LE GROUPE FONDAMENTAL

Introduction

Ici nous verrons la définition générale du *groupe fondamental* d'un espace, ainsi que certaines de ses propriétés. Nous calculerons les groupes fondamentaux de certains espaces, notamment à l'aide d'un fameux théorème, celui de Seifert et van Kampen.

Dorénavant, pour des raisons qui deviendront plus claires par la suite, nous nous limiterons aux espaces topologiques dotés d'un élément de structure supplémentaire.

DÉFINITION. Un espace topologique X est *pointé* si l'on a choisi et fixé un élément x_0 de X, qui sera le *point de base* de X. Une *application d'espaces pointés* $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ consiste en une application continue $f : X \longrightarrow Y$ telle que $f(x_0) = y_0$.

Deux applications d'espaces pointés $f, g : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ sont *homotopes par rapport aux points de base*, que l'on dénote $f \simeq_* g$, s'il existe une homotopie H de f à g telle que $H(x_0, t) = y_0$ pour tout $t \in [0, 1]$. L'application H s'appelle une *homotopie basée.* La *classe d'homotopie basée* d'une application pointée $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$, dénotée $[f]_*$, est définie par

$$[f]_* = \{g : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0) \quad | \quad g \simeq_* f\}.$$

De nouveau, il est aisé de voir que $\simeq_*$ est une relation d'équivalence.

A partir de ces définitions basiques (jeu de mots nonintentionnel!), nous allons nous restreindre aux applications pointées de source $(S^1, 1)$, une classe chérie des topologues. Ici, nous considérons S^1 comme étant l'ensemble $\{e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.

DÉFINITION. Un *lacet basé* sur un espace pointé (X, x_0) est une application pointée $(S^1, 1) \longrightarrow (X, x_0)$.

Le *groupe fondamental* de (X, x_0), dénoté $\pi_1(X, x_0)$, est l'ensemble de toutes les classes d'homotopie basé de lacets basés sur (X, x_0). Autrement dit,

$$\pi_1(X, x_0) = \{[\alpha]_* \quad | \quad \alpha : (S^1, 1) \longrightarrow (X, x_0)\}$$

La définition du groupe fondamental est limpide, mais nous laisse quand même face à deux grandes questions: s'agit-il vraiment d'un groupe? et est-ce que le groupe fondamental est un invariant homotopique? Ce sont à ces deux questions-là que nous proposons de nous attaquer tout de suite.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

A. La structure du groupe

Si nous voulons que le groupe fondamental soit vraiment un groupe, alors il nous faut définir de manière raisonnable le produit de deux classes d'homotopie basée de lacets basés. Ensuite il faut vérifier que le produit ainsi défini satisfait aux axiomes de groupe.

Nous verrons d'abord comment définir un produit dans un cadre plus général, celui des chemins sur un espace topologique. Un *chemin* sur un espace X consiste en une application continue $f : [0,1] \longrightarrow X$. Considérer deux chemins f et g telles que $f(1) = g(0)$. A partir de ces deux chemins, nous allons en définir un troisième, dénoté $f \star g$, de la manière suivante.

$$f \star g : I \longrightarrow X : t \mapsto \begin{cases} f(2t): & 0 \leq t \leq 1/2 \\ g(2t-1): & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Cette application est bien définie et continue, car

$$f(2 \cdot 1/2) = f(1) = g(0) = g(2 \cdot 1/2 - 1).$$

Soit $q : [0,1] \longrightarrow S^1$ l'application quotient définie par $q(t) = e^{i2\pi t}$. Si α est un lacet basé sur (X, x_0), alors αq est un chemin sur X, avec $\alpha q(0) = x_0 = \alpha q(1)$. Inversément, tout chemin f sur X avec $f(0) = f(1) = x_0$ induit un lacet basé $\hat{f} : (S^1, 1) \longrightarrow (X, x_0)$ défini par $\hat{f}(e^{i\theta}) = f(\theta/2\pi)$. Il est clair que $\hat{f}q = f$.

