UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT
Année 2012-2012, Master 2

Examen du 31/10/2012 (durée : 3 heures)

I

On note S^1 et D^2 respectivement le cercle unité et le disque unité de $\mathbb{C}$. Soit X le sous-espace de $\mathbb{C}^2$ réunion du tore $S^1 \times S^1$ et du disque : $D^2 \times \{1\}$.

1. Calculer l'homologie de X.
2. Pour $A = (1, 1)$, calculer l'homologie $H_*(X, X - \{A\})$.
3. Est-ce que X est une variété topologique ?

II

Etant donné une application continue $f : X \to X$, on note T_f le quotient de $[0, 1] \times X$ par la relation d'équivalence qui identifie $(1, x)$ avec $(0, f(x))$ pour tout $x \in X$. On note X_0 l'image dans T_f de $\{0\} \times X$, et V l'image dans T_f de $([0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1]) \times X$.

1. Montrer que V se rétracte par déformation sur X_0.
2. Montrer que X_0 est homéomorphe à X.
3. Montrer que $H_*(T_f, X_0)$ est isomorphe à $H_*([0, 1] \times X, \{0, 1\} \times X)$.
4. Exprimer $H_*(T_f, X_0)$ en fonction de $H_*(X)$.
5. Ecrire la suite exacte longue en homologie pour la paire (T_f, X_0) et en déduire une suite exacte longue
$$\to H_n(X) \to H_n(X) \to H_n(T_f) \to H_{n-1}(X) \to$$
pour laquelle on précisera les morphismes. On montrera que le morphisme : $H_n(X) \to H_n(X)$, est égal à $f_* - \mathrm{Id}$.
6. Calculer $H_*(T_f)$ lorsque $f : S^2 \to S^2$ est une application de degré 2.

III

Pour $n \geq 1$ on note $\pi_n : S^n \to \mathbb{R}P^n$ la projection canonique. On note $\mathcal{U}$ l'ensemble des ouverts U de $\mathbb{R}P^n$ dont le complément est un hyperplan projectif.

1. Montrer que pour $U \in \mathcal{U}$, $V = \pi_n^{-1}(U)$ est l'union disjointe de deux ouverts homéomorphes à U.
En déduire qu'un simplexe singulier subordonné à U, $\sigma : \Delta_k \to U \subset \mathbb{R}P^n$ a deux relèvements à S^n.
On note $\mathcal{V}$ l'ensemble des ouverts $V = \pi_n^{-1}(U)$, $U \in \mathcal{U}$.
2. Justifier le fait que les complexes subordonnés à coefficients modulo 2 : $C_*^{\mathcal{U}}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et $C_*^{\mathcal{V}}(S^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, calculent les homologies à coefficients modulo 2 habituelles.
3. Montrer qu'il existe une suite exacte courte de complexes de chaînes :
$$0 \to C_*^{\mathcal{U}}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to C_*^{\mathcal{V}}(S^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to C_*^{\mathcal{U}}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to 0\ ,$$
où la seconde application est induite par la projection canonique et la première associe à un simplexe singulier la somme de ses deux relèvements.
En déduire une suite exacte longue en homologie et retrouver avec cette suite $H_*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2)$.
4. Démontrer que si $f : S^n \to S^n$ est impaire : $\forall x\ ,\ f(-x) = -f(x)$, alors le degré de f est impair (théorème de Borsuk-Ulam).