Topologie algébrique

Série 3

4 novembre 2004

1.
(a) Déterminer $\mathbb{R}P^0$.
(b) Montrer qu'il est possible de construire $\mathbb{R}P^n$ $(n \geq 1)$ en attachant une cellule de dimension n à $\mathbb{R}P^{n-1}$.
(c) Montrer par récurrence sur n que $\mathbb{R}P^n$ admet une décomposition cellulaire avec une cellule en chaque dimension infèrieure ou égale à n.

2.
(a) Déterminer $\mathbb{C}P^0$.
(b) Montrer qu'il est possible de construire $\mathbb{C}P^n$ $(n \geq 1)$ en attachant une cellule de dimension $2n$ à $\mathbb{C}P^{n-1}$.
(c) Montrer par récurrence sur n que $\mathbb{C}P^n$ admet une décomposition cellulaire avec une cellule en chaque dimension paire infèrieure ou égale à $2n$.

3.
Supposons que $(X,\ A)$ vérifie la propriété d'extension des homotopies et que $f \simeq g : A \to W$. Soit $H : A \times I \to W$ une homotopie de f vers g.
(i) Montrer que $X \times \{0\} \cup A \times I$ est un rétracte par déformation de $X \times I$ (utiliser la proposition 0.20 du livre "Algebraic topology" de A. Hatcher).
(ii) Montrer que la rétraction par déformation de $X \times I$ sur $X \times \{0\} \cup A \times I$ induit une rétraction par déformation de $W \cup_H (X \times I)$ sur $W \cup_f X$, et une rétraction par déformation de $W \cup_H (X \times I)$ sur $W \cup_g X$.
(iii) Constater que l'exercice 4 de la série 2 est résolu !

4.
Soit X un CW-complexe tel que $X = Y \cup Z$ avec les conditions suivantes :
(a) Y et Z sont des sous-CW-complexes contractiles
(b) $Y \cap Z$ est contractile.
Montrer que X est contractile, en procédant comme suit :
(i) Montrer, en utilisant le corollaire 0.20 du livre "Algebraic topology" d'A. Hatcher qu'il existe une rétraction par déformation $G_Y : Y \times I \to Y$ de Y sur $Y \cap Z$ (et de même, il existe une rétraction par déformation G_Z de Z sur $Y \cap Z$).
(ii) Utiliser une homotopie de contraction H de $Y \cap Z$, et G_Y pour construire une homotopie de contraction de Y (faire la même chose en remplaçant Y par Z).
(iii) Conclure.

5.
Subdivisons S^2 en polygones, et notons p le nombre de polygones, a le nombre d'arêtes, et s le nombre de sommets de la subdivision.
En choisissant des subdivisions simples, trouver une relation entre p, a, et s.