Nous pouvons ainsi définir le produit de deux lacets quelconques α et β, que l'on dénote $\alpha \star \beta$, par

$$\alpha \star \beta = \widehat{\alpha q \star \beta q}.$$

Autrement dit,

$$\alpha \star \beta(e^{i\theta}) = \begin{cases} \alpha(e^{i2\theta}): & 0 \leq \theta \leq \pi \\ \beta(e^{i2(\theta-\pi)}): & \pi \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

Nous définirons le produit de deux classes d'homotopie basée de lacets à partir de ce produit de lacets. Mais avant de pouvoir le faire, il nous faut vérifier le lemme suivant.

LEMME 1. *Soient $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ des lacets basés sur (X, x_0). Si $\alpha \simeq_* \alpha'$ et $\beta \simeq_* \beta'$, alors $\alpha \star \beta \simeq_* \alpha' \star \beta'$.*

PREUVE. Soit G une homotopie basée de α à α', et soit H une homotopie basée de β à β'. Définir

$$K : S^1 \times [0,1] \longrightarrow X : (e^{i\theta}, t) \mapsto \begin{cases} G(e^{i2\theta}, t): & 0 \leq \theta \leq \pi \\ H(e^{i2(\theta-\pi)}, t): & \pi \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

Alors, pour tout $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} K(e^{i\theta}, 0) &= (\alpha \star \beta)(e^{i\theta}), \\ K(e^{i\theta}, 1) &= (\alpha' \star \beta')(e^{i\theta}), \\ K(1, t) &= G(1,t) = H(1,t) = x_0. \end{aligned}$$

Autrement dit K est une homotopie basée de $\alpha \star \beta$ à $\alpha' \star \beta'$. $\square$

Ainsi nous pouvons définir le produit de classes de la manière suivante. Soient α, β des lacets basés sur (X, x_0). Alors on définit

$$[\alpha]_* \odot [\beta]_* = [\alpha \star \beta]_*.$$

Maintenant que nous avons défini le produit de deux éléments de $\pi_1(X, x_0)$, il nous reste à voir qu'il satisfait aux axiomes de groupe.

Proposition 2. *Le produit $\odot$ défini ci-dessus dote l'ensemble $\pi_1(X, x_0)$ d'une structure de groupe.*

Preuve. Nous devons vérifier que

(1) le produit $\odot$ est associatif,
(2) il existe une identité multiplicative par rapport à $\odot$, et
(3) chaque élément de $\pi_1(X, x_0)$ possède un inverse multiplicatif par rapport au produit $\odot$.

Preuve de (1): L'associativité de $\odot$ est une conséquence du fait que si f, g, h sont des chemins sur X, alors $(f \star g) \star h \simeq f \star (g \star h)$ par une homotopie H telle que $H(0, t) = f(0)$ et $H(1, t) = h(1)$ pour tout t. En effet on peut définir H par

$$H(s,t) = \begin{cases} f(4s/(t+1)) : & 0 \le s \le (t+1)/4 \\ g(4s-t-1) : & (t+1)/4 \le s \le (t+2)/4 \\ h\big((4s-t-2)/(2-t)\big) : & (t+2)/4 \le s \le 1 \end{cases}$$

Preuve de (2): Soit $e_{x_0} : [0,1] \longrightarrow X$ le chemin constant à x_0, i.e., $e_{x_0}(s) = x_0$ pour tout s dans $[0,1]$. Soit $f : [0,1] \longrightarrow X$ un chemin quelconque avec $f(0) = x_0$. Définir $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$ par

$$H(s,t) = \begin{cases} x_0 & : \quad 0 \le s \le t/2 \\ f\big((2s-t)/(2-t)\big) & : \quad t/2 \le s \le 1. \end{cases}$$

Alors, $H(-, 0) = f$ et $H(-, 1) = e_{x_0} \star f$, tandis que $H(0, t) = x_0$ et $H(1, t) = f(1)$ pour tout t. Autrement dit, $f \simeq e_{x_0} \star f$, par une homotopie qui fixe les deux bouts du chemin.

De même, il existe une homotopie de f vers $f \star e_{x_0}$ qui fixe les deux bouts du chemin.

Ces deux résultats plus généraux entraînent que

$$[\alpha]_* \odot [e_{x_0}]_* = [\alpha]_* = [e_{x_0}]_* \odot [\alpha]_*$$

pour tout $[\alpha]_*$ dans $\pi_1(X, x_0)$.

