ un n -simplexe de la $k^{\text{ième}}$ subdivision barycentrique, il existe un \mathcal{U}_j tel que $\tau \subset \sigma^{-1}(\mathcal{U}_j)$.

Alors $(\widetilde{S}_j)^k(\sigma)$ est une somme d'application dont les images sont contenues dans un \mathcal{U}_j .

Lemme 4.18. $(\widetilde{S}_*)^k : C_*(X; R) \rightarrow C_*(X; R)$ est homotope à l'identité. De plus, l'homotopie H envoie $C_n^{\mathcal{U}}$ dans $C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X; R)$

Démonstration :

▷ L'opérateur H est donné par

$$H = \sum_{0 \leq i < k} \widetilde{h} \circ \widetilde{S}^i$$

▷ On a :

$$\begin{aligned}
d \circ H + H \circ d &= \sum_{0 \leq i < k} d \circ \tilde{h} \circ \tilde{S}^i + \sum_{0 \leq i < k} \tilde{h} \circ \underbrace{\tilde{S}^i \circ d}_{=d \circ \tilde{S}^i \text{ car } \tilde{S}^i \text{ est un morphisme de complexes}} \\
&= \sum_{0 \leq i < k} (d \circ \tilde{h} + \tilde{h} \circ d) \circ \tilde{S}^i \\
&= \underbrace{(d \circ \tilde{h} + \tilde{h} \circ d)}_{id - \tilde{S}} \circ \left(\sum_{0 \leq i < k} \tilde{S}^i \right) \\
&= \sum_{0 \leq i < k} \tilde{S}^i - \sum_{1 \leq i < k+1} \tilde{S}^i \\
&= id - \tilde{S}^k
\end{aligned}$$

▷ Si $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ est \mathcal{U} -petite, alors

$$H(\sigma) = \sum_{0 \leq i < k} \underbrace{\tilde{h}(\tilde{S}^i(\sigma))}_{\mathcal{U}\text{-petite}}$$

Démonstration du théorème des chaînes \mathcal{U} -petites :

$$H_i(\Phi) : H_i(C_\star^\mathcal{U}(X; R)) \rightarrow H_i(C_\star(X; R)) \text{ est un isomorphisme}$$

Démonstration :

Injectivité : Soit z un cycle dans $C_i^\mathcal{U}(X; R)$. On suppose $H_i(\Phi)([z]) = 0$ c'est à dire qu'il existe $x \in C_i(X; R)$ tel que $dx = z$. Alors :

1. Il existe k tel que $\tilde{S}^k(x) \in C_i^\mathcal{U}(X; R)$
 2. $x - \tilde{S}_\star^k(x) = Hdx + dHx = Hz + dHx$
- D'après (2) $z = dx = \underbrace{dS^k(x)}_{\text{bord } \mathcal{U} \text{ petit}} + dH \underbrace{z}_{\substack{\mathcal{U}\text{-petit} \\ \mathcal{U}\text{-petit} \\ \text{bord } \mathcal{U}\text{-petit}}}$ donc $[z] = 0$ dans $H_i^\mathcal{U}(X; R)$.

Surjectivité : Soit z un cycle dans $C_i(X; R)$, il existe k tel que $\tilde{S}_i^k(z)$ est dans $C_i^\mathcal{U}(X; R)$. Alors $z - \tilde{S}_i^k = \underbrace{H dz}_{=0} + dH z$ donc $[z] = \underbrace{[S_i^k(z)]}_{\mathcal{U}\text{-petit}}$ et $[z] \in H_i(C_\star^\mathcal{U}(X; R)) = H_i(\Phi)([S_i^k(z)])$

4.4.3 Théorème de Mayer Vietoris

Théorème 4.7. Soit X un espace topologique, \mathcal{U}, \mathcal{V} deux ouverts de X tels que $\mathcal{U} \cup \mathcal{V} = X$. Notons :

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{U} \cap \mathcal{V} & \xrightarrow{i_\mathcal{U}} & \mathcal{U} \\
\downarrow i_\mathcal{V} & & \downarrow j_\mathcal{U} \\
\mathcal{V} & \xrightarrow{j_\mathcal{V}} & X
\end{array}$$

Alors il existe une suite exacte longue de R -modules :

$$\begin{aligned}
\dots \rightarrow H_k(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}; R) &\xrightarrow{H_k(i_\mathcal{U}) + H_k(i_\mathcal{V})} H_k(\mathcal{U}; R) \oplus H_k(\mathcal{V}; R) \xrightarrow{H_k(j_\mathcal{U}) - H_k(j_\mathcal{V})} H_k(\mathcal{U} \cup \mathcal{V}; R) \xrightarrow{\partial} H_{k-1}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}; R) \rightarrow \dots \\
\dots \rightarrow H_0(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}; R) &\rightarrow H_k(\mathcal{U}; R) \oplus H_k(\mathcal{V}; R) \rightarrow H_k(\mathcal{U} \cup \mathcal{V}; R) \xrightarrow{\partial} H_{k-1}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}; R) \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Démonstration : On considère le recouvrement ouvert $\mathcal{W} = \{\mathcal{U}, \mathcal{V}\}$ de X , alors $C_*^{\mathcal{W}}(X; R)$ ont même homologie que $C_*(X; R)$.

Il y a une suite exacte courte de complexes :

$$0 \rightarrow C_*(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \xrightarrow{(i\mathcal{U})_* + (i\mathcal{V})_*} C_*(\mathcal{U}) \oplus C_*(\mathcal{V}) \xrightarrow{(j\mathcal{U})_* - (j\mathcal{V})_*} C_*^{\mathcal{U}}(\mathcal{U} \cup \mathcal{V}) \rightarrow 0$$

Exemple : L'homologie des sphères $S^n, n \leq 1$.

Proposition 4.2.

$$H_k(S^n; R) = \begin{cases} R & \text{si } k = 0 \\ R & \text{si } k = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque 4.4.3. On sait déjà que $H_0(S^n, R) = R$ car S^n est connexe par arcs.

Démonstration : On décompose S^n en deux hémisphères épaissies H_+ et H_- . Chaque hémisphère est homéomorphe à des disques ouverts, donc contractiles. $H_+ \cap H_-$ est homéomorphe à $S^{n-1} \times]-\epsilon, \epsilon[$ qui a le même type d'homotopie que S^{n-1} . On applique la suite de Mayer Vietoris :

$$\underbrace{H_{k+1}(H_+) \oplus H_{k+1}(H_-)}_{=0 \forall k \geq 0} \rightarrow H_{k+1}(S^n) \xrightarrow{\partial} H_k(S^{n-1}) \rightarrow H_k(H_+) \oplus H_k(H_-) \rightarrow \dots$$

donc $H_{k+1}(S^n) \hookrightarrow H_k(S^{n-1})$

Dans le cas $n = 1$,

$$H_{k+1}(S^1) \hookrightarrow H_k^{S^0} \rightarrow H_k(H_-) \oplus H_k(H_+) \rightarrow H_k(S^1)$$

Pour $k = 0$, on a la suite exacte

$$0 \rightarrow H_1(S^1) \hookrightarrow R^{\oplus 2} \xrightarrow[\substack{\phi \\ c_1, c_2}]{} R \oplus R \xrightarrow[\substack{\psi \\ H_+ \quad H_-}]{} R \rightarrow 0$$

Avec $\psi(\lambda, \mu) = \lambda + \mu$ et $\phi(\lambda, \mu) = (\lambda + \mu, -\lambda - \mu)$ d'où $\text{Ker}[\phi] = R\{c_1 - c_2\} \subset R^{\oplus 2}$ donc $H_1(S^1) \simeq R$.

Pour $k > 0$: $H_{k+1}(S^1) \simeq H_k(S^0) = 0$

Dans le cas $n > 1$: Comme ∂ est injective $\implies H_{k+1}(S^n) = 0$ si $k + 1 \neq n$. Si $k + 1 = n$, $H_k(H_+) = H_k(H_-) = 0$ (car $k > 1$) donc $H_{k+1}(S^n) \xrightarrow{\sim} H_k(S^{n-1})$.

Conjecture de Poincaré : Si V est une variété compacte, simplement connexe de dimension n telle que $H_*(V; \mathbb{Z}) \simeq H_0(S^n, \mathbb{Z})$ alors V est homéomorphe à S^n .

Démontré par Snale pour $n \leq 5$ (1961), puis par Freedman pour $n = 4$ (1982) et enfin par Perelman pour $n = 3$ (2003).

4.5 Excision

Soit X un espace topologique, $A \subset X$, \mathcal{U} une partie de X telle que $\bar{\mathcal{U}} \subset \overset{\circ}{A}$.

Théorème 4.8. Soit $\mathcal{U} \subset A \subset X$ tel que $\bar{\mathcal{U}} \subset \overset{\circ}{A}$. Alors l'injection $(X \setminus \mathcal{U}, A \setminus \mathcal{U}) \hookrightarrow (X, A)$ induit un isomorphisme :

$$H_*(X \setminus \mathcal{U}, A \setminus \mathcal{U}; R) \xrightarrow{\sim} H_*(X, A; R)$$

Démonstration : On pose $B = X \setminus \mathcal{U}$, alors $A \cap B = A \setminus \mathcal{U}$. Il nous faut montrer que le morphisme :

$$C_*(B)/C_*(A \cap B) \xrightarrow{j_*} C_*(X)/C_*(A)$$

induit un isomorphisme en homologie.

Notons $\mathcal{U} = \{A, B\}$ un recouvrement de X ($\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = X$ car $\overline{B} \subset \overset{\circ}{A}$). On note $C_*(A+B) = C_*^{\mathcal{U}}(X) \subset C_*(X)$. On décompose j_* en

$$C_*(B)/C_*(A \cap B) \xrightarrow{(1)} C_*(A+B)/C_*(A) \xrightarrow{(2)} C_*(X)/C_*(A)$$

- ▷ (1) induit un isomorphisme de complexe de chaînes (vérification facile)
- ▷ (2) induit un isomorphisme en homologie. En effet, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_*(A) & \longrightarrow & C_*(A+B) & \longrightarrow & C_*(A+B)/C_*(A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow (4) & & \downarrow (3) & & \\ 0 & \longrightarrow & C_*(A) & \longrightarrow & C_*(X) & \longrightarrow & C_*(X)/C_*(A) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(3) envoie $[\sigma] \in C_*(A+B; R)/C_*(A; R)$ sur $[\sigma] \in C_*(X; R)/C_*(A; R)$ (c'est la flèche (4) passée au quotient). Les lignes sont exactes et on obtient des suites exactes longues :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \dots & \longrightarrow & H_k(A; R) & \longrightarrow & H_k(C_*(A+B; R); R) & \longrightarrow & H_k(C_*(A+B; R)/C_*(A; R); R) & \xrightarrow{\partial} & H_{k-1}(A; R) & \longrightarrow & H_{k-1}(\dots) & & \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow (2) & & \parallel & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & H_k(A; R) & \longrightarrow & H_k(X; R) & \longrightarrow & H_k(X, A; R) & \longrightarrow & H_{k-1}(A; R) & \longrightarrow & H_k(X-1; R) & & \end{array}$$

(4) induit un isomorphisme en homologie et par le lemme des cinq, (2) induit aussi un isomorphisme en homologie. Donc j_* est un isomorphisme en homologie.

