UNIVERSITÉ DE VALENCIENNES

MAÎTRISE DE MATHÉMATIQUES

Topologie algébrique

par

Aziz El Kacimi

CAHIER D'EXERCICES

Année universitaire 1995-1996

Fiche 1

Exercice 1

Soient A et B deux parties d'un espace métrique X. On rappelle que la distance entre A et B est le nombre

$$d(A,B) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a,b).$$

1. Montrer que si A est compacte, B fermée et $A \cap B = \emptyset$, alors $d(A,B) > 0$.

2. Montrer qu'on peut avoir $d(A,B) = 0$ pour deux fermés disjoints A et B dont aucun n'est compact.

Exercice 2

Soient $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ et $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$. Montrer que $\mathbb{D}$ et $\mathbb{H}$ sont homéomorphes.

Exercice 3

On note $\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^3$. On pose $X = \mathbb{S}^2 - \{N\}$ où N est le pôle nord i.e. le point de coordonnées $(0,0,1)$ et on note H l'hyperplan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x_3 = 0$. A tout point $M \in X$ on associe le point $m \in H$ situé sur la droite (NM). Expliciter l'application $\varphi : M \in \mathbb{S}^2 \longrightarrow m \in H$ et montrer que c'est un homéomorphisme. L'application φ est appelée *projection stéréographique.*

Exercice 4

On considère les ensembles suivants $P^* \subset \mathbb{R}^2$, $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^3$ appelés respectivement *plan épointé, cylindre* et *hyperboloïde de révolution à une nappe* :

$$P^* = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2) \neq (0,0)\},$$
$$\mathcal{C} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$
$$\mathcal{H} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1\}.$$

Ces trois ensembles sont des espaces topologiques : le premier est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et les deux derniers sont des parties fermées de $\mathbb{R}^3$. Montrer qu'ils sont homéomorphes.

Exercice 5

Soient $(E, ||\quad||)$ un espace normé et B sa boule unité ouverte. Montrer que E et B sont homéomorphes.

Exercice 6

Démontrer le lemme suivant connu sous le nom de *Lemme de Lebesgue d'un recouvrement ouvert.* Il nous servira dans l'étude de certains revêtements ; il faut donc s'en rappeler.

Lemme. *Soient (X,d) un espace métrique compact et $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X. Alors il existe un nombre $\delta > 0$ tel que toute partie A de diamètre inférieur à δ soit contenue dans l'un des ouverts U_i.*

Exercice 7

Soit $X = (x_i)_{i\in I}$ un ensemble quelconque qu'on appelle *alphabet.* On se propose de construire le *groupe libre* $F(X)$ dont les *générateurs* sont les éléments de X. On associe à X un ensemble $X^{-1} = (x_i^{-1})_{i\in I}$ de telle sorte que l'application

$$x_i \in X \longmapsto x_i^{-1} \in X^{-1}$$

soit une bijection. On appelle *mot* sur X toute suite finie $u = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{i_m}^{\varepsilon_m}$ où $\varepsilon_{i_1}, \dots, \varepsilon_{i_m}$ sont des éléments de $\{+1, -1\}$. Le nombre m d'éléments de $X \cup X^{-1}$ qui apparaissent dans l'écriture de u s'appelle *longueur* de u. Un mot est dit *réductible* s'il contient des blocs du type $x_i^{\varepsilon_i} x_i^{-\varepsilon_i}$; *irréductible sinon.* Par exemple

$$x_i x_i x_j^{-1} x_k x_k x_l \text{ est irréductible alors que } x_i x_i x_i^{-1} x_j^{-1} x_k x_k x_l \text{ est réductible.}$$

On dira que deux mots u et v sont *équivalents* si l'un s'obtient à partir de l'autre en rajoutant ou en retranchant des blocs du type $x_i^{\varepsilon_i} x_i^{-\varepsilon_i}$. On note $\mathcal{M}(X)$ l'ensemble des mots sur X et $F(X)$ l'ensemble des classes d'équivalence.

Sur $\mathcal{M}(X)$ on définit une loi de composition interne. Si

$$u = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{i_m}^{\varepsilon_m} \ \text{ et } \ v = x_{j_1}^{\varepsilon'_1} \dots x_{j_n}^{\varepsilon'_n} \ \text{ avec } \ \varepsilon_1, \dots \varepsilon_m, \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n \in \{+1, -1\}$$

on pose

$$uv = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{i_m}^{\varepsilon_m} x_{j_1}^{\varepsilon'_1} \dots x_{j_n}^{\varepsilon'_n}.$$

1. Montrer que cette opération induit sur $F(X)$ une structure de groupe. On dira que $F(X)$ est le *groupe libre bâti sur l'alphabet* X ou *engendré* par X. On dira aussi que X est un *système de générateurs.*

2. Montrer que si X est réduit à un seul élément alors $F(X)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

3. Soit G un groupe engendré par une famille d'éléments $(g_i)_{i\in I}$ indexée par I. Montrer que l'application $x_i \in X \longmapsto g_i \in G$ se prolonge en un homomorphisme de groupes $\varphi : F(X) \longrightarrow G$.

Les éléments du noyau de φ sont appelés *relations* du groupe G ; on dira que $\langle X \mid \mathrm{Ker}\varphi\rangle$ est une *présentation* de G par *générateurs* et *relations.* On dira que G est de *type fini* ou *finiment engendré* si X est fini ; il est dit de *présentation finie* s'il est de type fini et a un nombre fini de relations.

Fiche 2

Exercice 1

Soit Γ le graphe dans $\mathbb{R}^2$ de la fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \sin\{\frac{1}{x}\} \in [-1, +1]$. Notons X son adhérence ; alors

$$X = \Gamma \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0,\ -1 \leq y \leq +1\}.$$

Montrer que X (en tant que partie de $\mathbb{R}^2$) est connexe mais qu'elle n'est pas connexe par arcs.