Preuve de (3): Soit $f : [0,1] \longrightarrow X$ un chemin quelconque. Soit $f^{-1} : [0,1] \longrightarrow X$ le chemin défini par $f^{-1}(s) = f(1-s)$ pour tout s dans $[0,1]$. Définir ensuite $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$ par

$$H(s,t) = \begin{cases} f(2st) & : \quad 0 \le s \le 1/2 \\ f(2(1-s)t) & : \quad 1/2 \le s \le 1. \end{cases}$$

Alors $H(-,0) = e_{f(0)}$ et $H(-,1) = f \star f^{-1}$, tandis que $H(0,t) = f(0) = H(1,t)$ pour tout t dans $[0,1]$. Ainsi $e_{f(0)} \simeq f \star f^{-1}$, par une homotopie qui fixe les deux bouts du chemin.

De même, il existe une homotopie de $e_{f(0)}$ vers $f^{-1} \star f$ qui fixe les deux bouts du chemin.

Ces deux résultats plus généraux entraînent que

$$[\alpha]_* \odot [\alpha^{-1}]_* = [e_{x_0}]_* = [\alpha^{-1}]_* \odot [\alpha]_*$$

pour tout $[\alpha]_*$ dans $\pi_1(X, x_0)$, où $\alpha^{-1} = \widehat{(\alpha q)^{-1}}$.

Alors, ayant vérfié les trois points ci-dessus, nous pouvons affirmer que $\pi_1(X, x_0)$ est un groupe avec la structure décrite. $\square$

B. Preuve de l'invariance homotopique

Ainsi, nous avons vu comment associer un groupe à tout espace pointé. Notre tâche n'est pas accomplie pour autant, car il faut aussi vérifier que π_1 soit un invariant homotopique. Autrement, nous n'avons aucune raison de l'étudier!

Puisque $(X, x_0) \simeq_* (Y, y_0)$ si et seulement s'il existe un couple d'équivalences d'homotopie pointée $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ et $g : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$, il nous faut d'abord voir comment "traduire" une application continue pointée au niveau des groupes fondamentaux.

Etant donné une application continue pointée, $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$, et deux applications pointées $\alpha, \beta : (Z, z_0) \longrightarrow (X, x_0)$ telles que $\alpha \simeq_* \beta$ par une homotopie H, il est clair que $f\alpha \simeq_* f\beta$ par l'homotopie fH. Ainsi, f induit une application ensembliste

$$\pi_1(f) : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0) : [\alpha]_* \longmapsto [f\alpha]_*.$$

Proposition 3. *L'application $\pi_1(f)$ est un homomorphisme.*

Preuve. Observer que

$$\begin{aligned}
\pi_1(f)([\alpha]_* \odot [\beta]_*) &= \pi_1(f)([\alpha \star \beta]_*) \\
&= [f \circ (\alpha \star \beta)]_* \\
&= [f\alpha \star f\beta]_* \\
&= [f\alpha]_* \odot [f\beta]_* \\
&= \pi_1(f)([\alpha]_*) \odot \pi_1(f)([\beta]_*)
\end{aligned}$$

et que

$$\pi_1(f)([e_{x_0}]_*) = [f \circ e_{x_0}]_* = [e_{y_0}]_*,$$

car $f(x_0) = y_0$. $\square$

Il nous faut voir quelques propriétés clé de cette transformation d'applications continues en homomorphismes, avant de l'utiliser pour démontrer l'invariance de π_1.

Proposition 4.

(1) *Pour tout espace pointé (X, x_0), $\pi_1(1_X) = 1_{\pi_1(X,x_0)}$.*
(2) *Si $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ et $g : (Y, y_0) \longrightarrow (Z, z_0)$ sont des applications pointées, alors $\pi_1(gf) = \pi_1(g)\pi_1(f)$.*
(3) *Si $f, g : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ sont des applications pointées telles que $f \simeq_* g$, alors $\pi_1(f) = \pi_1(g)$.*

Preuve. Nous vérifions les deux premières affirmations par des suites d'égalités.
Preuve de (1): Pour tout $[\alpha]_* \in \pi_1(X, x_0)$,

$$\pi_1(1_X)([\alpha]_*) = [1_X \circ \alpha]_* = [\alpha]_* = 1_{\pi_1(X,x_0)}([\alpha]_*).$$