Application au calcul de l'homologie locale d'une variété

Soit V une variété topologique de dimension $n \geq 1$. L'homologie locale de V en x est l'homologie $H_*(V, V \setminus \{x\}; R)$

Proposition 4.3.

$$H_i(V, V \setminus \{x\}; R) = \begin{cases} R & \text{si } i = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration : x admet un voisinage W homéomorphe à D^n , on prend $\mathcal{U} = V \setminus W$.

Le théorème d'excision donne :

$$H_k(D^n, D^n \setminus \{0\}; R) \simeq H_k(W, W \setminus \{0\}; R) \xrightarrow{\sim} H_k(V, V \setminus \{x\}; R)$$

On calcule $H_k(D^n, D^n \setminus \{0\}; R)$. On a la suite exacte longue :

$$H_k(D^n; R) \rightarrow H_k(D^n, D^n \setminus \{0\}; R) \xrightarrow{\partial} H_k(D^n \setminus \{0\}; R) \rightarrow H_{k-1}(D^n; R) \rightarrow H_{k-1}(D^n, D^n \setminus \{0\}; R) \rightarrow \dots$$

$$\text{Or } H_k(D^n; R) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \geq 1 \\ R & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Si $k > 1$: $H_k(D^n, D^n \setminus \{0\}; R) \xrightarrow{\partial} H_k(D^n \setminus \{0\}; R) \simeq H_{k-1}(S^{n-1}; R)$ est un isomorphisme. Donc

$$H_k(D^n, D^n \setminus \{0\}; R) = \begin{cases} R & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k \neq n, k > 1 \end{cases}$$

Si $k = 0$:

$$\begin{array}{ccccccc} H_0(D^n) & \longrightarrow & H_0(D^n \setminus \{0\}) & \longrightarrow & H_0(D^n, D^n \setminus \{0\}) & \longrightarrow & 0 \\ \parallel & & \parallel & & & & \\ R & \xrightarrow{=} & R & & & & \end{array}$$

Donc $H_0(D^n, D^n \setminus \{0\}) = 0$

Si $k = 1$: $0 \rightarrow H_1(D^n, D^n \setminus \{0\}; R) \rightarrow H_0(D^n) \hookrightarrow H_0(D^n \setminus \{0\}) \rightarrow 0$ Donc $H_1(D^n, D^n \setminus \{0\}; R) = 0$ sauf si $n = 1$ et alors $H_1(D^n, D^n \setminus \{0\}; R) = R$.

4.5.1 Homologie des complexes cellulaires

Proposition 4.4. Soit $n \geq 1$, $f : S^{n-1} \rightarrow X$ une application continue et notons $Y = X \cup_f D^n$. Alors :

- ▷ Si $k \neq n$ et $k \neq n - 1$ l'inclusion $X \hookrightarrow Y$ induit un isomorphisme $H_k(X; R) \xrightarrow{\sim} H_k(Y; R)$
- ▷ On a une suite exacte :

$$0 \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(Y) \rightarrow H_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{H_{n-1}(f)} H_{n-1}(X) \rightarrow H_{n-1}(Y) \rightarrow 0$$

Démonstration : Écrivons la suite exacte longue de la paire (Y, X) :

$$H_k(X) \rightarrow H_k(Y) \rightarrow H_k(Y, X) \xrightarrow{\partial} H_{k-1}(X) \rightarrow H_{k-1}(Y) \rightarrow H_{k-1}(Y, X)$$

Le morphisme $(D^n, S^{n-1}) \xrightarrow{(j, f)} (Y, X)$ induit un isomorphisme en homologie (théorème d'excision). Le morphisme de paires $(j, f) : (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (Y, X)$ induit un morphisme de suites exactes longues :

$$\begin{array}{ccccccc} H_k(Y) & \xrightarrow{(1)} & H_k(Y, X) & \xrightarrow{\partial} & H_{k-1}(X) & & \\ \uparrow & & \uparrow (2) & & \uparrow H_{k-1}(f) & & \\ H_k(D^n) & \longrightarrow & H_k(D^n, S^{n-1}) & \xrightarrow{\partial} & H_{k-1}(S^{n-1}) & \longrightarrow & H_{k-1}(D^n) \end{array}$$

où $H_k(D^n) = 0$ si $k > 0$

▷ Si $k \neq n$ alors $H_k(Y, X) = 0$ donc si $k \neq n, n - 1$

$$\underbrace{H_k(Y, X)}_0 \rightarrow H_k(X) \rightarrow H_k(Y) \xrightarrow{\partial} \underbrace{H_{k-1}(Y, X)}_0$$

▷ Si $k = n$

$$0 \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(Y) \xrightarrow{\partial \circ (2) \circ (1)} H_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{H_{n-1}(f)} H_{n-1}(X) \rightarrow H_{n-1}(Y) \rightarrow 0$$

Application à l'homologie des surfaces Soit S_g la surface compacte connexe orientée de genre g .

$$S_g \simeq \left(\bigvee_{2g} S^1 \right) \cup_f D^2$$

via $f : S^1 \rightarrow \bigvee_{2g} S^1$ et $\pi_1(f)$ envoie $1 \in \pi_1(S^1)$ sur $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \in \pi_1(\bigvee_{2g} S^1) = \langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g \rangle$ et a_i, b_i sont les générateurs du π_1 correspondant au cercles S^1 du bouquet.

$$H_i(\bigvee S^1; R) = \begin{cases} R & \text{pour } i = 0 \\ R^{2g} & \text{pour } i = 1 \\ 0 & \text{pour } i > 1 \end{cases}$$

en utilisant Mayer Vietoris. Les inclusions $S^1 \hookrightarrow \bigvee_{2g} S^1$ induisent $\bigoplus_{2g} H_i(S^1; R) \xrightarrow{\sim} H_i(\bigvee_{2g} S^1; R)$ pour $i > 0$. Pour calculer $H_*(S_g; R)$, il faut déterminer

$$H_*(f) : H_*(S^1) \rightarrow H_*(\bigvee_{2g} S^1)$$

Lemme 4.19. $H_1(f)$ est l'application nulle

Démonstration : On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^1, 1) & \xrightarrow{\pi_1(f)} & \pi_1(\bigvee_{2g} S^1, \star) \\ \downarrow \mathcal{U} & & \\ \pi_1(S^1, 1)_{ab} & \xrightarrow{\pi_1(f)_{ab}} & \pi_1(\bigvee_{2g} S^1, \star)_{ab} \\ \downarrow (1)h & & \downarrow h \\ H_1(S^1; R) & \xrightarrow{H_1(f)} & H_1(\bigvee_{2g} S^1; R) \end{array}$$

$\pi_1(f)$ est à valeur dans les commutateurs de $\pi_1(\bigvee_{2g} S^1, \star)$ donc $\pi_1(f)_{ab} = 0$. Le générateur de $H_1(S^1; R)$ est dans l'image de (1) donc $H_1(f) = 0$.

Lemme 4.20. L'application $\pi_1(S^1, 1) \rightarrow H_1(S^1; R)$ envoie le générateur de $\pi_1(S^1, 1)$ sur un générateur du R -module $H_1(S^1; R)$.

Démonstration : On utilise Mayer Vietoris sur la décomposition en hémisphères de $S^1 = H^+ \cup H^-$. La suite donne :

$$0 \rightarrow H_1(S^1) \xrightarrow{\partial} H_0(H^+ \cap H^-) \xrightarrow[\simeq \mathbb{Z}^2]{\phi} H_0(H^+) \oplus H_0(H^-)$$

$\text{Ker}(\phi) = \llbracket c_1 - c_2 \rrbracket$, on cherche γ explicite tel que $\partial[\gamma] = \llbracket c_1 - c_2 \rrbracket$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_1(H^+ \cap H^-; R) & \longrightarrow & C_1(H^+; R) \oplus C_1(H^-; R) & \longrightarrow & C_1^{\mathcal{U}}(S^1; R) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C_0(H^+ \cap H^-; R) & \longrightarrow & C_0(H^+; R) \oplus C_0(H^-; R) & \longrightarrow & C_0^{\mathcal{U}}(S^1; R) \longrightarrow 0 \end{array}$$

On pose O (ouest) un point de C_1 et E (est) un point de C_2 . On note γ^+ l'arc orienté de E à O et γ^- celui orienté de O à E .

▷ $\gamma^+ + \gamma^-$ est un cycle de $C_1(S^1; R)$ ($d(\gamma^+ + \gamma^-) = E - E = 0$)

▷ $\partial[\gamma^+ + \gamma^-] = \llbracket O - E \rrbracket$. On écrit la chasse au diagramme dans le diagramme précédent :

$$\begin{array}{ccc} (\gamma^+; \gamma^-) & \longrightarrow & \gamma^+ + \gamma^- \\ \downarrow & & \\ O - E & \longrightarrow & (O - E, E - O) \end{array}$$

On a donc un générateur explicite $\llbracket \gamma^+; \gamma^- \rrbracket$ de $H_1(S^1; R)$. Ce générateur est dans l'image de l'application $\pi_1(S^1, 1) \rightarrow H_1(S^1; R)$ car :

▷ $\gamma^+ \cdot \gamma^-$ est un lacet basé en $1 = E$ qui est un générateur de $\pi_1(S^1, 1)$

▷ $\llbracket \gamma^+ \cdot \gamma^- \rrbracket = \llbracket \gamma^+ + \gamma^- \rrbracket$ car le 2-simplexe σ de S^1 avec $\gamma^+ = \langle 0, 1 \rangle$, $\gamma^- = \langle 1, 2 \rangle$ et $\gamma^+ \cdot \gamma^- = \langle 0, 2 \rangle$ vérifie $d\sigma = \gamma^+ + \gamma^- - \gamma^+ \cdot \gamma^-$ d'où l'égalité.

Proposition 4.5.

$$H_k(S_{2g}; R) = \begin{cases} R & \text{si } k = 2 \\ R^{2g} & \text{si } k = 1 \\ R & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Démonstration : On utilise la proposition précédente pour le calcul.