Exercice 2

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si A et B sont connexes et telles que $A \cap B \neq \emptyset$ alors $A \cup B$ est connexe. Le résultat reste-t-il vrai si on remplace la propriété de *connexité* par celle de *connexité par arcs* ?

Exercice 3

Soient A et B deux parties non vides respectivement de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ et posons $C = A \times B \subset \mathbb{R}^{n+m}$. Montrer que A et B sont connexes si, et seulement si, C est connexe.

Exercice 4

Soient X et Y deux espaces homéomorphes (on notera $f : X \longrightarrow Y$ un homéomorphisme entre les deux).

1. Montrer qu'il existe $x \in X$ et $y \in Y$ tels que $X - \{x\}$ et $Y - \{y\}$ soient homéomorphes.

2. Montrer que deux quelconques des espaces $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{S}^1$ ne sont jamais homéomorphes.

Exercice 5

Soit X un espace topologique. On dira que X est *localement connexe par arcs* au point $x \in X$ si tout voisinage de x contient un voisinage (de x bien entendu) connexe par arcs ; on dira que X est *localement connexe par arcs* s'il est localement connexe par arcs en chacun de ses points.

1. Montrer que

(1) tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est localement connexe par arcs ;
(2) si X est localement connexe par arcs alors tout ouvert de X l'est aussi ;
(3) si les parties U_i de X sont localement connexes par arcs et ouvertes de telle sorte que $X = \bigcup_i U_i$, alors X est localement connexe par arcs.

2. Montrer que les espaces suivants ne sont pas localement connexes par arcs :

$$\mathbf{P} = \left\{0, \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

$$Y = \{\text{segments dans } \mathbb{R}^2 \text{ joignant } \mathbf{P} \text{ au point } A = (0, 1)\}.$$

3. Montrer que si X est localement connexe par arcs et connexe, alors il est connexe par arcs.

Exercice 6

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$. Montrer que deux points quelconques de U peuvent être joints par un chemin $\sigma : [0,1] \longrightarrow U$ affine par morceaux.

Exercice 7

Soient $X = [0,+\infty[$ et $a \in]0,1[$. On définit une action de $\mathbb{Z}$ sur l'espace X comme suit

$$\Phi : (n,x) \in \mathbb{Z} \times X \longmapsto a^n x \in X.$$

1. Montrer que cette action n'est ni libre ni propre ni discontinue mais que sa restriction à la partie invariante $X_0 =]0,+\infty[$ possède toutes ces propriétés.

2. Montrer que l'action $(X_0, \mathbb{Z}, \Phi)$ est conjuguée à l'action standard $(\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \Psi)$ i.e. $\mathbb{Z}$ agit sur $\mathbb{R}$ par

$$\Psi : (n,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \longrightarrow y + n \in \mathbb{R}.$$

3. En déduire que l'espace quotient X_0/Φ est homéomorphe au cercle $\mathbb{S}^1$.

Exercice 8

Soit $Z = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ le disque unité ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$; un point z sera repéré par ses coordonnées polaires (r,θ). On notera $\partial\overline{Z} = \{z \in Z : |z| = 1\}$. On munit $\overline{Z}$ de la relation dont les classes d'équivalence sont

$$\text{classe de } z = \begin{cases} \{z\} & \text{si } |z| < 1 \\ \partial\overline{Z} & \text{si } |z| = 1. \end{cases}$$

On notera X l'espace quotient de $\overline{Z}$ par cette relation d'équivalence muni de la topologie quotient.

1. Montrer que l'application $\Phi : Z \longrightarrow \mathbb{S}^2 - \{\text{pôle sud}\} \subset \mathbb{R}^3$ définie par

$$\Phi(r,\theta) = \begin{cases} \text{pôle nord} & \text{si } z = 0 \\ \begin{pmatrix} \cos\theta \sin(\pi r) \\ \sin\theta \sin(\pi r) \\ \cos(\pi r) \end{pmatrix} & \text{si } 0 < |z| < 1 \end{cases}$$

est continue et surjective.

2. Montrer que Φ permet de définir un homéomorphisme de X sur la sphère $\mathbb{S}^2$.

Fiche 3

EXERCICE 1

1. Soient X un espace et f_0, f_1 deux applications continues de X dans $\mathbb{S}^n$ telles que $f_0(x) \neq -f_1(x)$ pour tout $x \in X$. Montrer que f_0 et f_1 sont homotopes.

2. Montrer que l'espace $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ a même type d'homotopie que la sphère $\mathbb{S}^n$.

EXERCICE 2

Soit X un espace. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) X est contractile ;
(2) id_X est homotope à une application constante ;
(3) toute application continue f d'un espace Y dans X est homotope à une application constante ;
(4) deux applications continues d'un espace Y dans X sont homotopes.

EXERCICE 3

Soient a et b les points de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées respectives $(1,0)$ et $(-1,0)$. On note γ_1 et γ_2 les cercles de rayon 1 de centres respectifs a et b et on pose $X = \mathbb{R}^2 - \{a,b\}$ et $Y = \gamma_1 \cup \gamma_2$.

Montrer que X se rétracte par déformation sur Y.

EXERCICE 4

Soit X le fermé $\mathbb{D}^n \times \{0\} \cup \mathbb{S}^{n-1} \times I$ (marmite sans couvercle) de $\mathbb{D}^n \times I$. Montrer que l'application $r : \mathbb{D}^n \times I \longrightarrow \mathbb{D}^n \times I$ définie par

$$r(x,s) = \begin{cases} \left(\frac{2x}{2-s}, 0\right) & \text{si } ||x|| \leq \frac{2-s}{2} \\ \left(\frac{x}{||x||}, \frac{s+2||x||-2}{||x||}\right) & \text{si } ||x|| \geq \frac{2-s}{2} \end{cases}$$

est une rétraction par déformation de $\mathbb{D}^n \times I$ sur X.