Preuve de (2): Pour tout $[\alpha]_* \in \pi_1(X, x_0)$,

$$\pi_1(gf)([\alpha]_*) = [gf\alpha]_* = \pi_1(g)([f\alpha]_*) = \pi_1(g)\pi_1(f)[\alpha]_*).$$

Preuve de (3): Soit H l'homotopie pointée de f vers g. Alors, pour toute application pointée $k : (Z, z_0) \longrightarrow (X, x_0)$, l'application $H \circ (k \times 1_{[0,1]}) : Z \times [0,1] \longrightarrow Y$ est une homotopie pointée de fk vers gk. Ce résultat général implique le résultat spécial voulu. $\square$

Il est maintenant facile de voir que π_1 est un invariant homotopique.

Théorème 3.5. *Si $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ est une équivalence d'homotopie, alors $\pi_1(f) : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$ est un isomorphisme.*

Preuve. Soit $g : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ une équivalence d'homotopie telle que $gf \simeq_* 1_X$ et $fg \simeq_* 1_Y$. Alors

$$\pi_1(g)\pi_1(f) = \pi_1(gf) = \pi_1(1_X) = 1_{\pi_1(X,x_0)}$$

et

$$\pi_1(f)\pi_1(g) = \pi_1(fg) = \pi_1(1_Y) = 1_{\pi_1(Y,y_0)}$$

ce qui entraîne que $\pi_1(f)$ et $\pi_1(g)$ sont des isomorphismes. $\square$

C. Les premiers résultats importants

Le point de base paraît jouer un rôle important dans la définition du groupe fondamental. On comprend donc facilement l'importance de savoir quel est l'effet sur le groupe fondamental d'un changement de point de base. Tel est le but de la première partie de ce paragraphe.

Dans la deuxième partie de ce paragraphe, nous verrons un puissant résultat théorique qui permet de calculer le groupe fondamental d'un espace compliqué en termes de groupes fondamentaux d'espaces plus simples. Dans l'énoncé de ce résultat, nous verrons réapparaître la somme amalgamée de groupes.

C.1 Changements de point de base.

Soient x_0 et x_1 deux points d'un espace X. Supposons qu'il existe un chemin $\lambda : [0,1] \longrightarrow X$ tel que $\lambda(0) = x_0$ et $\lambda(1) = x_1$. Définir une application

$$\lambda^\sharp : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_1) : [\alpha]_* \longmapsto [\widehat{\lambda^{-1} \star \alpha q} \star \lambda]_*$$

où, comme avant, $q : [0,1] \longrightarrow S^1 : t \mapsto e^{i2\pi t}$.

Observer que l'on n'est pas obligé de préciser l'ordre dans lequel on compose les chemins, puisque toutes les possibilités d'association sont homotopes. D'ailleurs, par la suite nous allons abuser un peu de la notation, en laissant tomber q et le chapeau, pour écrire $\lambda^\sharp([\alpha]_*) = [\lambda^{-1} \star \alpha \star \lambda]_*$. On comprend toujours ce que cette notation veut dire – et elle est bien moins lourde!

Comme nous l'explique la proposition suivante, l'application $\lambda^\sharp$ nour permet de dire que $\pi_1(X, x_0)$ et $\pi_1(X, x_1)$ sont en fait isomorphes.

Proposition 6. *L'application $\lambda^\sharp$ est un isomorphisme de groupes.*

Preuve. Il faut d'abord vérifier que $\lambda^\sharp$ soit un homomorphisme. Or, pour tout $[\alpha]_*, [\beta]_* \in \pi_1(X, x_0)$,

$$\begin{aligned}
\lambda^\sharp([\alpha]_* \odot [\beta]_*) &= \lambda^\sharp([\alpha \star \beta]_*) \\
&= [\lambda^{-1} \star \alpha \star \beta \star \lambda]_* \\
&= [\lambda^{-1} \star \alpha \star \lambda \star \lambda^{-1} \star \beta \star \lambda]_* \\
&= [\lambda^{-1} \star \alpha \star \lambda]_* \odot [\lambda^{-1} \star \beta \star \lambda]_* \\
&= \lambda^\sharp([\alpha]_*) \odot \lambda^\sharp([\beta]_*).
\end{aligned}$$

D'ailleurs

$$\lambda^\sharp([e_{x_0}]_*) = [\lambda^{-1} \star e_{x_0} \star \lambda]_* = [\lambda^{-1} \star \lambda]_* = [e_{x_1}]_*.$$

On a donc que $\lambda^\sharp$ est un homomorphisme.

