Topologie algébrique

Série 12

20 janvier 2005

1.
Soit $p : E \to B$ un revêtement avec B connexe et soit $b_0 \in B$. Montrer que si $p^{-1}(b_0)$ contient un nombre fini k d'éléments, alors $p^{-1}(b)$ contient k éléments $\forall b \in B$.
On dit alors que p est un revêtement à k **feuillets**.

2.
Vérifier que l'application $f_n : S^1 \to S^1$ défini par $f_n(z) = z^n$, $\forall z \in S^1 \subset \mathbb{C}$, est un revêtement à n feuillets, $\forall n \geq 1$.

Définition. *Soit $p : E \to B$ un revêtement. Si E est connexe par arcs et que $\pi_1(E)$ est trivial, alors on dit que le revêtement est **universel**.*

3.
(a) Soit $p : E \to B$ un revêtement universel et soit x_0 un point de B. Vérifier qu'il existe une bijection entre $\pi_1(B, x_0)$ et $p^{-1}(x_0)$.
(b) Soit $p : E \to B$ un revêtement universel à n feuillets, avec n un nombre premier. Montrer que $\pi_1(B, x_0) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

4.
(a) Vérifier que l'application évidente $p : S^n \to \mathbb{R}P^n$ est un revêtement à 2 feuillets.
(b) Que vaut $\pi_1(\mathbb{R}P^n)$?

5.
Soit $p : E \to B$ un revêtement, avec E connexe par arcs et B simplement connexe.
Montrer que p est un homéomorphisme.