EXERCICE 5

Effet d'applications continues sur le groupe fondamental

Soient $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ deux applications continues et $x_0 \in X$. On pose $y_0 = f(x_0)$ et $z_0 = g(y_0)$.

1. Montrer que f induit un homomorphisme de groupes $f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$.

2. Montrer que si $X = Y$ et $f = id_X$ alors $f_* = id_{\pi_1(X,x_0)}$.

3. Montrer que $(g \circ f)_* = g_* \circ f_0$.

4. Montrer que si f est un homéomorphisme alors f_* est un isomorphisme. On dira que le groupe fondamental est un *invariant topologique.*

Supposons X et Y connexes par arcs et soit γ un chemin joignant $y_0 \in Y$ à $y_1 \in Y$. Alors γ définit un isomorphisme de groupes $h_\gamma : [\sigma] \in \pi_1(Y, y_1) \longrightarrow [\sigma\gamma\sigma^{-1}] \in \pi_1(Y, y_0)$ ne dépendant que de la classe d'homotopie de γ. Soient $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ homotopes et posons $y_0 = f_0(x_0)$ et $y_1 = f_1(x_0)$. Notons $F : X \times I \longrightarrow Y$ l'homotopie entre f_0 et f_1 (relativement à $\{0, 1\}$).

5. Montrer que $g_* = h_{\gamma^{-1}} \circ f_*$. Il suffit de montrer que l'application $G : I \times I \longrightarrow Y$ définie par

$$G(t,s) = \begin{cases} \gamma^{-1}(2t) = \gamma(1-2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1-s}{2} \\ F\left(\sigma\left(\frac{4t+2s-2}{3s+1}\right), s\right) & \text{si } \frac{1-s}{2} \leq t \leq \frac{s+3}{4} \\ \gamma(4t-3) & \text{si } \frac{s+3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

est une homotopie entre $\gamma^{-1}(f_0 \circ \sigma)\gamma$ et $f_1 \circ \sigma$. On en déduit que si $y_0 = y_1$, alors f_0 et f_1 induisent les mêmes homomorphismes $\pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$.

6. En déduire que si X et Y ont même type d'homotopie alors leurs groupes fondamentaux sont isomorphes.

Exercice 6

On regarde le cercle $\mathbb{S}^1$ comme l'ensemble des nombres complexes de module 1 et on note $p : I \longrightarrow \mathbb{S}^1$ l'application définie par $p(t) = e^{2i\pi t}$. L'ensemble des lacets $\sigma : I \longrightarrow X$ de base x_0 (X étant un espace connexe par arcs) est en correspondance biunivoque avec les applications continues $\widehat{\sigma} : \mathbb{S}^1 \longrightarrow X$ telles que $\widehat{\sigma}(1) = x_0$.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) σ est homotope au lacet constant ;
(2) $\widehat{\sigma}$ est homotope, relativement à 1, à l'application constante $\mathbb{S}^1 \longrightarrow \{x_0\}$;
(3) $\widehat{\sigma}$ est homotope à une application constante ;
(4) $\widehat{\sigma}$ se prolonge en une application continue du disque $\mathbb{D}^2$ (dont $\mathbb{S}^1$ est le bord) dans X.

Exercice 7

Soit G un groupe. On dira que G est un *groupe topologique* s'il est muni d'une topologie pour laquelle les applications $(g, g') \in G \times G \longrightarrow gg' \in G$ et $g \in G \longrightarrow g^{-1}$ sont continues.

Supposons X connexe par arcs. Soient σ_0 et σ_1 deux lacets basés en l'élément neutre e de G. Montrer que le commutateur $[\sigma_0][\sigma_1][\sigma_0]^{-1}[\sigma_1]^{-1}$ est toujours trivial et en déduire que $\pi_1(G, e)$ est abélien. Utiliser le fait que ce commutateur est représenté par le lacet

$$\gamma(t) = \begin{cases} \sigma_0(4t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \sigma_1(4t-1) & \text{si } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \sigma_0(3-4t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ \sigma_1(4-4t) & \text{si } \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Fiche 4

Exercice 1

Soient G_1 et G_2 deux groupes. On pose $X = G_1 \cup G_2$ et on appelle *mot réduit* de *longueur* n dans X toute suite finie $(x_1, \dots, x_n)$ qui ne contient aucun élément neutre e_i, $i = 1, 2$ et telle que deux termes qui se suivent n'appartiennent pas au même groupe G_i. Un mot de longueur 0 est représenté par le "vide" ( ). Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des mots réduits dans X. Pour tout indice $i = 1, 2$ nous allons définir une action de G_i sur $\mathcal{M}$. Soient $g \in G_i$ et $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{M}$.

(1) Si $x_1 \notin G_i$ on pose $gx = (g, x_1, \dots, x_n)$ si $g \neq e_i$ et $gx = x$ si $g = e_i$;

(2) si $x_1 \in G_i$ alors

$$gx = \begin{cases} (gx_1, x_2 \dots, x_n) & \text{si } gx_1 \neq 1 \\ (x_2, \dots, x_n) & \text{si } gx_1 = e_i \\ (\,) & \text{si } n = 1 \text{ et } gx_1 = e_i \end{cases}$$

1. Montrer qu'on définit ainsi une action libre de G_i sur $\mathcal{M}$.

Le groupe G_i peut donc être considéré comme un sous-groupe du groupe $\mathrm{Bij}(\mathcal{M})$ des permutations de $\mathcal{M}$. Soit φ_i l'injection de G_i dans $\mathrm{Bij}(\mathcal{M})$ et notons G le sous-groupe de $\mathrm{Bij}(\mathcal{M})$ engendré par $G_1 \cup G_2$.