Considérer l'homomorphisme $(\lambda^{-1})^\sharp : \pi_1(X, x_1) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$. On voit facilement que pour tout $[\alpha]_* \in \pi_1(X, x_0)$,

$$(\lambda^{-1})^\sharp \lambda^\sharp([\alpha]_*) = [\lambda \star \lambda^{-1} \star \alpha \star \lambda \star \lambda^{-1}]_* = [\alpha]_*,$$

i.e., $(\lambda^{-1})^\sharp \lambda^\sharp = 1_{\pi_1(X,x_0)}$. De même, $\lambda^\sharp(\lambda^{-1})^\sharp = 1_{\pi_1(X,x_1)}$.

Ainsi, l'homomorphisme $\lambda^\sharp$ possède un homomorphisme inverse, et est donc un isomorphisme. □

Comme conséquence principale de ce résultat, nous avons le corollaire suivant.

Corollaire 7. *Si X est connexe par arcs, alors $\pi_1(X, x_0)$ et $\pi_1(X, x_1)$ sont isomorphes pour tout $x_0, x_1 \in X$.*

D'ailleurs le changement de point de base est compatible avec les homomorphismes induits par les applications continues.

Proposition 8. *Soit $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ une application pointée, et soit $\lambda : [0,1] \longrightarrow X$ un chemin avec $\lambda(0) = x_0$ et $\lambda(1) = x_1$. Alors $\pi_1(f)\lambda^\sharp = (f\lambda)^\sharp \pi_1(f)$.*

Preuve. Le résultat est la conséquence d'une simple suite d'égalités. Pour tout $[\alpha]_* \in \pi_1(X, x_0)$, on a que

$$\begin{aligned}
\pi_1(f)\lambda^\sharp([\alpha]_*) &= \pi_1(f)([\lambda^{-1} \star \alpha \star \lambda]_*) \\
&= [f \circ (\lambda^{-1} \star \alpha \star \lambda)]_* \\
&= [(f\lambda^{-1}) \star (f\alpha) \star (f\lambda)]_* \\
&= (f\lambda)^\sharp([f\alpha]_*) \\
&= (f\lambda)^\sharp \pi_1(f)([\alpha]_*).
\end{aligned}$$

□

C.2 Le théorème de Seifert-van Kampen.

Le théorème que l'on énonce ci-dessous permet de calculer le groupe fondamental d'un espace à partir des groupes fondamentaux de certains sous-espaces. Il s'agit de l'un des résultats les plus importants de la topologie algébrique élémentaire.

Puisque la démonstration de ce théorème est très compliquée et nous menerait loin de notre intérêt principal, les nœuds, nous nous permettrons d'admettre ce résultat sans preuve.

Nous verrons des exemples d'applications de ce théorème au paragraphe D.

Théorème 9 (Le théorème de Seifert-van Kampen). *Soient U et V des ouverts connexes par arcs d'un espace X tels que $X = U \cup V$, et que $U \cap V$ est nonvide et connexe par arcs. Alors pour tout $x_0 \in U \cap V$, le groupe fondamental de X, $\pi_1(X, x_0)$, est la somme amalgamée de*

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U \cap V, x_0) \arrow[r, "\pi_1(\iota_1)"] \arrow[d, "\pi_1(\iota_2)"'] & \pi_1(U, x_0) \\ \pi_1(V, x_0) & \end{tikzcd}$$

où $\iota_1 : U \cap V \hookrightarrow U$ et $\iota_2 : U \cap V \hookrightarrow V$ sont les inclusions évidentes.

Idée de la preuve. Il est assez facile de voir que $\pi_1(X, x_0)$ est engendré par les images de $\pi_1(U, x_0)$ et $\pi_1(V, x_0)$ sous inclusion. Ensuite on construit des homotopies entre des représentants de certains de ces générateurs, d'une manière analogue à ce que nous allons voir dans le calcul de $\pi_1(S^1, 1)$. Ces homotopies proviennent exactement de $\pi_1(U \cap V, x_0)$. Nous en verrons plus de détails au cours. $\square$

D. Exemples de calcul

Ici nous verrons quelques exemples typiques de calculs de groupe fondamental.