4.6 Application de l'homologie singulière

4.6.1 Théorème de Brouwer

Théorème 4.9. Une application $f : D^n \rightarrow D^n$ continue admet un point fixe $n \geq 1$.

Démonstration : On suppose qu'on a $f : D^n \rightarrow D^n$ sans point fixe. Alors on peut construire $r : D^n \rightarrow S^{n-1}$ telle que $r|_{S^{n-1}} = id$ en prenant $r(x) = [f(x), x] \cap S^{n-1}$. Mais alors :

$$\begin{array}{ccc} H_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z} & \xrightarrow{H_{n-1}(id)} & H_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z} \\ & \searrow^{H_{n-1}(\hookrightarrow)} & \nearrow^{H_n(r)} \\ & & H_{n-1}(D^n) = 0 \end{array}$$

mais $id_{\mathbb{Z}}$ ne peut pas se factoriser à travers 0.

4.6.2 Théorème d'invariance de la dimension

Théorème 4.10. Soit \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^n , \mathcal{V} un ouvert de \mathbb{R}^m et on suppose que \mathcal{U} et \mathcal{V} sont homéomorphes. Alors $n = m$.

Démonstration : Un homéomorphisme $\phi : \mathcal{U} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}$ induit une application inversible de paires $(\mathcal{U}, \mathcal{U} \setminus \{x\}) \xrightarrow{\phi} (\mathcal{V}, \mathcal{V} \setminus \{\phi(x)\})$ donc :

$$\begin{aligned} \underbrace{H_i(\mathcal{U}, \mathcal{U} \setminus \{x\})}_{= \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq n \\ \mathbb{Z} & \text{si } i = n \end{cases}} &= \underbrace{H_i(\mathcal{V}, \mathcal{V} \setminus \{\phi(x)\})}_{= \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq m \\ \mathbb{Z} & \text{si } i = m \end{cases}} \end{aligned}$$

donc $n = m$.

4.6.3 Théorème de Jordan

Limite directe de R -modules Soit $\dots \rightarrow M^0 \xrightarrow{f^0} M^1 \xrightarrow{f^1} M^2 \rightarrow \dots \rightarrow M^n \xrightarrow{f^n} M^{n+1} \rightarrow \dots$ une suite exacte de R -modules et d'applications linéaires (pas un complexe!).

Définition 4.13. La limite directe de cette suite est le R -module $\varinjlim M^i$ défini par

$$\varinjlim M^i = \bigoplus M^i / N$$

où N est le R -module engendré par les éléments $f^i(x) - x, \forall x \in M^i, \forall i \in \mathbb{N}$.

On note u^i la composée $M^i \hookrightarrow \bigoplus M^i \twoheadrightarrow \varinjlim M^i$

Proposition 4.6 (Propriété universelle). *Pour toute famille d'applications $\phi^i : M^i \rightarrow Q$ R -linéaires tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccccc} M^i & \xrightarrow{f^i} & M^{i+1} & \xrightarrow{f^{i+1}} & M^{i+2} \\ & \searrow \phi^i & \downarrow \phi^{i+1} & \swarrow \phi^{i+2} & \\ & & Q & & \end{array}$$

Il existe un unique $\phi : \varinjlim M^i \rightarrow Q$ tel que $\phi \circ u^i = \phi^i, \forall i$:

$$\begin{array}{ccc} M^i & \xrightarrow{\phi^i} & Q \\ & \searrow u^i & \\ & \varinjlim M^i & \xrightarrow{\exists! \phi} Q \\ & \swarrow u^{i+1} & \\ M^{i+1} & \xrightarrow{\phi^{i+1}} & Q \end{array}$$

Démonstration : en exercice.

Proposition 4.7 (description explicite de $\varinjlim M^i$).

1. $\forall x \in \varinjlim M^i, \exists i, \exists \alpha_i \in M^i$ tel que $u_i(\alpha_i) = x$
2. Si $j > i$, on note $f^{j,i} : M^i \rightarrow M^j$ la composée $M^i \xrightarrow{f^i} M^{i+1} \xrightarrow{f^{i+1}} M^{i+2} \rightarrow \dots \xrightarrow{f^{j-1}} M^j$. Si $\alpha_i \in M^i$ tel que $u^i(\alpha_i) = 0$, alors il existe $j > i$ tel que $f^{j,i}(\alpha_i) = 0$.

Démonstration : On remarque que N est le R -module engendré par les $f^{j,i}(x) - x$ pour $x \in M^i$ et $i < j$.

En effet, $f^{j,i}(\alpha) - \alpha = \sum_{k=i}^{j-1} f^k(f^{k,i}(\alpha)) - f^{k,i}(\alpha)$ avec $f^{k,k}(\alpha) = \alpha$.

Pour (1), si $x \in \varinjlim M^i$, alors x est la classe de $\sum_{\text{finie}} \alpha_i, \alpha_i \in M^i$. Soit i_{\max} le plus grand indice dans la somme. Alors $\forall i$, on a $f^{i_{\max},i}(\alpha_i) - \alpha_i \in N$ donc x est représenté par l'élément :

$$\sum \alpha_i + \sum f^{i_{\max},i}(\alpha_i) - \alpha_i = \underbrace{\sum f^{i_{\max},i}(\alpha_i)}_{\in M^{i_{\max}}}$$

donc $x \in u^{i_{\max}}(\sum f^{i_{\max},i}(\alpha_i))$.

Pour (2), si $\alpha_i \in M^i$ tel que $u^i(\alpha_i) = 0$ alors $\begin{cases} \alpha_i \in M^i \\ \alpha_i \in N \end{cases}$ donc $\alpha_i = \sum_{\text{finie}} f^j(\beta_j) - \beta_j$. Soit t un indice plus grand que i et que les indices j apparaissant dans la somme.

$$\begin{aligned} f^j(\beta_j) - \beta_j &= -f^{t,j}(\beta_j) + f^{t,j}(\beta_j) + f^j(\beta_j) - \beta_j \\ &= (f^{t,j}(\beta_j) - \beta_j) + [f^{t,j+1}(f^j(\beta_j)) - (-(f^j(\beta_j)))] \end{aligned}$$

donc on peut écrire α_i sous la forme :

$$\alpha_i = \sum_{\text{finie}} f^{i,j}(\gamma_j) - \gamma_j$$

avec tous les indices j distincts. L'égalité a lieu dans $\bigoplus M^i$, donc en prenant coordonnées par coordonnées :

- ▷ $\gamma_i = -\alpha_i$
- ▷ $\gamma_j = 0$ si $j \neq i$
- ▷ $\sum_{\text{finie}} f^{t,j}(\gamma_j) = -f^{t,i}(\gamma_i) = 0$ donc $f^{t,i}(\alpha_i) = 0$

Théorème 4.11. Soit X un espace topologique, $X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n \subset \dots$ une suite croissante de sous-espaces tels que :

1. $X = \bigcup X_i$
2. tout ensemble $K \subset X$ quasi-compact est contenu dans un X_k

Alors :

1. $\forall c \in H_i(X; R)$, il existe $\alpha \in H_i(X_k; R)$ tel que l'inclusion $X_k \hookrightarrow X$ envoie α sur c .
2. Si $\alpha \in H_i(X_k; R)$ est envoyé sur $0 \in H_i(X; R)$ par l'inclusion $X_k \hookrightarrow X$ alors il existe $l > k$ tel que l'inclusion $X_k \hookrightarrow X_l$ envoie α sur $0 \in H_i(X_l; R)$.

En particulier $\varprojlim_k H_i(X_k; R) = H_i(X; R)$

Démonstration :

1. Si $[z] \in H_i(X; R)$, $z = \sum \lambda_i \sigma_i$, $\sigma_j : \Delta^i \rightarrow X$ à image quasi-compacte donc il existe l grand tel que $\sigma_j : \Delta^i \rightarrow X_l$ donc $[z] \in H_i(X_l; R)$.
2. Similaire.

4.6.4 Théorème de Jordan

On pose $\widetilde{H}_i(X) = \text{Ker}[H_i(X) \rightarrow H_i(\text{pt})]$, on a alors :

$$\begin{cases} \widetilde{H}_i = H_i(X) & \text{si } i > 0 \\ \widetilde{H}_0 \oplus \mathbb{Z} \simeq H_0(X) \end{cases}$$

Un plongement $f : X \rightarrow Y$ est une application continue injective telle que f induit un homéomorphisme sur son image.

Remarque 4.6.1. Si X est compact et Y séparé, toute application continue $X \rightarrow Y$ est un plongement.

Proposition 4.8. Fixons $n \geq 1$. Supposons que Y est un espace topologique compact qui a la propriété suivante : $\forall f : Y \rightarrow S^n$ plongement, $\forall i, \widetilde{H}_i(S^n \setminus f(Y)) = 0$. Alors $Y \times I$ possède la même propriété.

Démonstration :

- Par l'absurde, supposons qu'il existe $\alpha \in H_i(S^n \setminus f(Y \times I)) \neq 0$.
- On découpe $f(Y \times I)$, on pose :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_0 &= S^n \setminus f(Y \times [0; \frac{1}{2}]) \\ \mathcal{U}_1 &= S^n \setminus f(Y \times [\frac{1}{2}; 1]) \\ \mathcal{U}_0 \cup \mathcal{U}_1 &= S^n \setminus f(Y \times \{\frac{1}{2}\}) \\ \mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1 &= S^n \setminus f(Y \times I) \end{aligned}$$

On sait que $\widetilde{H}_i(S^n \setminus f(Y \times \{\frac{1}{2}\})) = 0$ donc Mayer-Vietoris montre que les injections

$$j_0 : \mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{U}_0 \qquad j_1 : \mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{U}_1$$

induisent un isomorphisme :

$$\widetilde{H}_i(S^n \setminus f(Y \times I)) \xrightarrow{\sim} \widetilde{H}_i(S^n \setminus f(Y \times [0; \frac{1}{2}])) \oplus \widetilde{H}_i(S^n \setminus f(Y \times [\frac{1}{2}; 1]))$$

donc $H_i(j_0)(\alpha) \neq 0$ ou $H_i(j_1)(\alpha) \neq 0$. On suppose par exemple que $H_i(j_0)(\alpha) = \alpha_1 \neq 0$ et on pose $I_1 = [0; \frac{1}{2}]$.

