Topologie algébrique

Série 1

21 octobre 2004

1.
(a) Soit $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ des équivalences d'homotopie.
Montrer que $g \circ f$ est encore une équivalence d'homotopie.
En déduire que l'équivalence d'homotopie entre espaces topologiques est une relation d'équivalence.
(b) Vérifier que pour les applications continues $X \to Y$, l'homotopie est une relation d'équivalence.
(c) Soit $f,\ g : X \to Y$ des applications continues homotopes.
Vérifier alors que f est une équivalence d'homotopie si g en est une.
(d) Vérifier que si
   (i)$f,\ f' : X \to Y$ sont homotopes
   (ii)$g,\ g' : Y \to Z$ sont homotopes
alors $g \circ f$ et $g' \circ f'$ sont homotopes.

2.
(a) Soit A un sous-espace de X et $r : X \to A$ une rétraction. Montrer que r est une application quotient.
(b) Prouver que $D^2/S^1 \cong S^2$.

3.
(a) Montrer que toute application continue $f : S^n \to S^n$ telle que $f(x) \neq -x$ pour tout $x \in S^n$ est homotope à l'identité.
(b) Montrer que deux applications continues $f,\ g : X \to S^n$ telles que $f(x) \neq -g(x)$ pour tout $x \in X$, sont homotopes.

4.
(a) Vérifier que tout espace contractile est connexe par arcs.
(b) Montrer que si Y est contractile, alors $[X, Y]$ ne contient qu'un seul élément pour tout espace X.
(c) Montrer que si X est contractile et si Y est connexe par arcs, alors $[X, Y]$ ne contient qu'un seul élément.