D.1 Espaces contractiles.

Tout d'abord nous considérons une classe d'espaces particulièrement simples, les espaces contractiles. Il est évident que le groupe fondamental du point est le groupe trivial. Puisque π_1 est un invariant homotopique, on a donc que

$$X \text{ contractile } \Longrightarrow \pi_1(X, x_0) = \{e\}.$$

Rappel. Tout espace convexe est contractile. On peut même voir facilement que tout sousespace X de $\mathbb{R}^n$ qui possède un point x_0 tel que le segment qui relie x_0 à n'importe quel autre point de X est contenu dans X est contractile. Un tel espace est dit *star-like*.

D.2 Le cercle.

Intuitivement on voit que le cercle n'est pas contractile. Nous allons démontrer ce fait en calculant $\pi_1(S^1, 1)$ pour voir que c'est une groupe nontrivial.

Avant de faire ce calcul, nous allons étudier en détail une certaine application, qui est un exemple d'un *revêtement*, un type spécial de *fibration*.

Considérer l'application $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ définie par $p(x) = e^{i2\pi x}$. Poser

$$\mathcal{U} = \{\,]n, n+1[\mid n \in \mathbb{Z}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{V} = \{\,]n + \frac{1}{2}, n + \frac{3}{2}[\mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Alors $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ est un recouvrement de $\mathbb{R}$ tel que

$$p|_{\,]n,n+1[} \; :]n, n+1[\longrightarrow S^1 \smallsetminus \{1\}$$

et

$$p|_{\,]n+\frac{1}{2},n+\frac{3}{2}[} \; :]n + \frac{1}{2}, n + \frac{3}{2}[\longrightarrow S^1 \smallsetminus \{-1\}$$

sont des homéomorphismes pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Dans le lemme suivant, nous montrons que tout chemin sur S^1 se relève de manière unique à $\mathbb{R}$.

Lemme 10. *Soit* $f : [0,1] \longrightarrow S^1$ *un chemin tel que* $f(0) = 1 = f(1)$. *Alors il existe un unique chemin* $\tilde{f} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *tel que*

(1) $\tilde{f}(0) = 0$, *et*
(2) $p\tilde{f} = f$.

Preuve. Nous allons définir un recouvrement de $[0,1]$ à partir duquel nous constuirons $\tilde{f}$ ouvert par ouvert, en vérifiant l'unicité de la définition sur les intersections des ouverts.

Pour tout $t \in]0,1[$, il existe $\delta_t > 0$ tel que soit

$$f\big(\,]t-\delta_t, t+\delta_t[\,\big) \subset S^1 \smallsetminus \{1\},$$

soit

$$f\big(\,]t-\delta_t, t+\delta_t[\,\big) \subset S^1 \smallsetminus \{-1\}.$$

D'ailleurs, il existe $\delta > 0$ tels que

$$f\big([0,\delta[\,\big), f\big(\,]1-\delta, 1]\big) \subset S^1 \smallsetminus \{-1\}.$$

Puisque $[0,1]$ est compact et

$$[0,1] = [0,\delta[\cup \bigcup_{t\in[0,1]}]t-\delta_t, t+\delta_t[\cup]1-\delta, 1],$$

il existe $0 < t_1 < ... < t_k < 1$ tels que

$$[0,1] = [0,\delta[\cup \bigcup_{i=1}^{k}]t_i-\delta_i, t_i+\delta_i[\cup]1-\delta, 1],$$

où nous écrivons δ_i à la place de δ_{t_i}.

Commençons la construction de $\tilde{f}$. Observer d'abord que

$$f\big([0,\delta[\,\big) \subset p\big(\,]n+\frac{-1}{2}, n+\frac{1}{2}[\,\big),$$

ce qui nous permet de poser

$$\tilde{f}(s) = \big(p|_{\,]\frac{-1}{2},\frac{1}{2}[}\big)^{-1} \circ f(s), \quad \forall s \in [0,\delta_0[\,.$$

Alors il est clair que $\tilde{f}(0) = 0$, car $f(0) = 1$ et

$$\big(p|_{\,]\frac{-1}{2},\frac{1}{2}[}\big)^{-1}(1) = \{0\}.$$

D'ailleurs, $p\tilde{f} = f|_{[0,\delta[}$.

