Topologie algébrique

Série 5

18 novembre 2004

1.
Soit X un espace topologique, x_0 un point de X et X_0 la composante connexe de X qui contient x_0.
Montrer que $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X_0, x_0)$.

2.
Montrer que si deux espaces topologiques sont équivalents à homotopie près, alors ils ont même groupe fondamental (à isomorphisme près).

3.
Soit (X, x_0) et (Y, y_0) des espaces topologiques pointés, et $f : X \to Y$ une application continue pointée. Supposons que f soit homotope à une application constante.
Prouver alors que $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ est triviale.

4.
Soit (X, x_0) et (Y, y_0) des espaces topologiques pointés.
Prouver que $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.

5.
Montrer que pour un espace X, les assertions suivantes sont équivalentes.
(a) Toute application continue $S^1 \to X$ est homotope à une application constante.
(b) Tout application continue $S^1 \to X$ peut être étendue à une application continue $D^2 \to X$.
(c) $\pi_1(X, x) = 0$, $\forall x \in X$.

6.
Soit (X, x_0) un espace pointé et soit A un sous-espace connexe par arcs de X avec $x_0 \in A$.
Prouver alors que l'homomorphisme $i_* : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ induit par l'inclusion $i : A \to X$ est surjective si et seulement si tout chemin dans X dont les extremités sont dans A est homotope à un chemin dans A.