– par découpage successifs, on trouve une suite de segments de longueur $(\frac{1}{2})^k$:

$$I \supset I_1 \supset \dots \supset I_k \supset \dots$$

et une suite de classes $\alpha_k \in H_i(\underbrace{S^n \setminus f(Y \times I_k)}_{V_k :=}) \neq 0$ telles que l'inclusion $j_{k,k+1} : V_k \hookrightarrow V_{k+1}$ envoie α_k

sur α_{k+1} ($H_i(j_{k,k+1})(\alpha_k) = \alpha_{k+1}$)

– Mais, soit $x \in I$ tel que $\{x\} = \bigcap_{k \geq 0} I_k$. Alors : $S^n \setminus f(Y \times \{x\}) = \bigcup_k V_k$ la donnée de la famille des α_k fournit une classe non nulle dans $\tilde{H}(\bigcup V_k)$ mais $\tilde{H}_i(S^{n+1} \setminus f(Y \times \{x\})) = 0$ par hypothèse d'ou l'absurdité.

Corollaire 4.1. *Pour tout $k \geq 0$, et tout plongement $f : D^k \rightarrow S^n$, on a : $\tilde{H}_i(S^n \setminus f(D^k)) = 0 \quad \forall i$*

Démonstration : Par récurrence sur k :

- $D^0 = \{\text{pt}\}$, $S^n \setminus f(\{\text{pt}\})$ est homéomorphe à \mathbb{R}^n , on a donc le cas de base.
- Pour l'hérédité, on démontre l'énoncé suivant :

Théorème 4.12 (Jordan généralisé). *Si $0 \leq r < n$ et si $f : S^r \rightarrow S^n$ est un plongement alors*

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus f(S^r)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = n - r - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Corollaire 4.2. *Si $n \geq 2$, et $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un plongement alors l'ouvert $S^n \setminus f(S^{n-1})$ à deux composantes connexes par arcs.*

Démonstration : (du corollaire) $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ et on note \tilde{f} la composée $S^n \rightarrow \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$. De là, $\tilde{H}_0(S^n \setminus \tilde{f}(S^{n-1})) = \mathbb{Z}$ et $H_0(S^n \setminus \tilde{f}(S^{n-1})) = \mathbb{Z}^2$. Comme $n \geq 2$, l'inclusion $\mathbb{R}^n \setminus f(S^{n-1}) \hookrightarrow S^n \setminus \tilde{f}(S^{n-1})$ induit $H_0(\mathbb{R}^n \setminus f(S^{n-1})) \simeq H_0(S^n \setminus \tilde{f}(S^{n-1})) = \mathbb{Z}^2$. On a donc deux composantes connexes.

Démonstration : (du théorème)

Par récurrence sur r :

▷ $r = 0$: $S^n \setminus f(S^0) = S^n \setminus \{a, b\} \simeq \mathbb{R}^n \setminus \{b\}$ a le type d'homotopie de S^{n-1} d'où l'énoncé.

▷ Hérédité : On découpe $f(S^r)$, $S^r = D_+^r \cup D_-^r$ avec $D_+^r \cap D_-^r = S^{r-1}$ donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_+ &= S^n \setminus f(D_+^r) & \mathcal{U}_- &= S^n \setminus f(D_-^r) \\ \mathcal{U}_+ \cap \mathcal{U}_- &= S^n \setminus f(S^r) & \mathcal{U}_+ \cup \mathcal{U}_- &= S^n \setminus f(S^{r-1}) \end{aligned}$$

$\tilde{H}_i(S^n \setminus f(D^r)) = 0 \forall i$ donc d'après Mayer-Vietoris, on a un isomorphisme :

$$\begin{cases} \tilde{H}_{i+1}(S^n \setminus f(S^r)) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_i(S^n \setminus f(S^{r-1})) \forall i \\ \tilde{H}_0(S^n \setminus f(S^r)) = 0 \end{cases}$$

Si on a prouvé le théorème pour $r - 1$, on en déduit l'énoncé pour r .

4.6.5 Théorème de l'invariance du domaine

Théorème 4.13. *Soient V, W deux variétés topologiques de même dimension $n \geq 1$, $f : V \rightarrow W$ une application continue, injective. Alors f est une application ouverte.*

Démonstration :

- En prenant des ouverts de V et W homéomorphes à \mathbb{R}^n , on réduit la démonstration au cas où $V = W = \mathbb{R}^n$. Le cas $n = 1$ est une application du TVI.
- On suppose $n \geq 2$. Il faut montrer que $\forall B = \mathcal{B}(a, \epsilon) \subset \mathbb{R}^n, f(B)$ est un ouvert de \mathbb{R}^n

prendre la fin de la preuve

5 Cohomologie

5.1 Définition et calculs

5.1.1 Complexes de cochaines

Définition 5.1. 1. Un complexe de cochaines de R -modules est une paire

$$((M^i)_{i \geq 0}, (d^i)_{i \geq 0})$$

où

- M^i sont des R -modules
 - $d^i : M^i \rightarrow M^{i+1}$ sont des applications R -linéaires et $\forall i, d^{i+1} \circ d^i = 0$
2. Un morphisme de cochaines $f^* : C^* \rightarrow D^*$ est une famille d'applications $f^i : C^i \rightarrow D^i$ telles que $d \circ f^i = f^{i+1} \circ d$

$$\begin{array}{ccc} C^{i+1} & \xrightarrow{f^{i+1}} & D^{i+1} \\ \uparrow d & & \uparrow d \\ C^i & \xrightarrow{f^i} & D^i \end{array}$$

3. On note $Ch^{\geq 0}(R\text{-mod})$ la catégorie des complexes de cochaines de $R\text{-mod}$.

Exemple : Soit R un anneau commutatif, (C_*, d_*) un objet de $Ch_{\geq 0}(R\text{-mod})$

rattrapper

Définition 5.2. Soient \mathcal{C} et \mathcal{D} deux catégories, un foncteur contravariant est la donnée :

- Pour chaque objet X de \mathcal{C} , un objet $F(X)$ de \mathcal{D}
- Pour chaque morphisme $f : X \rightarrow Y$, un morphisme $F(f) : F(Y) \rightarrow F(X)$ tel que :
 1. $F(id_X) = id_{F(X)}$
 2. $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$

manque un exemple et un diagramme

Définition 5.3. Soit C^* un complexe de cochaines de R -modules. On note $H^i(C^*) = Z^i/B^i$ le $i^{\text{ème}}$ R -module de cohomologie où

$$\begin{aligned} Z^i &= Ker[d^i : C^i \rightarrow C^{i+1}] \subset C^i \\ B^i &= Ker[d^{i-1} : C^{i-1} \rightarrow C^i] \subset C^i \end{aligned}$$

avec la convention $d^{-1} = 0, f^* : C^{star} \rightarrow D^*$ induit des applications R -linéaires

$$H^i(f) : \begin{cases} H^i(C^*) & \longrightarrow & H^i(D^*) \\ [z] & \longmapsto & [f(z)] \end{cases}$$

Définition 5.4. $f^*, g^* : C^* \rightarrow D^*$ sont homotopes s'il existe une famille $h^i : C^i \rightarrow C^{i-1}, i \geq 1$ ($h^0 = 0$ par convention) telle que :

$$f_i - g_i = h^{i+1} \circ d + d \circ h^i$$

$$\begin{array}{ccc}
C^{i+1} & \longrightarrow & D^{i+1} \\
& \nearrow h^{i+1} & \\
C^i & \xrightarrow{f^i - g^i} & D^i \\
& \searrow h^i & \\
C^{i-1} & & D^{i-1}
\end{array}$$

Lemme 5.1. Si f^* et g^* sont homotopes alors $\forall i, H_i(f) = H_i(g)$

Exemple : Si $f_*, g_* : C_* \rightarrow D_*$ sont homotopes via h alors $Hom_R(f_*, R), Hom_R(g_*, R) : Hom_R(D_*, R) \rightarrow Hom_R(C_*, R)$ sont aussi homotopes, via l'homotopie $Hom_R(h, R)$.

Définition 5.5. Une suite exacte courte de complexes de cochaines est une suite :

$$0 \rightarrow A^* \xrightarrow{f^*} B^* \xrightarrow{g^*} C^* \rightarrow 0$$

telle que $\forall i$ la suite suivante de R -modules est exacte

$$0 \rightarrow A^i \xrightarrow{f^i} B^i \xrightarrow{g^i} C^i \rightarrow 0$$

Proposition 5.1. Soit $0 \rightarrow C \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} A \rightarrow 0$ une suite exacte courte de R -modules, avec A libre. Alors la suite suivante est exacte :

$$0 \rightarrow Hom(A, R) \xrightarrow{-\circ f} Hom(B, R) \xrightarrow{-\circ g} Hom(C, R) \rightarrow 0$$

En particulier, le foncteur $Hom(-, R)$ transforme un complexe de chaines

compléter

Remarque 5.1.1. $R = \mathbb{Z}, 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow 0$

compléter

Démonstration : $0 \rightarrow C \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} A \rightarrow 0$ est une suite exacte courte. Alors $0 \rightarrow Hom(A, R) \xrightarrow{-\circ f} Hom(B, R) \xrightarrow{-\circ g} Hom(C, R) \rightarrow 0$ est exacte. En effet, $-\circ g$ est injective : Si $\phi : A \rightarrow R$ telle que $\phi \circ g = 0$

prendre la fin de la preuve

Théorème 5.1. Si $0 \rightarrow A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \rightarrow 0$ une suite exacte courte, alors on a une suite exacte longue

$$0 \rightarrow H^0(A^*) \rightarrow H^0(B^*) \rightarrow H^0(C^*) \xrightarrow{\partial} H^1(A^*) \rightarrow H^1(B^*) \rightarrow \dots$$

5.1.2 Cohomologie singulière et outils de calcul

Définition 5.6. Soit X un espace topologique, et R un anneau

– le complexe des cochaines singulières est défini par :

$$C^*(X; R) := Hom_R(C_*(X; R), R)$$

– Version relative :

$$C^*(X, A; R) := Hom_R(C_*(X, A; R), R)$$

– La cohomologie singulière de X est :

$$\begin{aligned}
H^i(X; R) &= H^i(C^*(X; R)) \\
H^i(X, A; R) &= H^i(C^{star}(X, A; R), R)
\end{aligned}$$

– H^i définit des foncteurs contravariants

$$\begin{aligned} H^i &: \text{Top} \rightarrow R\text{-mod} \\ H^i &: \underbrace{\mathcal{P}}_{\text{paires d'espaces}} \rightarrow R\text{-mod} \end{aligned}$$

Théorème 5.2 (Boîte à outils). 1. Si $f, g : X \rightarrow Y$ sont homotopes, alors

$$H^i(f) = H^i(g) : H^i(Y; R) \rightarrow H^i(X; R)$$

En particulier : $H^i(X; R)$ ne dépend que du type d'homotopie de X .