Supposons maintenant que $\tilde{f}$ soit définie de manière continue sur

$$J_j = [0,\delta[\cup \bigcup_{i=1}^{j}]t_i-\delta_i, t_i+\delta_i[$$

pour que $p\tilde{f} = f|_{J_j}$, où $j \leq k$. Supposons aussi, sans perte de généralité, que

$$f\big(\,]t_{j+1} - \delta_{j+1}, t_{j+1} + \delta_{j+1}[\,\big) \subset S^1 \smallsetminus \{1\}.$$

Alors il existe un unique $m \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\tilde{f}\big(\,]t_{j+1} - \delta_{j+1}, t_j + \delta_j[\,\big) \subset \,]m, m+1[\,.$$

Puisque

$$f\big(\,]t_{j+1} - \delta_{j+1}, t_{j+1} + \delta_{j+1}[\,\big) \subset p\big(\,]m, m+1[\,\big),$$

on peut poser

$$\tilde{f}(s) = (p|_{\,]m,m+1[\,})^{-1} \circ f(s), \quad \forall s \in \,]t_{j+1} - \delta_{j+1}, t_{j+1} + \delta_{j+1}[\,,$$

ce qui est continue et en accord avec le définition originelle sur $]t_{j+1} - \delta_{j+1}, t_j + \delta_j[\,$. L'extension de $\tilde{f}$ à $J_{j+1} = J_j \cup \,]t_{j+1} - \delta_{j+1}, t_{j+1} + \delta_{j+1}[$ est donc bien définie et continue. De plus il est clair que $p\tilde{f} = f|_{J_{j+1}}$.

On peut donc construire $\tilde{f}$ par récurrence.

Pour exhiber l'unicité de $\tilde{f}$, supposons que $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est aussi un chemin tel que $pg = f$ et $g(0) = 0$. Alors $\tilde{f} - g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, l'application définie par $(\tilde{f} - g)(t) = \tilde{f}(t) - g(t)$, est clairement continue et satisfait à $(\tilde{f} - g)(0) = 0$ et $p(\tilde{f} - g)(t) = 1$ pour tout $t \in [0,1]$. Mais il est évident que le seul chemin sur $\mathbb{R}$ qui satisfait à ces deux propriétés est le chemin constant à 0. Donc, $\tilde{f} = g$. $\square$

Il y a même un résultat plus général que l'unicité du relèvement $\tilde{f}$ qui nous sera utile.

LEMMA 11. *Soient $f, g : [0,1] \longrightarrow S^1$ deux chemins tels que $f(0) = f(1) = 1 = g(0) = g(1)$. Si $f \simeq g$ par une homotopie qui fixe les deux bouts, alors $\tilde{f} \simeq \tilde{g}$ par une homotopie qui fixe les deux bouts. En particulier, $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$.*

PREUVE. Cette preuve consiste pour l'essentiel en une généralisation à deux dimensions de la preuve du lemme 10. Ainsi, nous ne verrons pas tous les détails ici.

Soit H une homotopie de f vers g qui fixe les deux bouts. On sait qu'il existe pour tout couple $s, t \in [0,1]$ un nombre positif $\delta_{s,t}$ tel que soit

$$H(B_{s,t}) \subset S^1 \smallsetminus \{1\},$$

soit

$$H(B_{s,t}) \subset S^1 \smallsetminus \{-1\},$$

où $B_{s,t} = \,]s - \delta_{s,t}, s + \delta_{s,t}[\, \times \,]t - \delta_{s,t}, t + \delta_{s,t}[\,$.

Puisque $[0,1] \times [0,1]$ est compact, on peut de nouveau choisir un sousrecouvrement fini parmi les $B_{s,t}$. Ensuite on construit par récurrence une application $\widetilde{H} : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $p\widetilde{H} = H$, et $\widetilde{H}(0,t) = 0$ et $\widetilde{H}(1,t) = \tilde{f}(1)$ pour tout t. Par l'unicité de relèvement de chemins, on aura que $\widetilde{H}(s,0) = \tilde{f}(s)$ et $\widetilde{H}(s,1) = \tilde{g}(s)$ pour tout s. $\square$

Grâce à au lemme 11, on peut définir une application intéressante de $\pi_1(S^1, 1)$ vers $\mathbb{Z}$, qui sera utile pour le calcul de $\pi_1(S^1, 1)$.