2. Montrer que tout élément $g \neq 1$ de G s'écrit de manière unique sous la forme réduite $g = g_{i_1} \dots g_{i_n}$ i.e. les g_{i_k} sont des éléments de $G_1 \cup G_2$ tous différents des éléments neutres e_1 et e_2 et tels que deux éléments qui se suivent dans l'écriture n'appartiennent pas au même groupe G_i.

Soient H un groupe et pour chaque i, $h_i : G_i \longrightarrow H$ un homomorphisme.

3. Montrer qu'il existe un homomorphisme unique $h : G \longrightarrow H$ tel que, pour tout i, on ait $h_i = h \circ \varphi_i$.

On dira que G est le *produit libre* des groupes G_1 et G_2 et on le notera $G = G_1 * G_2$.

Exercice 2

1. Soient G_1 et G_2 deux groupes cycliques d'ordre 2. Quel est leur produit libre $G_1 * G_2$?

2. Montrer que le produit libre de n copies de $\mathbb{Z}$ est le groupe libre à n générateurs.

Exercice 3

On note $\mathbb{T}^2$ le produit $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ qu'on appelle le *tore* de dimension 2. Soient a et b deux points de $\mathbb{T}^2$; on pose $X = \mathbb{T}^2 - \{a\}$ et $Y = \mathbb{T}^2 - \{a, b\}$.

1. Montrer que l'espace X a le type d'homotopie d'un bouquet de deux cercles $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$. Quel est son groupe fondamental ?

2. Montrer que Y a le type d'homotopie d'un bouquet de trois cercles $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$. Quel est son groupe fondamental ?

3. Cette fois-ci on considère $n-1$ points $a_1, \dots, a_{n-1}$ distincts de $\mathbb{T}^2$. Que peut-on dire de l'espace $Z = \mathbb{T}^2 - \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ et de son groupe fondamental ?

Exercice 4

Soient $a \in \mathbb{R}^3$ et $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ une droite telle que $a \notin \Delta$. On pose $E = \Delta \cup \{a\}$ et $X = \mathbb{R}^3 - E$.

1. Quel est le groupe fondamental de X ?

2. L'espace X peut-il être homéomorphe à $\mathbb{R}^3$?

3. Quel est le groupe fondamental de $Y = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$? L'espace Y peut-il être homéomorphe à $\mathbb{R}^3$? A-t-il au moins le type d'homotopie de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 5

Soient X un espace et X_1 et X_2 deux ouverts de X tels que $X = X_1 \cup X_2$. On suppose X, X_1, X_2 et $X_0 = X_1 \cap X_2$ connexes par arcs. Alors on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X_1) & \overset{(i_1)_*}{\longrightarrow} & \pi_1(X) \\ (j_1)_* \uparrow & & \uparrow (i_2)_* \\ \pi_1(X_0) & \overset{(j_2)_*}{\longrightarrow} & \pi_1(X_2) \end{array}$$

où $i_1 : X_1 \hookrightarrow X$, $i_2 : X_2 \hookrightarrow X$, $j_1 : X_0 \hookrightarrow X_0$ et $j_2 : X_0 \hookrightarrow X_2$ sont les inclusions canoniques. Le théorème de Van Kampen nous dit que $\pi_1(X)$ est la somme amalgamée sur $\pi_1(X_0)$ de $\pi_1(X_1)$ et $\pi_2(X_2)$. Supposons X_2 simplement connexe et notons H_1 le sous-groupe normal de $\pi_1(X_1)$ engendré par $(j_1)_*(\pi_1(X_0))$.

1. Montrer que $\pi_1(X)$ est isomorphe au quotient $\pi_1(X_1)/H_1$.

2. Montrer que $\pi_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ en utilisant la question 1.

Exercice 6

On note Γ le sous-groupe $\mathbb{Z}^n$ de l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}^n$; on dira que Γ est le *réseau standard* de E.

1. Montrer que l'action $\Phi : (\mathbf{k}, x) \in \Gamma \times E \longrightarrow x + \mathbf{k}$ est libre, propre et discontinue et que le quotient $X = E/\Gamma$ est homéomorphe au n-tore $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \ldots \times \mathbb{S}^1$.

Soit $A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients entiers et de déterminant égal à 1.

2. Montrer que A induit un homéomorphisme de $\mathbb{T}^n$.

3. Expliciter l'isomorphisme $A_* : \pi_1(\mathbb{T}^n) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{T}^n)$.

Fiche 5

Exercice 1

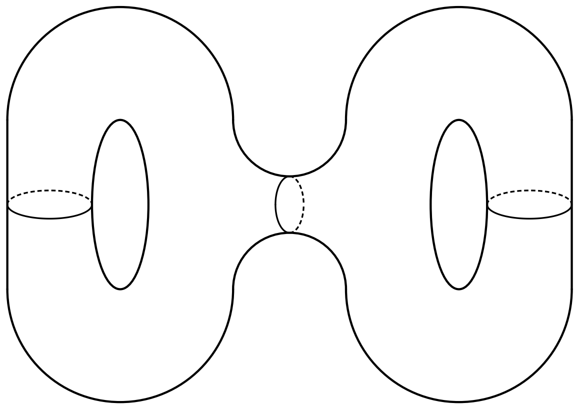
Soit $X = \mathbb{D}^2$ le disque unité fermé dans $\mathbb{C}$; son bord $\partial\mathbb{D}^2$ est le cercle $Y = \mathbb{S}^1$.

1. En utilisant les propriétés du groupe fondamental, montrer que X ne peut pas se rétracter sur Y.

2. Montrer que toute application continue $f : \mathbb{D}^2 \longrightarrow \mathbb{D}^2$ admet un point fixe i.e. il existe $x \in \mathbb{D}^2$ tel que $f(x) = x$ (c'est le *Théorème du point fixe de Brouwer*).

Exercice 2

Calculer, en utilisant le théorème de Van Kampen, le groupe fondamental de la surface orientable compacte (sans bord) Σ_g de genre $g \geq 2$ (*cf.* dessin qui suit où $g = 2$).