2. Si $A \subset X$ on a une suite exacte longue :

$$0 \rightarrow H^0(X, A; R) \rightarrow H^0(X; R) \rightarrow H^0(A; R) \xrightarrow{\partial} H^1(X, A; R) \rightarrow H^1(X; R) \rightarrow \dots$$

3. Si $\mathcal{U} \subset A \subset X$ avec $\bar{\mathcal{U}} \subset \overset{\circ}{A}$, alors l'inclusion $(X \setminus \mathcal{U}, A \setminus \mathcal{U}) \hookrightarrow (X, A)$ induit un isomorphisme :

$$\forall i, H^i(X, A; R) \xrightarrow{\sim} H^i(X \setminus \mathcal{U}, A \setminus \mathcal{U}; R)$$

4. Si \mathcal{U}, \mathcal{V} sont deux ouverts, avec $\mathcal{U} \cup \mathcal{V} = X$, alors on a une suite exacte longue :

$$0 \rightarrow H^0(X; R) \xrightarrow{H^0(j_{\mathcal{U}}) - H^0(j_{\mathcal{V}})} H^0(\mathcal{U}; R) \oplus H^0(\mathcal{V}; R) \xrightarrow{H^0(i_{\mathcal{U}}) + H^0(i_{\mathcal{V}})} H^0(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}; R) \xrightarrow{\partial} H^1(X; R)$$

Démonstration :

- $f, g : X \rightarrow Y$ sont homotopes $\implies f_*, g_* : C_*(X) \rightarrow C_*(Y)$ sont homotopes $\implies f^*, g^{star} : C^*(Y) \rightarrow C^{star}(X) \implies H^i(f) = H^i(g)$.
- Si $A \subset X$, on a une suite exacte courte de complexes de R -modules libres :

$$0 \rightarrow C_*(A) \rightarrow C_*(X) \rightarrow C_*(X)/C_*(A) \rightarrow 0$$

d'où en dualisant une suite exacte courte :

$$0 \rightarrow C^*(X, A) \rightarrow C^*(X) \rightarrow C^*(A) \rightarrow 0$$

d'où la suite exacte longue.

3.

Lemme 5.2. Si C_* est un complexe de chaînes de R -modules libres, qui est exact ($H_i(C_*) = 0, \forall i \geq 0$). Alors $\text{Hom}_R(C_*; R)$ est exact ($H^i = 0 \forall i$)

Démonstration :

– Comme $0 \rightarrow Z_1 \xrightarrow{i_1} C_1 \xrightarrow{d} C_0 \rightarrow 0$ avec C_0 libre, on peut trouver une section $s_0 : C_0 \rightarrow C_1$ de d , d'où un isomorphisme :

$$C_0 \oplus Z_1 \xrightarrow{\sim} C_1$$

– On répète la même opération avec la suite exacte $0 \rightarrow Z_2 \xrightarrow{i_2} C_1 \xrightarrow{d} Z_1 \rightarrow 0$. En effet, Z_1 est un facteur direct de C_1 libre ce qui est suffisant pour construire une section $s_1 : Z_1 \rightarrow C_1$ de $d : C_1 \rightarrow Z_1$ donc

$$Z_1 \oplus Z_2$$

revoir le
bout suivant
et compléter

Retour à 3) : On a une suite exacte courte de complexes de R -modules libres :

$$(1) \quad 0 \rightarrow C_*(X \setminus \mathcal{U}, A \setminus \mathcal{U}) \xrightarrow{(a)} C_*(X, A) \rightarrow \overbrace{C_*(X, A)/C_*(X \setminus \mathcal{U}, A \setminus \mathcal{U})}^{D_*}$$

donc une suite exacte courte de complexes de cochaînes de R -modules libres :

$$(2) \quad 0 \rightarrow \text{Hom}_R(D_*, R) \rightarrow C^*(X, A) \xrightarrow{(b)} C^*(X \setminus \mathcal{U}, A \setminus \mathcal{U}) \rightarrow 0$$

- (a) est un isomorphisme en homologie (on applique l'excision pour H_*) donc pour la suite longue associée à (1), $H_i(D_*) = 0, \forall i$.
- Donc par le lemme $H^i(\text{Hom}_R(D_*, R)), \forall i$
- Donc par la suite longue associée à (2), (b) induit un isomorphisme en cohomologie.

4.

manque un lemme

Démonstration : On a une suite exacte courte de complexes de chaînes de R -modules libres :

$$(1) \quad C_*^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{(a)} C_*(X) \rightarrow \underbrace{C_*(X)/C_*^{\mathcal{U}}(X)}_{D_*} \rightarrow 0$$

qui induit une suite exacte courte

$$(2) \quad 0 \rightarrow \text{Hom}(D_*, R) \rightarrow C^*(X; R) \xrightarrow{(b)} C_{\mathcal{U}}^{star}(X; R) \rightarrow 0$$

- (a) est un isomorphisme en homologie (on applique le théorème des chaînes \mathcal{U} -petites) donc pour la suite longue associée à (1), $H_i(D_*) = 0, \forall i$.
- Donc par le lemme $H^i(\text{Hom}_R(D_*, R)), \forall i$
- Donc par la suite longue associée à (2), (b) induit un isomorphisme en cohomologie.

manque un bout

On pose

$$\tilde{H}^i(X; R) = H^i(X; R)/\phi^*(H^i(\{\text{pt}\}; R))$$

où $\phi^* : H^i(\{\text{pt}\}, R) \rightarrow H^i(X; R)$ est l'application induite par $X \rightarrow \{\text{pt}\}$. En particulier

$$\tilde{H}^i(X; R) = H^i(X; R) \quad i > 0 \quad \tilde{H}^0 \oplus R = H^0(X; R)$$

et si $\mathcal{U} \cup \mathcal{V} = X$, \mathcal{U} et \mathcal{V} des ouverts de X , on a une suite longue

$$0 \rightarrow \tilde{H}^0 \rightarrow \tilde{H}^0(\mathcal{U}) \oplus \tilde{H}^0(\mathcal{V}) \rightarrow \tilde{H}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}^1(X)$$

Exemples : (de calculs)

$$- \tilde{H}^i(\mathbb{R}^n) = \tilde{H}^i(\{\text{pt}\})$$

compléter

Démonstration :

- C'est vrai pour S^0 qui est l'union disjointe de deux points
- Si c'est vrai pour S^n , $S^{n+1} = \mathcal{U}^+ \cup \mathcal{U}^-$

rattraper la fin

Exts

Définition 5.7. Une résolution libre d'un R -module M est un complexe L_* de R -modules libres, tel que

$$H_i(L_*) = 0 \forall i > 0, H_0(L_*) = M$$

Exemple :

▷ $R = \mathbb{Z}$, $\underbrace{\mathbb{Z}}_{L_1} \xrightarrow{\times n} \underbrace{\mathbb{Z}}_{L_0}$ est une résolution libre de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. En général, on a une résolution libre :

$$\text{Ker}[\pi] = L_i \xrightarrow{d} L_0 \xrightarrow{\pi} M$$

où L_0 est le \mathbb{Z} -module libre engendré par les générateurs de M .

▷ Si R est quelconque :

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Ker}[\pi] = K_0 \hookrightarrow L_0 \xrightarrow{\pi} M \\ & & \text{Ker}[\pi_1] = K_1 \hookrightarrow L_1 \xrightarrow{\pi_1} L_0 \\ K_2 \hookrightarrow & L_1 & \xrightarrow{d} L_0 \\ & \searrow \pi_1 & \nearrow \\ & & K_1 \end{array}$$

doit man-
quer une ou
deux choses

Proposition 5.2. Soit $f : M \rightarrow N$ une application R -linéaire et L_\star^M, L_\star^N des résolutions libres de M et N . Alors :

1. Il existe un relèvement \overline{f}_\star de f au niveau des résolutions, c'est à dire : $\overline{f}_\star : L_\star^M \rightarrow L_\star^N$ tel que $H_0(\overline{f}_\star) = f$
2. deux relèvements $\overline{f}_\star, \tilde{f}_\star$ sont homotopes

Corollaire 5.1. Si L_\star et L'_\star sont deux résolutions libres d'un R -module M , alors L_\star et L'_\star sont homotopiquement équivalentes.

Démonstration :

1. Existence de \overline{f}_1 : Étape 0 :

$$\begin{array}{ccc} L_0^M & \xrightarrow{\overline{f}_0} & L_0^N \\ q_M \downarrow & & \downarrow q_N \\ H_0(L_\star^M) = M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

L_0^M est un R -module libre et q_N est surjective donc il existe une application \overline{f}_0 tel que $f \circ q_N = q_M \circ \overline{f}_0$

Étape 1 :

$$\begin{array}{ccc} L_1^M & \xrightarrow{\overline{f}_1} & L_1^N \\ d^M \downarrow & & \downarrow d^N \\ B_0^M & \xrightarrow{\overline{f}_0} & B_0^N \end{array}$$

manque un
tableau

▷ L_1^M est libre et d^N surjective donc il existe \overline{f}_1

▷ Comme (D1) commute, $\overline{f}_1(Z_1^M) \subset Z_1^N$ Mais L_\star^M et L_\star^N sont des résolutions donc $\begin{cases} Z_1^M = B_1^M \\ Z_1^N = B_1^N \end{cases}$ En itérant, on construit un morphisme de complexes :

$$\overline{f}_\star : L_\star^M \rightarrow L_\star^N$$

La commutativité de (D0) montre que $H_0(\overline{f}_\star) = f$

2. Unicité à homotopie près :

- ▷ Si $\overline{f}_*, \widetilde{f}_*$ sont deux relèvements, alors $g_* = \overline{f}_* - \widetilde{f}_*$ est un relèvement de l'application nulle. Pour montrer (2), il suffit de montrer que g_* est homotope à $0_* : L_*^M \rightarrow L_*^N$
- ▷ Étape 0 :
- ▷ Étape 1 :

Définition 5.8. Si M, N sont des R -modules, on définit

$$Ext_R^i(M, N) = H^i(Hom_R(L_*^M, N))$$

où L_*^M est une résolution libre de M .

Exemples :

- ▷ Si $R = \mathbb{K}$ est un corps alors

$$\begin{aligned} Ext_{\mathbb{K}}^0 &= Hom_{\mathbb{K}}(M, N) \\ Ext_{\mathbb{K}}^i &= 0 \quad i > 0 \end{aligned}$$

En effet, le complexe $L_*^M = \dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow M = L_0$ est une résolution libre de M .

