Topologie Algébrique **M1 Maths Université Denis Diderot**

Examen partiel du 13 mars 2013

(durée : 2 heures)

Note : On utilise la notation du cours $[X, x]$ pour représenter l'image du point x de X par l'arête de source X de tout cocône colimite.

I.

Soit $f : H \to G$ un morphisme de groupes. On note $\overline{f(H)}$ le plus petit sous-groupe distingué de G qui contient l'image de f, et on note π la projection canonique de G sur $G/\overline{f(H)}$.

(a) Montrer que dans la catégorie des groupes, le carré :

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f"] \arrow[d] & G \arrow[d, "\pi"] \\ 0 \arrow[r] & G/\overline{f(H)} \end{tikzcd}$$

est cocartésien.

Soit $(X, *)$ un espace topologique pointé connexe par arcs tel que $\pi_1(X, *)$ soit isomorphe au groupe $\mathrm{SO}(3)$ (dont on a oublié la topologie) des rotations de $\mathbb{R}^3$. Soit $f : (\mathbb{S}^1, *) \to (X, *)$ une application continue pointée telle que $f_* : \pi_1(\mathbb{S}^1, *) \to \pi_1(X, *)$ ne soit pas le morphisme nul. On colle une 2-cellule sur X via l'application d'attachement f, et on obtient ainsi un espace topologique Y, dont on rappelle qu'il n'est autre que la colimite du diagramme :

$$\mathbb{D}^2 \hookleftarrow \mathbb{S}^1 \xrightarrow{f} X$$

(b) Montrer que Y est connexe par arcs.

On pose $U = \{[\mathbb{D}^2, x] \mid x \notin \mathbb{S}^1\}$ et $V = Y - \{[\mathbb{D}^2, 0]\}$, et on définit $\varphi : \mathbb{S}^1 \to U \cap V$ et $\psi : X \to V$ par $\varphi(x) = [\mathbb{D}^2, x/2]$ et $\psi(x) = [X, x]$.

(c) Montrer que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} U \cap V \arrow[r, hook] & V \\ \mathbb{S}^1 \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "f"'] & X \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

est homotopiquement commutatif et que φ et ψ sont des équivalences d'homotopie.

(d) Montrer que Y est simplement connexe.

II.

Soit G un groupe topologique (dont la multiplication est notée par juxtaposition). On prend l'élément neutre 1 de G comme point de base. Si σ et τ sont deux lacets de $(G, 1)$, on note $\sigma\star\tau$ leur concaténation, et $\sigma\tau$ le lacet $t \mapsto \sigma(t)\tau(t)$.

(a) Montrer que les lacets $\sigma\star\tau$ et $\sigma\tau$ sont homotopes. (On pourra utiliser l'application $\Phi : [0, 1] \times [0, 1] \to G$ définie par $\Phi(s, t) = \sigma(s)\tau(t)$.)

Soit $\pi : E \to B$ un revêtement. On suppose que E et B sont connexes et localement connexes par arcs, et que B est un groupe topologique (dont la multiplication est notée par juxtaposition). On prend l'élément neutre 1 de B (qu'on notera aussi $*$) comme point de base de B, et un point $*$ de la fibre au dessus de 1 comme point de base de E.

(b) Montrer que l'application $\Psi : E \times E \to B$ définie par $\Psi(x, y) = \pi(x)\pi(y)$ se relève le long de π en une application continue $m : E \times E \to E$.

(c) Montrer que l'un des relèvements m construits en **(b)** munit E d'une structure de groupe topologique pour laquelle π est un morphisme de groupes.

(d) Montrer que π est un revêtement principal.

III.

Soit $(X, *)$ un espace topologique pointé. Soit $\mathscr{U}$ un famille d'ouverts de X, contenant tous $*$, couvrant X, et formant un ensemble ordonné filtrant pour la relation d'inclusion. On note d le diagramme de groupes formé par les $\pi_1(U, *)$ et les morphismes entre eux induits par les inclusions canoniques.

(a) Montrer qu'on a un isomorphisme $\mathbf{colim}(d) \to \pi_1(X, *)$.

(b) Montrer par un exemple que le même énoncé est faux sans l'hypothèse que l'ordre de l'inclusion sur $\mathscr{U}$ est filtrant.

Topologie Algébrique **M1 Maths Université Denis Diderot**

Solution du partiel du 13 mars 2013

I.

