Topologie algébrique

Série 7

2 décembre 2004

Définition. *Soit X un espace topologique. Un **revêtement** de X est un espace $\tilde{X}$ avec une application continue $p : \tilde{X} \to X$ tels qu'il existe un recouvrement ouvert $\{U_\alpha\}$ de X qui possède la propriété suivante :*
$p^{-1}(U_\alpha)$ est une réunion disjointe d'ouverts de $\tilde{X}$ et chacun de ces ouverts est homéomorphe à U_α par p, et ce pour tout α.

1.
Notons $\tilde{X}$ le sous-espace $\{(x,y)|x \in \mathbb{Z} \text{ } ou \text{ } y \in \mathbb{Z}\}$ de $\mathbb{R}^2$.
Montrer qu'il existe un revêtement $p : \tilde{X} \to S^1 \vee S^1$.

2.
(i) Soit $p : \tilde{X} \to S^1 \vee S^1$ le revêtement de l'exercice 1.
Vérifier que pout tout chemin $f : I \to S^1 \vee S^1$ d'origine x_0 et pour tout $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, il existe un unique chemin $\tilde{f} : I \to \tilde{X}$ d'origine $\tilde{x}_0$ tel que $p\tilde{f} = f$ (on dit que $\tilde{f}$ est un relèvement de f).
<u>Indication</u> : regarder la preuve du théorème qui dit que $\mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1)$.

(ii) Soit a le chemin faisant un tour de l'une des copies de S^1 dans $S^1 \vee S^1$ et soit b le chemin faisant un tour de l'autre copie de S^1 dans $S^1 \vee S^1$. Donner un relevement de $abbab^{-1}a$ et de $abbaba^{-1}$.

3.
(i) Est-ce qu'il existe d'autres revêtements de $S^1 \vee S^1$?
(ii) Est-ce qu'il existe un revêtement $\tilde{X}$ de $S^1 \vee S^1$ avec $\pi_1(\tilde{X}) = 0$ (on dit alors que $\tilde{X}$ est un revêtement universel) ?