- ▷ Si R est un anneau principal alors

$$\begin{aligned} Ext_R^0(M, N) &= Hom_R(M, N) \\ Ext_R^1(M, N) &=? \\ Ext_R^i(M, N) &= 0 \quad \forall i \geq 2 \end{aligned}$$

En effet, on utilise une résolution libre de M de la forme $L_1 \rightarrow L_0$

- ▷ Dans le cas $R = \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} Ext_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}/\text{pgcd}(m, n)\mathbb{Z} \\ Ext_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}, M) &= 0 \\ Ext_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Théorème des coefficients universels Soit R un anneau commutatif, C_* un complexe de chaînes de R -modules, M un R -module.

$$\Phi : \begin{cases} H^i(Hom_R(C_*, M)) & \longrightarrow & Hom_R(H_i(C_*), M) \\ \underbrace{[f]}_{\substack{f: C_i \rightarrow M \text{ } R\text{-linéaire} \\ f \circ d^C = 0}} & \longmapsto & \Phi[f] : \begin{cases} H_i(C_*) & \longrightarrow & M \\ [z] & \longmapsto & f(z) \end{cases} \end{cases}$$

Remarque 5.1.2. Φ est bien définie

- ▷ pour f donnée, $[z] = [z']$ alors $z = z' + d^C x$ donc $f(z) = f(z') + \underbrace{f(d^C x)}_{=0}$ (car f cycle)

- ▷ Si $[f] = [g]$ alors $f = g + h \circ d^C$ où le dernier terme est un bord de $Hom_R(C_*, M)$ donc $f(z) = g(z) + \underbrace{h(d^C z)}_{=0}$ car z est un cycle

Théorème 5.3. Si R est un anneau principal, si C_* est un complexe de R -modules libres, alors, on a une suite exacte courte $\forall i$

$$0 \rightarrow Ext_R^1(H_{i-1}(C_*), M) \rightarrow H^i(Hom_R(C_*, M)) \xrightarrow{\Phi} Hom_R(H_i(C_*), M) \rightarrow 0$$

(avec la convention $H_{-1}(C_*) = 0$) de plus, Φ admet une section, et on a donc un isomorphisme :

$$H^i(Hom_R(C_*, R)) \simeq Hom_R(H_i(C_*), M) \oplus Ext^1(H_{i-1}(C_*), M)$$

Corollaire 5.2. Si (X, A) est une paire d'espaces, on a des isomorphismes :

Si \mathbb{K} est un corps :

$$H^i(X, A; \mathbb{K}) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{K}}(H_i(X, A; \mathbb{Z}), \mathbb{K})$$

En général :

$$H^i(X, A; R) \simeq \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_i(X, A; \mathbb{Z}), R) \oplus \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_i(X, A; \mathbb{Z}), R)$$

Exemple : On sait que

$$H_i(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & i = 1 \\ 0 & i > 1 \end{cases}$$

Alors

$$H^i(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0 \\ 0 & i = 1 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & i = 2 \\ 0 & i > 2 \end{cases}$$

$$H^i(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & i = 0, 1, 2 \\ 0 & i > 2 \end{cases}$$

Démonstration : Comme C_* est un complexe de R -modules libres, et R est principal, les R -modules Z_i, B_i et C_i sont libres $\forall i$.

Étape 1 : Φ admet une section ($\exists s$ tel que $\Phi \circ s = Id$) donc elle est surjective.

1. _____
2. une fonction $f \in \text{Hom}_R(H_i(C_*), M)$ est une fonction $f : Z_i \rightarrow M$ telle que $f|_{B_i} = 0$. On pose

$$s : \begin{cases} \text{Hom}_R(H_i(C_*), M) & \longrightarrow & H^i(\text{Hom}_R(C_*, M)) \\ f & \longmapsto & [f \circ \pi] \end{cases}$$

Cette formule à un sens car $f \circ \pi$ est un cycle, car $f \circ \pi \circ d^C = 0$ car $\text{Im}[d^C] = B_i$ et $f|_{B_i} = 0$

$\Phi \circ$

compléter

compléter !

Étape 2 : Le complexe $B_{i-1} \hookrightarrow Z_{i-1}$ est une résolution libre de $H_{i-1}(C_*)$ donc on a une suite exacte :

$$\text{Hom}_R(Z_{i-1}, M) \rightarrow \text{Hom}_R(B_{i-1}, M) \rightarrow \text{Ext}_R^1(H_{i-1}(C_*), M) \rightarrow 0$$

Le complexe $0 \rightarrow Z_i \rightarrow C_i \xrightarrow{d} B_{i-1} \rightarrow 0$ est un complexe exact de R -modules libres donc on a une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(B_{i-1}, M) \rightarrow \text{Hom}_R(C_i, M) \rightarrow \text{Hom}_R(Z_i, M) \rightarrow 0$$

vérifier qu'il ne manque rien

On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & & \uparrow \\
 & & & & & & \text{Ext}_R^1(H_{i-1}(C_\star), M) \\
 & & & & & & \uparrow \\
 & & & & & & \text{Hom}_R(B_{i-1}, M) \\
 & & & & & & \uparrow \chi_2 \\
 & & & & & & \text{Hom}_R(Z_{i-1}, M) \longrightarrow 0 \\
 & & & & & & \uparrow \\
 & & & & & & \text{Hom}_R(C_{i-1}, M) \xrightarrow{\chi_1} \text{Hom}_R(Z_{i-1}, M) \longrightarrow 0 \\
 & & & & & & \uparrow \delta \\
 & & & & & & \text{Hom}_R(C_i, M) \\
 & & & & & & \uparrow \delta \\
 & & & & & & \text{Hom}(C_{i+1}, M) \\
 & & & & & & \uparrow \\
 & & & & & & \text{Hom}_R(Z_i, M) \longleftarrow \text{Hom}_R(C_i, M) \longleftarrow \text{Hom}_R(B_{i-1}, M) \longrightarrow 0 \\
 & & & & & & \uparrow \\
 & & & & & & 0
 \end{array}$$

où δ est la différentielle de $\text{Hom}_R(C_\star, M)$

On définit

$$\mu : \begin{cases} \text{Ext}_R^1(H_{i-1}(C_\star), M) & \longrightarrow & H^i(\text{Hom}_R(C_\star, M)) \\ \alpha & \longmapsto & [\tilde{\alpha} \circ d] \end{cases}$$

μ est bien définie : μ est injective :

$$\begin{aligned}
 (\tilde{\alpha} \circ d) = 0 &\iff \tilde{\alpha} \circ d = \delta \tilde{\beta} \\
 &\implies \tilde{\alpha} = \chi_2 \chi_1(\tilde{\beta}) \\
 &\alpha = 0
 \end{aligned}$$

manque la fin de la chasse

finish him !

5.2 Cup produits

5.2.1 Algèbres différentielles graduées

Définition 5.9. – Une R -algèbre graduée est un R -module gradué

$$A^\star = \bigoplus_{i \geq 0} A^i$$

(les éléments de A^i sont dits de degré i) muni d'un produit $A^\star \times A^\star \rightarrow A^\star$ associatif (R -bilineaire) tel que $A^i \cdot A^j \subset A^{i+j}$

– A^\star est graduée commutative si $\forall a \in A^i, \forall b \in A^j, ab = (-1)^{ij} ba$

Exemples :

1. $R[x_1, \dots, x_n]$ où l'on décrète que :

$$\text{deg}(\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i d_i$$

où d_1, \dots, d_n sont des entiers positifs fixés. C'est une algèbre graduée, graduée commutative si tous les d_i sont pairs.

2. $\Lambda_R[x_1, \dots, x_n]$ l'algèbre extérieure engendrée par x_1, \dots, x_n où l'on décrète que

$$\text{deg}(\bigwedge_{j=1}^k x_{i_j}) = \sum d_{i_j}$$

où d_1, \dots, d_n sont des entiers positifs fixés. C'est une algèbre graduée, graduée commutative si les α_i sont impairs.

Définition 5.10. Une R -algèbre différentielle graduée est un triplet (A^*, d, \cdot) où

1. (A^*, d) est un complexe de cochaines de R -modules
2. (A^*, \cdot) est une R -algèbre graduée
3. d est une *dérivation* c'est à dire qui vérifie

$$d(ab) = d(a)b + (-1)^i ad(b)$$

Lemme 5.3. Si (A^*, d, \cdot) est une ADG, alors la formule :

$$f \text{ undefanon } H^i(A^*) \times H^j(A^*) \rightarrow H^{i+j}(A^*)$$

Démonstration :

1. Si $\alpha \in Z^i, b \in Z^j$ alors $ab \in Z^{i+j}$ car $d(ab) = d(a)b + (-1)^i ad(b) = 0$ donc $Z^* \subset A^*$
2. B^* forme un idéal de Z^* : Si $a \in Z^i, b \in B^j$ alors $b = dc$ et $d(ac) = \underbrace{(da)}_{=0} c + (-1)^i a \underbrace{dc}_{=b}$

compléter
ci-dessus

5.2.2 Cup produit

Soit (X, A) une paire d'espaces topologiques, R un anneau commutatifs,

– Pour $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ on note $\sigma_{|[e_{i_0}, \dots, e_{i_k}]}$ la composée :

$$\Delta^k \xrightarrow{e_j \mapsto e_{i_j}} \Delta^n \xrightarrow{\sigma} X$$

– On définit un cup-produit :

$$\vee : \begin{cases} C^k(X; R) \times C^l(X; R) & \longrightarrow C^{k+l}(X; R) \\ (f, g) & \longmapsto f \vee g \end{cases}$$

où pour $\sigma : \Delta^{k+l} \rightarrow X$,

$$(f \vee g)(\sigma) = f(\sigma_{|[e_1, \dots, e_k]}) \cdot g(\sigma_{|[e_{k+1}, \dots, e_{k+l}]})$$

– Comme $C^k(X, A; R)$ est le R -module des fonctions $f : C_i(X) \rightarrow R$ telles que f s'annule sur $C_i(A)$, le cup produit induit

$$\vee : \begin{cases} C^k(X, A; R) \times C^l(X, A; R) & \longrightarrow C^{k+l}(X, A; R) \\ (f, g) & \longmapsto f \vee g \end{cases}$$

– Dans la suite, on note

- d la différentielle de $C_*(X, A; R)$
- δ la différentielle de $C^*(X, A; R)$
- $d^i : \Delta^n \rightarrow \Delta^{n+1}$ l'inclusion $\Delta^n \simeq \partial_i \Delta^{n+1} \hookrightarrow \Delta^{n+1}$

Proposition 5.3. $(C^*(X, A; R), \delta, \vee)$ est une R -ADG. En particulier $H^*(X, A; R) = \bigoplus_{i \geq 0} H^i(X, A; R)$ est une R -algèbre avec le produit $[f] \vee [g] = [f \vee g]$.

vérifier

Démonstration : Il suffit de vérifier que δ est une dérivation. Soit $f \in C^k(X, A; R)$ et $g \in C^l(X, A; R)$

$$\begin{aligned} [\delta(f \vee g)](\sigma) &= (f \vee g)(d\sigma) \\ &= \sum_{i=0}^{k+l+1} (-1)^i (f \vee g)(\sigma \circ d^i) \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i f_{[[e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{k+1}]]} g(\sigma_{[[e_{k+1}, \dots, e_{k+l+1}]]}) + \sum_{i=k+1}^{k+l+1} (-1)^i f_{[[e_0, \dots, e_{k+1}]]} g(\sigma_{[[e_{k+1}, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{k+l+1}]]}) \end{aligned}$$

D'autre part

$$[\delta(f) \vee g](\sigma)$$

terminer les calculs

Proposition 5.4. Si $\Phi : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ est un morphisme de paires, alors

$$H^*(\Phi) : H^*(Y, B; R) \rightarrow H^*(X, A; R)$$

est un morphisme de R -algèbres.