(a) Soient φ et ψ des morphismes de groupes tels que le diagramme (en traits pleins)

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "f"] \arrow[d] & G \arrow[d, "\pi"] \arrow[ddr, bend left, "\psi"] & \\
0 \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "\varphi"'] & G/\overline{f(H)} \arrow[dr, dotted, "\theta"] & \\
& & K
\end{tikzcd}$$

soit commutatif. Comme ceci entraîne que la restriction de ψ à $f(H)$ est nulle, le noyau de ψ, qui est un sous-groupe distingué de G, contient $\overline{f(H)}$. ψ passe donc au quotient pour donner un morphisme $\theta : G/\overline{f(H)} \to K$ tel que $\theta \circ \pi = \psi$. On a bien sûr $\theta \circ i = 0 = \varphi$ (où i est l'inclusion de 0 dans $G/\overline{f(H)}$), et l'unicité de θ résulte du fait que π est une surjection. Le carré de l'énoncé est donc cocartésien.

Rappelons que compte tenu de la description des colimites dans **Top***, Y est le quotient de l'union disjointe de $\mathbb{D}^2$ (la « 2-cellule ») et de X par la relation d'équivalence engendrée par les équations $[\mathbb{D}^2, x] = [X, f(x)]$ où $x \in \mathbb{S}^1$.*

(b) Comme X est connexe par arcs, tout point de la forme $[X, x]$ peut être relié par un chemin au point $[X, *]$. Par ailleurs, la 2-cellule $\mathbb{D}^2$ est elle-même connexe par arcs, et tout point de la forme $[\mathbb{D}^2, x]$ peut donc être relié par un chemin au point $[\mathbb{D}^2, *]$. Ainsi tout point de Y peut être relié par un chemin à $[X, *] = [\mathbb{D}^2, *]$.

(c) L'intersection $U \cap V$ est l'ensemble des $[\mathbb{D}^2, x]$ tels que $x \neq 0$ et $x \notin \mathbb{S}^1$. Le diagramme (en traits pleins) :

$$\begin{tikzcd}
U \cap V \arrow[r, hook] \arrow[d, dotted, shift left, "u"] & V \arrow[d, dotted, shift left, "v"] \\
\mathbb{S}^1 \arrow[r, "f"'] \arrow[u, shift left, "\varphi"] & X \arrow[u, shift left, "\psi"]
\end{tikzcd}$$

est homotopiquement commutatif. En effet, on a pour tout $x \in \mathbb{S}^1$, $\psi(f(x)) = [X, f(x)]$. Il suffit donc de poser $h(t, x) = [\mathbb{D}^2, (1 - t/2)x]$. On a $h(0, x) = [\mathbb{D}^2, x] = [X, f(x)] = \psi(f(x))$, et $h(1, x) = [\mathbb{D}^2, x/2] = \varphi(x)$.

Par ailleurs, φ et ψ sont des équivalences d'homotopie. Des inverses homotopiques sont donnés par $u : [\mathbb{D}^2, x] \mapsto x/\|x\|$ pour φ et par $v : [\mathbb{D}^2, x] \mapsto f(x/\|x\|)$ et $v : [X, x] \mapsto x$

pour ψ. Noter que v est bien définie, puisque pour $x \in \mathbb{S}^1$, $f(x/\|x\|) = f(x)$. On a $u(\varphi(x)) = x$, $\varphi(u([\mathbb{D}^2, x])) = \varphi(x/\|x\|) = [\mathbb{D}^2, x/2\|x\|]$. Or, $[\mathbb{D}^2, x] \mapsto [\mathbb{D}^2, x/2\|x\|]$ est homotope à l'identité de $U \cap V$. Par ailleurs, pour $x \in X$, $v(\psi(x)) = v([X, x]) = x$. $\psi(v([X, x])) = \psi(x) = [X, x]$, et pour $x \in \mathbb{D}^2$, $\psi(v([\mathbb{D}^2, x])) = \psi(f(x/\|x\|)) = [X, f(x/\|x\|)]$. On définit une homotopie h de $\psi \circ v$ à l'identité de V en posant $h(t, [X, x]) = [X, x]$ et $h(t, [\mathbb{D}^2, x]) = [\mathbb{D}^2, (1-t)x + tx/\|x\|]$. Pour $t = 0$, on a $h(t, [\mathbb{D}^2, x]) = [\mathbb{D}^2, x]$, et pour $t = 1$, on a $h(1, [\mathbb{D}^2, x]) = [\mathbb{D}^2, x/\|x\|] = [X, f(x/\|x\|)]$.