Σ_2 : surface de genre 2, orientable et sans bord.
$\pi_1(\Sigma_2) = \langle a, b, c, d \mid aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} = 1 \rangle$

Exercice 3

Soient $\sigma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{C}$ une application continue et x un point de $\mathbb{C}$ qui n'est pas dans l'image de σ. Soit $\sigma_x : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ l'application définie par

$$\sigma_x(t) = \frac{\sigma(t) - x}{|\sigma(t) - x|} \cdot \left(\frac{\sigma(1) - x}{|\sigma(1) - x|} \right)^{-1}.$$

L'application σ_x définit alors un lacet du cercle $\mathbb{S}^1$. Ce lacet se relève en un chemin unique $\widetilde{\sigma}_x$ dans $\mathbb{R}$ d'origine 0 et d'extrémité $\widetilde{\sigma}_x(1)$ un entier qu'on a appelé le *degré* de σ_x et qu'on note $\deg(\sigma_x)$. Cet entier $\deg(\sigma_x)$ sera aussi, par définition, l'*indice* de x par rapport à σ. On le note $\mathrm{I}_x(\sigma)$. Il ne dépend, bien sûr, que de la classe d'homotopie de σ_x.

1. Supposons $\sigma = \varepsilon_a$ lacet constant de base $a \in \mathbb{C}$ et soit $x \in \mathbb{C} - \{a\}$. Calculer $\mathrm{I}_x(\sigma)$.

2. Montrer que si l'image de σ est le cercle trigonométrique habituel alors $\mathrm{I}_0(\sigma) = \deg(\sigma)$.

3. Soient x et y dans la même composante connexe par arcs de $\mathbb{C} - \sigma(\mathbb{S}^1)$. Montrer que $\mathrm{I}_x(\sigma) = \mathrm{I}_y(\sigma)$.

4. On pose $X = \mathbb{C} - \{a\}$ et soient $\sigma, \gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow X$ deux chemins homotopes. Montrer que $\mathrm{I}_a(\sigma) = \mathrm{I}_a(\gamma)$.

Exercice 4

Soit $P \in [z]$ un polynôme à coefficients complexes :

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0.$$

<u>**Hypothèse**</u> : *P n'a pas de racine complexe i.e. pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $P(z) \neq 0$.*

Soient $(\sigma_r)_{r \geq 0}$ et $(\gamma_r)_{r>0}$ les applications de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{C}^*$ définies par

$$\sigma_r(z) = P(rz) \qquad \text{et} \qquad \gamma_r(z) = r^n z^n.$$

où $|z| = 1$. On pose $C = 1 + |a_{n-1}| + \ldots + |a_1| + |a_0|$.

1. Montrer que pour tout $r \geq C$ on a $|\sigma_r(z) - \gamma_r(z)| < r^n$ et en déduire que (pour $r \geq C$) σ_r et γ_r sont homotopes.

2. Calculer $\mathrm{I}_0(\sigma_r)$ et $\mathrm{I}_0(\gamma_r)$.

3. Conclusion ?

Exercice 5

On considère la sphère $X = \mathbb{S}^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \ : \ |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$. Elle contient un tore $\mathbb{T}^2$ donné par la partie fermée

$$Y = \left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3 \ : \ |z_1|^2 = \frac{1}{2} \text{ et } |z_2|^2 = \frac{1}{2}\right\}.$$

1. En coupant X suivant Y on obtient deux fermés de $\mathbb{S}^3$:

$$X_+ = \left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3 \ : \ |z_1|^2 \leq \frac{1}{2}\right\} \text{ et } X_- = \left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3 \ : \ |z_1|^2 \geq \frac{1}{2}\right\}.$$

Décrire la topologie de X_+ et X_- ; plus précisément montrer qu'ils sont homéomorphes à $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$.

On prend deux exemplaires X_1 et X_2 de $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$. On a

$$\partial X_1 = \partial X_2 = \left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \ : \ |z_1| = |z_2| = 1\right\}.$$

2. On attache X_1 à X_2 en identifiant le point (z_1, z_2) du bord de X_1 au point (z_1, z_2) du bord de X_2. Qu'obtient-on ? On fait la même chose mais en identifiant le point (z_1, z_2) du bord de X_1 au point (z_2, z_1) du bord de X_2. Qu'obtient-on ?

Fiche 6

Exercice 1

Soit Γ un groupe agissant sur un ensemble X par une application $\Gamma \times X \xrightarrow{\Phi} X$. Pour tout $x \in X$, $\mathcal{O}_x$ sera l'orbite de x sous cette action et Γ_x le sous-groupe d'isotropie de x. On note H_x l'*espace homogène* Γ/Γ_x (qui est un groupe si, et seulement si, Γ_x est distingué dans Γ).

1. Montrer qu'il existe une bijection entre $\mathcal{O}_x$ et H_x.

2. Que peut-on dire dans le cas particulier où l'action de Γ est transitive ?

Exercice 2

Soient Γ un groupe et Γ_0 un sous-groupe de Γ. Alors le sous-groupe Γ_0 définit deux actions sur Γ, l'une à droite et l'autre à gauche

$$R : \Gamma \times \Gamma_0 \longrightarrow \Gamma \text{ et } L : \Gamma_0 \times \Gamma \longrightarrow \Gamma$$

définies par $R(\gamma, \gamma_0) = \gamma\gamma_0$ et $L(\gamma_0, \gamma) = \gamma_0\gamma$. On note $G = \Gamma/\Gamma_0$ et $H = \Gamma_0 \setminus \Gamma$ les espaces homogènes correspondants (ce sont simplement les quotients obtenus à partir de Γ par les relations d'équivalence associées respectivement aux actions R et L).

Montrer que les translations à gauche (respectivement à droite) sur Γ définissent une action de Γ sur G (respectivement sur H).