Démonstration : Si $f \in C^k(Y, B)$ et $g \in C^l(Y, B)$ alors $\Phi^*(f \vee g) = \Phi^*(f) \vee \Phi^*(g)$. En effet :

$$\begin{aligned} [(\Phi^* f) \vee (\Phi^* g)](\sigma) &= (\Phi^* f)(\sigma_{[[e_1, \dots, e_k]]}) \cdot (\Phi^* g)(\sigma_{[[e_{k+1}, \dots, e_{k+l+1}]]}) \\ &= f(\Phi \circ \sigma_{[[e_1, \dots, e_k]]}) \circ g(\Phi \circ \sigma_{[[e_{k+1}, \dots, e_{k+l+1}]]}) \\ &= (f \vee g)(\Phi \circ \sigma) \\ &= \Phi^*(f \vee g)(\sigma) \end{aligned}$$

Théorème 5.4. L'algèbre $H^*(X, A; R)$ est graduée commutative.

Démonstration : Cas où $A = \emptyset$: On définit $\rho : C_n(X) \rightarrow C_n(X)$ par $\rho(\sigma) = \epsilon_n \sigma_{[[e_n, \dots, e_0]]}$ où $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ et $\epsilon_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

1. ρ est un morphisme de complexes de chaînes
2. ρ est homotope à l'identité : On utilise la décomposition du prisme $\Delta^n \times I$ avec w_0, \dots, w_n les sommets de $\Delta^n \times \{1\}$ et v_0, \dots, v_n les sommets de $\Delta^n \times \{0\}$. On définit

$$h_n : \begin{cases} C_n(X) & \longrightarrow & C_{n+1}(X) \\ \sigma & \longmapsto & \sum_{i=0}^n (-1)^i \epsilon_{n-i} (\sigma \circ \pi)_{[[v_0, \dots, v_i, w_w, \dots, w_i]]} \end{cases}$$

Alors $dh + hd = \rho - Id$ (par un calcul similaire à celui déjà utilisé avec la décomposition du prisme)

3. $\rho^* : C^*(X) \rightarrow C^*(X)$
 - est homotope à Id donc induit Id en cohomologie.
 - Si $f \in C^k(X; R)$ et $g \in C^l(X, R)$, alors $\rho^*(g \vee f) = (-1)^{kl} \rho^*(f) \vee \rho^*(g)$

rattraper les calculs

Théorème 5.5 (admis).

$$\begin{aligned} H^*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) &\simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]/x^{n+1} \text{ avec } \deg x = 1 \\ H^*(\mathbb{C}P^n, R) &\simeq R[x]/x^{n+1} \text{ avec } \deg x = 2 \end{aligned}$$

rattraper la fin

Exemple d'application :

Lemme 5.4 (Exercice). Soient $f, g : S^{n-1} \rightarrow X$ continues, homotopes. $X \cup_f D^n$ et $X \cup_g D^n$ sont homotopiquement équivalents.

On a vu en TD que $\mathbb{C}P^2 \underset{\text{homéo}}{\simeq} S^2 \cup_H D^4$ où D^4 est attaché via l'application de Hopf $H : S^3 \rightarrow S^2$.

Proposition 5.5. L'application de Hopf n'est pas homotopiquement triviale.

Démonstration : Par l'absurde, si H était homotope à une application constante, alors $\mathbb{C}P^2$ aurait le type d'homotopie de $S^2 \vee S^4$. Or $\phi : S^2 \vee S^4 \rightarrow S^2$ l'inclusion naturelle induit un morphisme d'anneaux $H^*(\phi^*) : H^*(S^2) \rightarrow H^*(S^2 \vee S^4)$ qui est (en utilisant Mayer-Vietoris) injectif et un isomorphisme en H^2 . Dans $H^*(S^2)$, si $\text{deg}_z = 2$ alors $z \vee z = 0$ donc de même dans $H^*(S^2 \vee S^4)$. Or ce n'est pas le cas dans $H^*(\mathbb{C}P^2)$ donc $S^2 \vee S^4$ et $\mathbb{C}P^2$ n'ont pas le même type d'homotopie.

5.3 (Co)Homologie des variétés topologiques

5.3.1 Orientation

Orientation locale

Remarque 5.3.1.

$$H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; R) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq n \\ R & \text{si } i = n \end{cases}$$

$f \in Gl_n(\mathbb{R})$ induit un $H_n(f) : H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; R) \rightarrow H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; R)$

Proposition 5.6. Soit $f \in Gl_n(\mathbb{R}), x \in H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; R), n \geq 1$, alors

$$H_n(f)(x) = \begin{cases} x & \text{si } \det(f) > 0 \\ -x & \text{si } \det(f) < 0 \end{cases}$$

Démonstration : $Gl_n(\mathbb{R}) = Gl_n^+(\mathbb{R}) \amalg Gl_n^-(\mathbb{R})$ où les deux composantes sont connexes par arcs. SI γ est un chemin dans $Gl_n(\mathbb{R})$ entre f et g , alors :

$$h : \begin{cases} \mathbb{R}^n \times I & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x, t) & \longmapsto & \gamma(t)(x) \end{cases}$$

h est une homotopies de paires entre f et g donc $H_n(f) = H_n(g)$.

Si $f \in Gl_n^+(\mathbb{R})$, alors $f \sim Id$, donc $H_1(f) = Id$.

Si $f \in Gl_n^-(\mathbb{R})$, alors $f \sim k_n$ où k_n est la réflexion orthogonale d'hyperplan $\{x_1 = 0\}$. k_n induit un morphisme de paires $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ donc un morphisme entre suites exactes longues.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow H_n(k_n) & & \downarrow \tilde{H}_{n-1}(k_n) & & \\ \emptyset & & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) & \xrightarrow{\sim} & \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Si $n = 1$, on calcule explicitement $\tilde{H}_0(k_1) = 0$. Sinon $n > 1$, on se ramène au cas $n - 1$. Soit $\epsilon > 0$, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} = \underbrace{\{x_n > -\epsilon\}}_{E^+} \cup \underbrace{\{x_n < \epsilon\}}_{E^-}$. $k_n(E^+) \subset E^-$ et $k_n(E^-) \subset E^+$ donc k_n induit un morphisme entre les suites longues de Mayer-Vietoris.

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) & \xrightarrow{\sim} & \tilde{H}_{n-2}(E^+ \cap E^-) & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow \tilde{H}_{n-1}(k_n) & & \downarrow \tilde{H}_{n-2}(k_n) & & \\
& & \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) & \xrightarrow{\sim} & \tilde{H}_{n-2}(E^+ \cap E^-) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

et on a un diagramme commutatif : $E^+ \cap E^- = \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \cap \mathbb{R}^{n-1} \times]-\epsilon; \epsilon[$, l'inclusion $\mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\} \hookrightarrow E^+ \cap E^-$ est une équivalence d'homotopie et $k_n|_{\mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}} = k_{n-1}$. Donc

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{H}_{n-2}(E^+ \cap E^-) & \xleftarrow{\sim} & \tilde{H}_{n-2}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \\
\tilde{H}_{n-2}(k_n) \downarrow & & \downarrow \tilde{H}_{n-2}(k_{n-1}) \\
\tilde{H}_{n-2}(E^+ \cap E^-) & \xleftarrow{\sim} & \tilde{H}_{n-2}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})
\end{array}$$

donc $\tilde{H}_{n-1}(k_n) = -Id \iff \tilde{H}_{n-2}(k_{n-1}) = -Id$ et on conclut par récurrence.

Définition 5.11. Une R -orientation de \mathbb{R}^n est un générateur du R -module $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; R)$.

Exemple : Si $R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ il n'y a qu'une seule $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ orientation.

compléter

Définition 5.12. Si V est une variété topologique réelle, une orientation

Une *boule* de V est un ouvert de la forme $\phi^{-1}(B)$ où B est une boule ouverte de \mathbb{R}^n et ϕ est une carte de V . Si $\phi^{-1}(B)$ est une boule et \mathcal{U} le domaine de ϕ

$$H_i(V|\phi^{-1}(B); R) \xrightarrow[\sim]{\text{excision}} H_i(\mathcal{U}|\phi^{-1}(B); R) \xrightarrow[\sim]{H_1(\phi)} H_i(\mathbb{R}^n|B; R)$$

$$\text{avec } H_i(\mathbb{R}^n|B; R) = \begin{cases} R & \text{si } i = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si $x \in \phi^{-1}(B)$, l'application induite par l'inclusion $\rho_{x, \phi^{-1}(B)} : H_n(V|\phi^{-1}(B)) \rightarrow H_n(V|x)$ est un isomorphisme.

Définition 5.13. Une R -orientation d'une variété V est une famille $(\mu_x)_{x \in V}$ d'orientation locales de V satisfaisant la condition de compabilité (★).

$\forall x \in V$, il existe B une boule de V , et $\mu_B \in H_n(V|B; R)$ telle que $\forall y \in B$, l'application

$$\rho_{y, B} : H_n(V|B; R) \xrightarrow{\sim} H_n(V|y; R)$$

envoie μ_B sur μ_y .

Une variété est R -orientable si elle admet une R -orientation.

Exemples :

1. $R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ toute variété est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -orientable ((★) est toujours satisfaite).

2.

Alors $\forall R$, V est R -orientable.

compléter

Démonstration : On se fixe $v \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; R)$ un générateur.

Lemme 5.5 (Exercice 28 feuille de TD 4). Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un C^∞ -difféomorphisme à jacobien positif, avec $f(0) = 0$. Alors $H_n(f) : (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; R) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; R)$ est égale à Id .