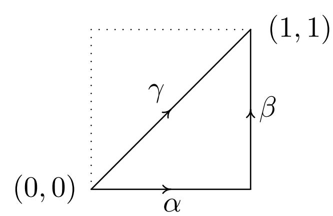
(d) U et V sont des ouvert de Y car leurs images réciproques par les arêtes du cocône colimite sont des ouverts des objets du diagramme ci-dessus, à savoir $\mathbb{D}^2 - \mathbb{S}^1$, $\emptyset$ et $\emptyset$ pour U et $\mathbb{D}^2 - \{0\}$, $\mathbb{S}^1$ et X pour V. Comme $U \cap V$ est connexe par arcs, et comme U et V couvrent Y, le théorème de van Kampen nous donne le carré cocartésien :

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U \cap V, *) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(V, *) \arrow[d] \\ \pi_1(U, *) \arrow[r] & \pi_1(Y, *) \end{tikzcd}$$

où le point $*$ est pris dans $U \cap V$ (par exemple $[\mathbb{D}^2, (1/2, 0)]$). Comme $\mathrm{SO}(3)$ est un groupe simple (il n'a pas d'autre sous-groupe distingué que 0 et lui-même), et comme $\pi_1(U \cap V, *) \to \pi_1(V, *)$ est non nul d'après la question **(c)**, le plus petit sous-groupe distingué de $\mathrm{SO}(3)$ contenant l'image de ce morphisme ne peut-être que $\mathrm{SO}(3)$ lui-même. Il en résulte par **(a)** que Y est simplement connexe.

II.

(a) Posons $C = [0, 1] \times [0, 1]$. Notons α le chemin de C défini par $\alpha(s) = (s, 0)$ et β le chemin de C défini par $\beta(s) = (1, s)$. Enfin, notons γ le chemin de C défini par $\gamma(t) = (t, t)$.



Les chemins α et β sont concaténables et les chemins $\alpha \star \beta$ et γ ont même origine $(0, 0)$ et même extrémité $(1, 1)$. De plus ils sont homotopes puisque C est convexe. On a $\sigma \star \tau = \Phi_*(\alpha) \star \Phi_*(\beta) = \Phi_*(\alpha \star \beta)$ et $\sigma\tau = \Phi_*(\gamma)$. Il en résulte que $\sigma \star \tau$ est homotope à $\sigma\tau$.

On note G le sous-groupe de $\pi_1(B, *)$ qui est l'image de $\pi_* : \pi_1(E, *) \to \pi_1(B, *)$.

(b) Il suffit de montrer que l'image de Ψ est contenue dans G. Soit $s \mapsto (\sigma(s), \tau(s))$ un lacet de $E \times E$. Son image par Ψ est le lacet $s \mapsto (\pi(\sigma(s)))(\pi(\tau(s)))$, autrement-dit $(\pi \circ \sigma)(\pi \circ \tau)$, qui est d'après **(a)** homotope au lacet $(\pi \circ \sigma)\star(\pi \circ \tau)$. Comme G est stable par la multiplication de $\pi_1(B, *)$ la classe d'homotopie de ce dernier lacet est dans G.

(c) On choisit pour m l'unique relèvement de Ψ tel que $m(*, *) = *$. On a $\pi(m(x, y)) = \pi(x)\pi(y)$ par construction de m. Autrement-dit, π préserve les produits. Il en résulte que $\pi(m(m(x, y), z)) = \pi(x)\pi(y)\pi(z) = \pi(m(x, m(y, z)))$ et donc que les applications $(x, y, z) \mapsto m(m(x, y), z)$ et $(x, y, z) \mapsto m(x, m(y, z))$ sont des relèvements de la même application. Comme elles envoient toutes les deux $(*, *, *)$ sur $*$, elles sont égales ($E \times E \times E$ est connexe). De même, $x \mapsto m(x, *)$ et $x \mapsto m(*, x)$ sont des relèvements de π le long de π envoyant toutes deux $*$ sur $*$. Elles sont donc égales à l'application identique de E. Enfin, pour tout lacet σ de $(B, 1)$, notons σ^* le lacet inverse homotopique de σ pour la concaténation (c'est-à-dire que $\sigma^*(s) = \sigma(1 - s)$), et notons σ^{-1} le lacet $s \mapsto (\sigma(s))^{-1}$ (il s'agit ici de l'inversion dans le groupe B). Comme $\sigma\star\sigma^*$ et $\sigma\sigma^*$ sont homotopes, et comme $\sigma\star\sigma^*$ est homotope au lacet constant, on voit que $\sigma\sigma^*$ est homotope au lacet constant, c'est-à-dire à $\sigma\sigma^{-1}$. Comme dans un groupe tout élément est régulier, on voit que $[\sigma^{-1}] = [\sigma^*]$.