Exercice 3

Soient $E \xrightarrow{p} B$ un revêtement et $x \in E$ et $b \in B$ tels que $p(x) = b$.

1. Montrer que l'homomorphisme $p_* : \pi_1(E, x) \longrightarrow \pi_1(B, b)$ est injectif.

On suppose E connexe par arcs. Soient $x_0, x_1 \in E$ tels que $p(x_0) = p(x_1) = b$. Soient $\widehat{\gamma}$ un chemin de E joignant x_0 et x_1, $\widehat{\gamma}_* : \pi_1(E, x_0) \longrightarrow \pi_1(E, x_1)$ l'isomorphisme qu'il détermine et $\gamma = p \circ \widehat{\gamma}$ le projeté de $\widehat{\gamma}$ sur B. On pose $\Gamma_0 = p_*(\pi_1(E, x_0))$ et $\Gamma_1 = p_*(\pi_1(E, x_1))$ qui sont des sous-groupes de $\pi_1(B, b)$ en vertu de **1**.

2. Montrer que la classe d'homotopie du lacet γ permet de conjuguer le sous-groupe Γ_0 au sous-groupe Γ_1.

3. Montrer que la collection de sous-groupes $\{\Gamma_{x_0}\}_{x_0 \in p^{-1}(b)}$ est une classe de conjugaison dans $\pi_1(B, b)$.

Exercice 4

Tout le long de ce problème $E \longrightarrow B$ sera un revêtement connexe et b un point de B. La classe dans $\pi_1(B, b)$ d'un lacet $\gamma \in \Omega(B, b)$ sera notée $[\gamma]$. Nous allons définir une action de $\Gamma = \pi_1(B, b)$ sur la fibre $p^{-1}(b)$. Soient $[\gamma] \in \Gamma$ et $x \in p^{-1}(b)$; on pose $\Phi([\gamma], x) = \widehat{\gamma}(1)$ où $\widehat{\gamma}$ est l'unique chemin de E d'origine x relevé de γ.

1. Montrer que Φ et une action de Γ sur $p^{-1}(b)$.

2. Montrer que cette action est transitive i.e. pour tous $x_0, x_1 \in p^{-1}(b)$ il existe $[\gamma] \in \Gamma$ tel que $x_1 = \Phi([\gamma], x_0)$.

On note Γ_0 l'image de $\pi_1(E, x_0)$ dans Γ par l'homomorphisme injectif p_*. Pour tout $[\gamma] \in \Gamma$ on notera θ_γ la transformation induite sur Γ/Γ_0 par la translation à gauche $[\sigma] \in \Gamma \longrightarrow [\sigma] \cdot [\gamma] \in \Gamma$ et on posera $\Theta_\gamma = \Phi([\gamma], \cdot)$ qui est une bijection de $p^{-1}(b)$.

3. Montrer qu'il existe une bijection Γ-équivariante entre $p^{-1}(b)$ et l'espace homogène Γ/Γ_0 i.e. une application bijective $f : \Gamma/\Gamma_0 \longrightarrow p^{-1}(b)$ telle que pour tout $[\gamma] \in \Gamma$ le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma/\Gamma_0 & \xrightarrow{f} & p^{-1}(b) \\
\Big\downarrow \theta_\gamma & & \Big\downarrow \Phi_\gamma \\
\Gamma/\Gamma_0 & \xrightarrow[f]{} & p^{-1}(b)
\end{array}$$

4. Montrer que si E est simplement connexe alors il existe une bijection Γ-équivariante entre $p^{-1}(b)$ et Γ.

5. Montrer que si $p : E \longrightarrow B$ est un revêtement à n feuillets alors Γ_0 est un sous-groupe d'indice fini de Γ.

6. Supposons $\Gamma = \mathbb{Z}$ et $p^{-1}(b)$ fini. Quel est le groupe fondamental de E ?

7. Montrer que si B est simplement connexe alors tout revêtement $p : E \longrightarrow B$ est un homéomorphisme.

8. Supposons $E = B$ et Γ fini. Montrer que p est un homéomorphisme. Qu'en est-il si $E = B$ et Γ infini ?

9. Supposons $p : E \longrightarrow B$ *galoisien* i.e. Γ_0 est un sous-groupe distingué de Γ et soit σ un lacet de B basé en b. Montrer que les relèvements $\widehat{\sigma}$ de σ sont ou bien tous des lacets ou tous des chemins ouverts.

10. Supposons que B est le quotient de E par une action libre propre et discontinue d'un groupe et $p : E \longrightarrow B$ est la projection canonique. Montrer que $p : E \longrightarrow B$ est galoisien.

11. Montrer que p est un homéomorphisme si et seulement si $\Gamma_0 = \Gamma$.

Devoir surveillé (11 Mars 1996)

Exercice I

On note $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n^2 des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On notera I la matrice identité et pour toute matrice $A = (a_{ij})$, $A^* = (\overline{a}_{ji})$ sera son adjointe.

1. Montrer que l'application $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \sqrt{\mathrm{trace}(AA^*)} \in \mathbb{R}_+$ est une norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Cette norme est équivalente à n'importe laquelle des normes qui suivent

$$||A||_1 = \sum_{i,j} |a_{ij}|$$

$$||A||_2 = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$$

$$||A||_\infty = \sup_{i,j} |a_{ij}|$$

On peut remarquer facilement que, pour la topologie définie sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ par l'une quelconque de ces normes, une suite de matrices $A_k = (a_{ij}^k)$ converge vers la matrice $A = (a_{ij})$ si, et seulement si, pour tout (i, j) la suite réelle a_{ij}^k converge vers a_{ij}.

