Topologie algébrique

Série 2

28 octobre 2004

1.

Définition 1. *On définit une relation d'équivalence* $\sim$ *sur* $\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ *en posant* $x \sim y$ *si et seulement s'il existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *avec* $\lambda \neq 0$ *tel que* $x = \lambda y$.
*Alors l'**espace projectif réel de dimension** **n** est défini par*
$\mathbb{R}P^n := (\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}) / \sim$.

(a) Déterminer $\mathbb{R}P^0$.
(b) Montrer qu'il est possible de construire $\mathbb{R}P^n$ $(n \geq 1)$ en attachant une cellule de dimension n à $\mathbb{R}P^{n-1}$.
(c) Montrer par récurrence sur n que $\mathbb{R}P^n$ admet une décomposition cellulaire avec une cellule en chaque dimension infèrieure ou égale à n.

2.

Définition 2. *On définit une relation d'équivalence* $\sim$ *sur* $\mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\}$ *en posant* $x \sim y$ *si et seulement s'il existe* $\lambda \in \mathbb{C}$ *avec* $\lambda \neq 0$ *tel que* $x = \lambda y$.
*Alors l'**espace projectif complexe de dimension** **n** est défini par*
$\mathbb{C}P^n := (\mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\}) / \sim$.

(a) Déterminer $\mathbb{C}P^0$.
(b) Montrer qu'il est possible de construire $\mathbb{C}P^n$ $(n \geq 1)$ en attachant une cellule de dimension $2n$ à $\mathbb{C}P^{n-1}$.
(c) Montrer par récurrence sur n que $\mathbb{C}P^n$ admet une décomposition cellulaire avec une cellule en chaque dimension paire infèrieure ou égale à $2n$.

3.
Montrer que si $(X,\ A)$ vérifie la propriété d'extension d'homotopie, alors $(W \cup_f X,\ W)$ vérifie cette même propriété, pour toute application continue $f : A \to W$.

4.
Supposons que $(X,\ A)$ vérifie la propriété d'extension d'homotopie.
Montrer que si $f \simeq g : A \to W$, alors $W \cup_f X \simeq W \cup_g X$.