Topologie algébrique

Série 13

27 janvier 2005

1.
Soit $n > 1$. Montrer que toute application continue $f : S^n \to S^1$ est homotope à une application constante.

2.
Soit $T = S^1 \times S^1$, le tore. Il existe un isomorphisme entre $\pi_1(T)$ et $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
(a) Trouver un revêtement de T correspondant au sous-groupe de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ engendré par $(m, 0)$, où $m > 0$.
(b) Trouver un revêtement de T correspondant au sous-groupe trivial de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
(c) Trouver un revêtement de T correspondant au sous-groupe de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ engendré par $(m, 0)$ et $(0, n)$, où $m, n > 0$.

Tous les espaces des exercices suivants sont supposés localement connexes par arcs et connexes par arcs.

3.
Soit $p : E \to B$ un revêtement, avec $p(e_0) = b_0$. Montrer que $p_*(\pi_1(E, e_0))$ est un sous-groupe normal de $\pi_1(B, b_0)$ si et seulement si il existe une équivalence $h : E \to E$ avec $h(e_1) = e_2$, pour tout couple de points e_1, $e_2 \in p^{-1}(b_0)$.

4.
Soit

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dd, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ & Y \arrow[dl, "r"] \\ Z & \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif d'applications continues.

(a) Montrer que q est un revêtement si p et r sont des revêtements.
(b) Montrer que r est un revêtement si p et q sont des revêtements.
(c) Supposons que Z admet un revêtement universel. Montrer alors que p est un revêtement si r et q sont des revêtements.
(d) Supposons que r et q sont des revêtements. Vérifier que p n'est pas nécessairement un revêtement.