On dira que $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est *unitaire* si $AA^* = I$. On note $\mathrm{U}(n)$ l'ensemble des matrices unitaires complexes ; c'est un goupe appelé *groupe unitaire* de $\mathbb{C}^n$. Il contient le *groupe spécial unitaire*

$$\mathrm{SU}(n) = \{A \in \mathrm{U}(n) : \det A = 1\}.$$

De même on définit le *groupe orthogonal* $\mathrm{O}(n)$ des matrices $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AA^* = I$; il contient le *groupe spécial orthogonal* de $\mathbb{R}^n$

$$\mathrm{SO}(n) = \{A \in \mathrm{O}(n) : \det A = 1\}$$

2. Montrer que les groupes $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{O}(n)$ et $\mathrm{SO}(n)$ sont des sous-espaces compacts de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ suivant le groupe considéré).

3. Montrer que l'application $\mathrm{U}(n) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{SU}(n) \times \mathbb{S}^1$ définie par

$$\varphi(A) = \left(\frac{1}{\mathrm{dét}A} A, \mathrm{dét}A\right)$$

est un homéomorphisme.

On rappelle que :

$$\mathbb{S}^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \ : \ |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\} \quad \text{et} \quad \mathbb{S}^1 = \{w \in \mathbb{C} \ : \ |w| = 1\}.$$

Soit $f : \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathrm{U}(2)$ l'application définie par

$$f((z_1, z_2), w) = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -w\overline{z}_2 & w\overline{z}_1 \end{pmatrix}$$

4. Montrer que f est un homéomorphisme et que $f^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ((a,b), ad-bc)$.

5. Quel est le groupe fondamental de $\mathrm{U}(2)$? En donner un système de générateurs.

6. Montrer que $\mathrm{SU}(2)$ est simplement connexe.

Exercice II

Soit GA le *groupe affine* de toutes les transformations $x \in \mathbb{R} \longrightarrow \alpha x + \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ le groupe des matrices réelles carrées d'ordre 2 de déterminant 1.

1. Montrer que l'application $j : \mathrm{GA} \longrightarrow \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ qui à toute transformation affine de $\mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R} \longrightarrow \alpha x + \beta$ associe la matrice $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est un homomorphisme injectif (qui permet donc de voir GA comme un sous-groupe de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$).

2. Montrer que toute matrice S de $\mathrm{SO}(2) \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme

$$S = \begin{pmatrix} \theta & \gamma \\ -\gamma & \theta \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \theta, \gamma \in \mathbb{R} \text{ vérifiant : } \theta^2 + \gamma^2 = 1$$

3. Montrer que toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique sous la forme $A = SB$ avec $S \in \mathrm{SO}(2)$ et $B \in \mathrm{GA}$. (Distinguer les 3 cas : i) $a = 0$, ii) $c = 0$, iii) $a \neq 0$ et $c \neq 0$.)

4. Montrer que l'application $(S,B) \in \mathrm{SO}(2) \times \mathrm{GA} \longrightarrow SB \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

5. Quel est le groupe fondamental de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$? En donner un système de générateurs.

6. À quel espace topologique bien connu le revêtement universel $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$ de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ est-il homéomorphe ?

CORRIGÉ

Exercice I

1. Notons N l'application $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \sqrt{\mathrm{trace}(AA^*)} \in \mathbb{R}_+$ et soit $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $A^* = (\overline{a}_{ji})$ et un calcul simple montre que le $i^{\text{ème}}$ terme diagonal c_{ii} de AA^* est donné par $c_{ii} = \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2$ et donc

$$\mathrm{trace}(AA^*) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2.$$

Par suite $N(A) = ||A||_2$. Ceci montre de manière immédiate que N est une norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Ainsi $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ muni de cette norme est exactement le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E = \mathbb{K}^{n^2}$ muni de la norme euclidienne usuelle.

2. Il est clair que l'application $\gamma : A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow AA^* \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est continue pour la norme N. Donc l'ensemble $\mathrm{U}(n) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) : \gamma(A) = I\}$ est fermé dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$; comme pour toute matrice $A \in \mathrm{U}(n)$ on a $N(A) = \sqrt{n}$ il est borné ; par suite compact. La compacité de $\mathrm{SU}(n)$ découle du fait q'il est fermé dans $\mathrm{U}(n)$ car la fonction déterminant est continue. Le même raisonnement montre que $\mathrm{O}(n)$ et $\mathrm{SO}(n)$ sont des compacts de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

3. L'application φ est clairement bijective : elle admet pour inverse l'application $(B, \theta) \in \mathrm{SU}(n) \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \theta B \in \mathrm{U}(n)$. Comme la fonction "dét" est continue sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, φ et son inverse sont continues.

4. Chaque coefficient de la matrice $\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -w\overline{z}_2 & w\overline{z}_1 \end{pmatrix}$ est une fonction continue de z_1, z_2 et w ; donc f est continue. D'autre part

$$f^{-1} \circ f((z_1, z_2), w) = f^{-1} \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -w\overline{z}_2 & w\overline{z}_1 \end{pmatrix} = ((z_1, z_2), z_1 w\overline{z}_1 + z_2 w\overline{z}_2) = ((z_1, z_2), w)$$

car $z_1\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 = 1$. Ce qui montre que f est une bijection et que son inverse est bien l'expression énoncée. Comme tout coefficient de $((a, b), ad - bc)$ est une fonction continue de a, b et c, f^{-1} est aussi continue. Ce qui répond complètement à la question posée.

5. D'après ce qui précède les espaces $\mathrm{U}(2)$ et $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$ ont même groupe fondamental. Comme $\mathbb{S}^3$ est simplement connnexe on a $\pi_1(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1) = \pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$. Un générateur de $\pi_1(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1)$ est donné par $\sigma_0(t) = ((1, 0), e^{2i\pi t})$; il donne un générateur de $\pi_1(\mathrm{U}(n))$: $\sigma_0(t) = f \circ \sigma_0(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2i\pi t} \end{pmatrix}$.