$\forall x \in V$, on choisit une carte $x \in \mathcal{U} \xrightarrow[\sim]{\phi} \mathbb{R}^n$. On définit μ_x comme l'image de v par l'application :

$$H_n(\mathbb{R}^n|0) \xrightarrow[\sim]{H_n(\phi_x^{-1})} H_n(\mathcal{U}|x) \xrightarrow[\sim]{\text{excision}}$$

avec $\phi_x = \phi - \phi(x)$.

Remarque 5.3.2. La condition de Jacobien positifs montre que μ_x ne dépend pas du choix de ϕ .

La condition (★) est satisfaite. Soit $\phi^{-1}(B)$ une boule ouverte de V contenant x . On appelle μ_B l'image de v par la composée :

$$H_n(\mathbb{R}^n|0) \xleftarrow{\sim} H_n(\mathbb{R}^n|B) \xrightarrow{\sim} H_n(\mathcal{U}|\phi^{-1}(B)) \simeq H_n(V|\phi^{-1}(B))$$

Alors $\rho_{y,B}(\mu_B) = \mu_y \forall y \in B$ (vérification facile).

5.3.2 Revêtement d'orientation

Soit V une variété topologique de dimension n , on pose

$$\tilde{V} = \{\mu_x \mid x \in V \text{ et } \mu_x \text{ est une } \mathbb{Z}\text{-orientation locale de } V \text{ en } x\}$$

$p : \begin{cases} \tilde{V} & \longrightarrow V \\ \mu_x & \longmapsto x \end{cases}$ est une surjection et tout x a exactement deux antécédents.

Topologie sur \tilde{V} : Les ouverts de \tilde{V} sont les réunions d'ouverts du type $\mathcal{U}(\mu_B)$ où $\begin{cases} B \\ \mu_B \in H_n(V|B; \mathbb{Z}) \\ \mathcal{U}(\mu_B) = \{\mu_x \mid x \in B, \mu_x = \rho_{x,B}(\mu_B)\} \end{cases}$

Proposition 5.7. $p : \tilde{V} \rightarrow V$ est un revêtement à 2 feuillets appelé revêtement d'orientation de V .

Démonstration :

▷ p est continue : Si B est une boule ouverte

compléter

Proposition 5.8. Supposons V connexe. V est \mathbb{Z} -orientable $\iff p : \tilde{V} \rightarrow V$ est un revêtement trivial.

Corollaire 5.3. Si V est simplement connexe, V est \mathbb{Z} -orientable.

Démonstration : (De la proposition)

\implies Si V est \mathbb{Z} -orientable, Soit $(\mu_x)_{x \in V}$ une orientation. La condition (★) assure que $\{\mu_x \mid x \in V\}$ est un ouvert de \tilde{V} . De même, $(-\mu_x)_{x \in V}$ est une orientation donc $\tilde{V} = \{\mu_x\} \coprod \{-\mu_x\}$ n'est pas connexe car union disjointe de deux ouverts disjoints. Donc \tilde{V} est trivial.

\impliedby Si $\tilde{V} \rightarrow V$ est un revêtement trivial, on choisit un feuillet, donc une famille $(\mu_x)_{x \in V}$ d'orientation locale. $p : \{\mu_x\} \xrightarrow[\sim]{\text{homéo}} V$ donc la condition (★) est satisfaite.

5.3.3 Classe fondamentale

Théorème 5.6. Soit V une variété de dimension n , $K \subset V$ compact. Alors :

a) $H_i(V|K; R) = 0$ si $i > n$

b) $\rho : H_n(V|K; R) \rightarrow \prod_{x \in K} H_n(V|x; R)$ est injective.

c) Si $(\mu_x)_{x \in V}$ est une R -orientation de V , il existe une unique $\mu_K \in H_n(V|K; R)$ tel que $\rho(\mu_K) = (\mu_x)_{x \in V}$

Démonstration :

1. Preuve de a) et b)

Cas 1 : $V = \mathbb{R}^n, K$ convexe compact d'intérieur non-vide. Il existe un homéomorphisme de paire $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus D^n)$

$$h(x) = \frac{x}{\sup \{|\lambda| \mid \frac{x}{\lambda} \in K\}} \quad (\text{cf exo TD1})$$

Pour le cas $K = D^n$, a) et b) sont faciles.

Cas 1 bis : $V = \mathbb{R}^n, K$ convexe compact. $\mathbb{R}^n \simeq E = \text{Aff}(K) \subset \mathbb{R}^n$. On épaissit K dans E^\perp ce qui nous donne un compact convexe K' . L'inclusion $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K') \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K)$ est une équivalence d'homotopie. On est donc ramené au cas 1.

Cas 2 : Si a) et b) sont vraies pour $V, K_1, K_2, K_1 \cap K_2$ alors elles sont vraies pour $V, K_1 \cup K_2$. En effet par Mayer-Vietoris (Exo TD4) :

$$\underbrace{H_{i+1}(V|K_1 \cap K_2)}_{0 \text{ si } i \geq n} \xrightarrow{\partial}$$

compléter

Théorème 5.7. Soit V une variété compacte connexe de dimension n .

1. $H_i(V; R) = 0$ si $i > n$
2. $\forall x \in V, \rho_x : H_n(V; R) \rightarrow H_n(V|x; R)$ est injective.
3. On a équivalence entre :
 - (A) V est R -orientable
 - (B) $\forall x \in V, \rho_x$ est un isomorphisme
 - (C) $H_n(V; R) \simeq R$

Démonstration :

1. On remarque que $H_i(V; R) = H_i(V, \emptyset; R) = H_i(V|V; R)$ donc (1) provient du théorème précédent (a) avec $K = V$.
2. Soit $z \in H_n(V; R) \setminus \{0\}$

$$\Psi_2 : \begin{cases} V & \longrightarrow & \{0, 1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 \text{ si } \rho_x(z) = 0 \\ 1 \text{ si } \rho_x(z) \neq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Ψ_2 est localement constante : en effet, soit B une boule de V

$$\rho_x = H_n(V) \xrightarrow{\rho_B} H_n(V|B) \xrightarrow[\sim]{\rho_{x,B}} H_n(V|x)$$

Si $\rho_x(z) = 0$ pour un $x \in B$ alors $\rho_B(x) = 0$ donc $\rho_y(z) = 0, \forall y \in B$.

Or V est connexe donc Ψ_2 est constante. D'après le théorème précédent (b), on sait qu'il existe x tel que $\Psi_2(x) = 1$ donc $\Psi_2 = 1$.

3. (A) \implies (B) Soit $(\mu_x)_{x \in V}$ une orientation de V . D'après le théorème précédent (c), $\exists \mu_V \in H_n(V)$ tel que $\rho_x(\mu_V) = \mu_x, \forall x \in V$. Donc $\forall x, \mu_x$ est un générateur de $H_n(V|x)$ dans l'image de ρ_x , c'est à dire ρ_x est surjective.
- (B) \implies (C) clair.

(C) \implies (A) On suppose $H_n(V; R) \simeq R$. Soit μ_V un générateur de $H_n(V; R)$. Si $\lambda \in R$, on pose

$$V_\lambda = \{x \in V \mid \exists \text{ un générateur de } H_n(V|x) \text{ tel que } \rho_x(\mu_v) = \lambda g\}$$

V_λ est ouvert : Si $x \in V_\lambda$, soit B une boule de V qui contient x . $\forall y \in B$:

$$\rho_y : H_n(V) \xrightarrow{\rho_B} H_n(V|B) \xrightarrow[\sim]{\rho_{y,B}} H_n(V|y)$$

Pour $y = x$, $\rho_B(\mu_V) = \lambda x$ un générateur de $H_n(V|B)$, donc $\forall y \in B$, $\rho_{y,B} = \lambda x$ un générateur de $H_n(V|y)$ donc $y \in V_\lambda$.

V_λ est fermé (car $V \setminus V_\lambda$ est une réunion de $V_\alpha, \alpha \neq \lambda$)

V est connexe donc $V_\lambda = \emptyset$ ou V . Or il existe $\lambda \neq 0$ tel que $V_\lambda \neq \emptyset$

compléter

Définition 5.14. Soit V une variété compacte, connexe R -orientable de dimension n . Une classe fondamentale de V est un générateur de $H_n(V; R)$. On la note $[V]$.

5.4 Dualité de Poincaré

5.4.1 Cap produit

Soit X un espace topologique, le cap produit est l'application R -bilinéaire :

$$\cap : \begin{cases} C_k(X; R) \times C^l(X; R) & \longrightarrow & C_{k-l}(X; R) \\ (\sigma, \phi) & \longmapsto & \sigma \cap \phi = \phi(\sigma|_{[e_0, \dots, e_l]})\sigma|_{[e_{l+1}, \dots, e_k]} \end{cases}$$

Lemme 5.6. $d(\sigma \cap \phi) = (-1)^l(d\sigma \cap \phi - \sigma \cap d\phi)$

Corollaire 5.4. \cap induit une application R -bilinéaire

$$\begin{cases} H_k(X; R) \times H^l(X; R) & \longrightarrow & H_{k-l}(X; R) \\ [\sigma], [\phi] & \longmapsto & [\sigma \cap \phi] \end{cases}$$

Démonstration : Si σ est un cycle et ϕ aussi alors $\sigma \cap \phi$ en est aussi un. Si σ est un bord et f un cycle alors $\sigma \cap f$ est un bord. En effet, $\sigma = db \implies d(b \cap f) = (-1)^l(db \cap f) = (-1)^l(\sigma \cap f)$. Si σ est un cycle et f un bord, $\sigma \cap f$ est un bord.

5.4.2 Dualité de Poincaré

Théorème 5.8. Soit V une variété compacte, connexe, R -orientable de dimension n . Soit $[v] \in H_n(V; R)$ une classe fondamentale.

$$[v] \cap \cdot : H^k(V; R) \rightarrow H_{n-k}(V; R)$$

est un isomorphisme.

Exemple : Soit R un corps, V une variété topologique, et $H_i(V; R)$ est de dimension $< +\infty$.

Pas de cours le 12/12 et 19/12, prochain et dernier cours le 9 janvier 2013 en salle W.

6 Références

6.1 Topologie algébrique

- ▷ Allen Hatcher "Algebraic Topology"
- ▷ Peter May "A concise course on algebraic topology"
- ▷ Le polycopié de F. Paulin sur le site de la FIMFA

6.2 Algèbre homologique

- ▷ C. Weibel “An introduction to homological algebra”
- ▷ Getfond, Manin “Methods of homological algebra”
- ▷ Notesde cours de Pierre Schapira “Categories and Algebra”

6.3 Relations avec la géométrie

- ▷ R. Bott, L. Tu “Differential forms in algebraic topology”