Topologie algébrique

Série 6

25 novembre 2004

1.
(i) Soit $f : X \to Y$ une application continue injective. Est-ce que $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ est injective ?
(ii) Soit $f : X \to Y$ une application continue surjective. Est-ce que $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ est surjective ?

2.
Prouver le théorème du point fixe de Brouwer en dimension 2 :
Toute application continue $f : D^2 \to D^2$ admet au moins un point fixe.

3.
(i) Prouver le théorème de Borsuk-Ulam en dimension 2 :
Pour toute application continue $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ il existe $x \in S^2$ tel que $f(x) = f(-x)$.
(ii) Est-ce que le théorème de Borsuk-Ulam est vrai pour le tore ?
Autrement dit, est-ce que l'affirmation suivante

Pour toute application continue $f : S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}^2$ il existe $x \in S^1 \times S^1$ tel que $f(x) = f(-x)$.

est vérifiée ?

4. Applications du théorème de Borsuk-Ulam.
(i) Montrer qu'il existe un point x sur la terre tel que la température et la pression barométrique en ce point soient les mêmes qu'au point $-x$.
(ii) Soit X un sous-espace de $\mathbb{R}^2$. Montrer que X n'est pas homéomorphe à S^2.