Définition. *L'application degré*

$$\deg : \pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z}$$

est définie par $\deg([\alpha]_*) = \widetilde{\alpha q}(1)$, où $q : [0,1] \to S^1$ est la restriction de p à $[0,1]$.

Le lemme 11 implique que deg est bien défini, car

$$\alpha \simeq_* \beta \Longrightarrow \widetilde{\alpha q}(1) = \widetilde{\beta q}(1).$$

De plus, l'unicité du relèvement entraîne que

$$\widetilde{f \star g} = \tilde{f} \star (\tilde{g} + \tilde{f}(1)),$$

où $\tilde{g} + \tilde{f}(1)$ est la translation de $\tilde{g}$ par $\tilde{f}(1)$ unités, i.e., $(\tilde{g} + \tilde{f}(1))(s) = \tilde{g}(s) + \tilde{f}(1)$ pour tout s dans $[0,1]$. On obtient donc que

$$\deg([\alpha]_* \odot [\beta]_*) = \deg([\alpha \star \beta]_*) = \big(\widetilde{\alpha q} \star (\widetilde{\beta q} + \widetilde{\alpha q}(1))\big)(1) = \deg([\alpha]_*) + \deg([\beta]_*).$$

Autrement dit, deg est un homomorphisme.

Nous terminons le calcul de $\pi_1(S^1, 1)$ par le théorème suivant.

Théorème 12. *L'homomorphisme* deg *est un isomorphisme, donc*

$$\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}.$$

Preuve. Il suffit de vérifier que deg soit bijectif.

Si $0 = \deg[\alpha]_*$, alors $\widetilde{\alpha q}$ est un lacet sur $\mathbb{R}$, basé à 0. Or $\mathbb{R}$ est contractile, ce qui implique que tout lacet est équivalent au lacet trivial e_0. Alors $\widetilde{\alpha q} \simeq e_0$ par une homotopie qui fixe les points de base, donc $\alpha \simeq_* e_1$. L'homomorphisme deg est donc injectif.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, définir $\alpha_n : (S^1, 1) \to (S^1, 1)$ par $\alpha_n(e^{i\theta}) = e^{in\theta}$. Définir $\beta_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par $\beta(s) = ns$ pour tout $s \in [0,1]$. Alors $\beta_n(0) = 0$ et $p\beta_n = \alpha_n q$, i.e., par l'unicité du relèvement $\widetilde{\alpha_n q} = \beta_n$. Ainsi

$$\deg[\alpha_n]_* = \beta_n(1) = n.$$

L'homomorphisme deg est donc surjectif. $\square$

D.3 Le bouquet de deux cercles.

Considérer $S^1 \vee S^1$, i.e., l'espace qui consiste en deux cercle identifiés en un point x_0. Cet espace s'appelle un *bouquet ou wedge* de deux cercles.

Un argument par le théorème de Seifert-van Kampen (à faire au tableau) montre alors que $\pi_1(S^1 \vee S^1, x_0)$ est un groupe libre sur deux générateurs.

D.4 Le tore.

Comme nous le verrons au tableau, le tore $S^1 \times S^1$ a un recouvrement $\{U, V\}$, où $U \simeq_* S^1 \vee S^1$, $V \simeq_* \{pt.\}$, et $U \cap V \simeq_* S^1$.

Le groupe fondamental de $S^1 \times S^1$ est donc la somme amalgamée de

$$\begin{array}{ccc} |c:\emptyset| & \xrightarrow{\pi_1(\iota_1)} & |a,b:\emptyset| \\ \Big\downarrow & & \\ \{e\} & & \end{array}$$

où $\pi_1(\iota_1)(c) = aba^{-1}b^{-1}$.

Alors,

$$\pi_1(S^1 \times S^1) \cong F(\{a,b\})/Q(\{aba^{-1}b^{-1}\}) \cong F(\{a\}) \oplus F(\{b\}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$