L'application $x \mapsto (\pi(x))^{-1}$ induit un morphisme $\pi_1(E, *) \to \pi_1(B, *)$ qui envoie tout lacet $[\sigma]$ de $(E, *)$ sur le lacet $s \mapsto (\pi(\sigma(s)))^{-1}$ qui est homotope à $\pi_*(\sigma^*)$. La classe d'homotopie de ce lacet est donc dans G et l'application $x \mapsto (\pi(x))^{-1}$ se relève le long de π en une (unique) application continue $i : E \to E$ telle que $i(*) = *$. L'application $j : E \to E$ définie par $j(x) = m(x, i(x))$ est telle que $\pi \circ j$ soit l'application constante $E \to B$ envoyant x sur 1. Comme $j(*) = *$, on voit que $j(x) = *$, ce qui prouve que $i(x)$ est l'inverse à droite de x pour la multiplication de E. On prouver de même $i(x)$ est aussi l'inverse à gauche de x.

(d) Comme $\pi : E \to B$ est un morphisme de groupes, son noyau est un groupe. Or, ce noyau n'est autre que la fibre $F = \pi^{-1}(1)$ au dessus de $1 \in B$. Le sous-groupe F de E agit sur E par multiplication par la droite ($(x, g) \mapsto xg$ pour $x \in E$ et $g \in F$). On a $\pi(xg) = \pi(x)\pi(g) = \pi(x)$. Réciproquement, si $\pi(x) = \pi(y)$, alors $\pi(xy^{-1}) = 1$, et donc $xy^{-1} \in F$. On a alors $x = yg$ pour $g \in F$. Ainsi, B s'identifie au quotient de E par cette action et π à la projection canonique de ce quotient. π est donc un revêtement principal.

III.

(a) Si U et V sont des éléments de $\mathscr{U}$ tels que $U \subset V$, on a le diagramme commutatif dont les flèches sont toutes induites par les inclusions canoniques :

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(V, *) \arrow[r] & \pi_1(X, *) \\
\pi_1(U, *) \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Il en résulte (par définition des colimites) un unique morphisme de groupes φ : $\mathbf{colim}(d) \to \pi_1(X,*)$ tel que pour tout $U \in \mathscr{U}$, le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{colim}(d) \arrow[r, "\varphi"] & \pi_1(X,*) \\ \pi_1(U,*) \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

(où la flèche verticale est une arête du cocône colimite et la flèche oblique est induite par l'inclusion canonique) soit commutatif. Il y a juste à montrer que φ est une bijection.

Surjectivité : soit $[\sigma] \in \pi_1(X,*)$. Les ouverts $\sigma^{-1}(U)$ ($U \in \mathscr{U}$) recouvrent le segment $[0,1]$, et un nombre fini $\sigma^{-1}(U_1),\dots,\sigma^{-1}(U_n)$ d'entre eux suffisent à recouvrir $[0,1]$. Comme dans un ensemble ordonné filtrant, toute famille finie a un majorant, l'image de σ est donc contenue dans l'un des éléments de $\mathscr{U}$, disons U. Alors $[\sigma]$ est l'image par φ de $[\pi_1(U,*),[\sigma]]$.

Injectivité : Tout élément x de $\mathbf{colim}(d)$ est un produit fini de la forme :

$$[\pi_1(U_1,*),[\sigma_1]]\dots[\pi_1(U_n,*),[\sigma_n]]$$

(propriété des colimites dans la catégorie des groupes non abéliens). Soit $U \in \mathscr{U}$ un majorant des U_i (qui sont en nombre fini). Alors $[\pi_1(U_i,*),[\sigma_i]] = [\pi_1(U,*),[\sigma_i]]$, et on a $x = [\pi_1(U,*),[\sigma_1\star\dots\star\sigma_n]]$. Si $\varphi(x) = 1$ (tous les groupes sont notés multiplicativement), alors $\sigma_1\star\dots\star\sigma_n$ est homotope au lacet constant dans X. Soit h une telle homotopie. Comme précédemment, par compacité de $[0,1]^2$, l'image de h est contenue dans un élément V de $\mathscr{U}$, qu'on peut prendre tel que $U \subset V$. Il s'en suit que $x = [\pi_1(V,*),[\sigma_1\star\dots\star\sigma_n]] = 1$.

(b) Il suffit de prendre pour X le cercle $\mathbb{S}^1$ (disons l'ensemble des complexes de module 1). On pose $* = 1$, $U = \mathbb{S}^1 - \{i\}$ et $V = \mathbb{S}^1 - \{-i\}$. Enfin on pose $\mathscr{U} = \{U,V\}$. Les éléments de $\mathscr{U}$ sont ouverts et recouvrent $\mathbb{S}^1$. Bien sûr, $\mathscr{U}$ n'est pas filtrant, puisque la famille (finie) formée par U et V n'a pas de majorant dans $\mathscr{U}$. Par ailleurs $\pi_1(U,*) = \pi_1(V,*) = 0$, donc $\mathbf{colim}(d) = 0$. Par ailleurs, $\pi_1(\mathbb{S}^1,*) \neq 0$.