6. Comme les applications $\varphi : \mathrm{U}(2) \longrightarrow \mathrm{SU}(n) \times \mathbb{S}^1$ et $f : \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathrm{U}(2)$ sont des homéomorphismes, l'application $f \circ \varphi : \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathrm{SU}(2) \times \mathbb{S}^1$ en est un. Cette dernière est définie par

$$f \circ \varphi((z_1, z_2), w) = \varphi \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -w\overline{z}_2 & w\overline{z}_1 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} \frac{z_1}{w} & \frac{z_2}{w} \\ -\overline{z}_2 & \overline{z}_1 \end{pmatrix}, w \right)$$

Sa restriction à $\mathbb{S}^3 \times \{1\}$ est un homéomorphisme sur $\mathrm{SU}(2) \times \{1\}$; ceci montre que $\mathbb{S}^3$ et $\mathrm{SU}(2)$ sont homéomorphes ; par suite $\mathrm{SU}(2)$ est simplement connexe.

Exercice II

1. Soient A et A' deux transformations affines de $\mathbb{R}$ définies respectivement par (α, β) et (α', β') ; alors $A \circ A'$ est définie par $(\alpha\alpha', \alpha\beta' + \beta)$. D'autre part

$$j(A)j(A') = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha'}} \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\alpha'}} \begin{pmatrix} \alpha\alpha' & \alpha\beta' + \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'application j est donc un homomorphisme de groupes. L'injectivité de j est immédiate. Le groupe affine GA peut donc être vu comme un sous-groupe de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

2. Soit $S=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in \mathrm{SO}(2)$. Alors $SS^*=I$. Ceci donne les relations au niveau des coefficients de S :

$$\begin{cases} a^2+b^2=1 & (1)\\ c^2+d^2=1 & (2)\\ ac=-bd & (3)\end{cases}$$

En plus $ad-bc=1$. Un calcul facile montre que $a=d=\theta$ et $b=-c=\gamma$ avec $\theta^2+\gamma^2=1$. La matrice S a donc bien la forme cherchée i.e.

$$S=\begin{pmatrix} \theta & \gamma \\ -\gamma & \theta \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \theta,\gamma\in\mathbb{R} \text{ vérifiant : } \theta^2+\gamma^2=1.$$

3. Supposons $a=0$; alors

$$A=\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

On prend alors

$$S=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 11 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Si $c=0$ on a $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$. On prend alors $S=I$ et $B=A$. Le cas $a\neq 0$ et $c\neq 0$ demande un peu de calcul. On cherche $S=\begin{pmatrix} \theta & \gamma \\ -\gamma & \theta \end{pmatrix}$ avec $\theta^2+\gamma^2=1$ et $B=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$ telles que $A=SB$. Cette relation se traduit par le système

$$\begin{cases} \theta\alpha=a & (1)\\ \gamma\alpha=-c & (2)\\ \theta\beta+\frac{\gamma}{\alpha}=b & (3)\\ -\gamma\beta+\frac{\theta}{\gamma}=d & (4)\end{cases}$$

dont la résolution donne

$$\begin{cases} \alpha=\sqrt{a^2+c^2}\\ \theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}\\ \gamma=-\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}\\ \beta=\frac{ab+cd}{\sqrt{a^2+c^2}}\end{cases}$$

Les matrices

$$S=\begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}} & -\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} \\ \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}} \end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix} \sqrt{a^2+c^2} & \frac{ab+cd}{\sqrt{a^2+c^2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}} \end{pmatrix}$$

sont donc uniques et répondent à la question.

4. Dans ce qui précède on a montré que pour toute matrice $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ il existe des matrices uniques $S \in \mathrm{SO}(2)$ et $B \in \mathrm{GA}$ telles que $A = SB$. Ceci montre clairement que l'application $\Phi : \mathrm{SO}(2) \times \mathrm{GA} \longrightarrow \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$

$$\left(\begin{pmatrix} \theta & \gamma \\ -\gamma & \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}\right) \longrightarrow \begin{pmatrix} \theta\alpha & \theta\beta + \gamma\alpha^{-1} \\ \gamma\alpha & -\gamma\beta + \theta\alpha^{-1} \end{pmatrix}$$

est bijective. Les coefficients de la matrice produit montrent que Φ est continue. Comme a et c ne peuvent jamais s'annuler en même temps (car $ad - bc = 1$) l'inverse de Φ, qui à $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ associe les matrices $S \in \mathrm{SO}(2)$ et $B \in \mathrm{GA}$ données dans la question qui précède, est aussi continue. L'application Φ est donc un homéomorphisme.

5. Comme, d'après ce qu'on vient de voir, $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{GA}$ on a $\pi_1(\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})) = \pi_1(\mathrm{SO}(2)) \times \mathrm{GA}$. Mais $\mathrm{SO}(2)$ est homéomorphe au cercle $\mathbb{S}^1$ et GA est contractile car homéomorphe au demi-plan ouvert $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a > 0\}$. Par suite $\pi_1(\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})) = \pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$. Un générateur de $\pi_1(\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}))$ est donné par le lacet basé en I :

$$\sigma : t \in [0,1] \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos 2\pi t & \sin 2\pi t \\ -\sin 2\pi t & \cos 2\pi t \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}).$$

6. Le groupe $\mathrm{SO}(2)$ n'est rien d'autre que le cercle $\mathbb{S}^1$ dont le revêtement universel est $\mathbb{R}$. Comme le groupe affine GA est homéomorphe à $\mathbb{R}^2$, le revêtement universel du produit $\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{GA}$ est homéomorphe à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^3$. Conclusion : le revêtement universel $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$ de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^3$.

Examen – Septembre 1996

Exercice 1

Soient $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$ le cercle unité, $n \in \mathbb{N}^*$ et $p : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ l'application définie par $p(z) = z^n$.

1. Montrer que p est un revêtement.

2. Déterminer le morphisme $p_* : \pi_1(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1)$ induit par p.

Exercice 2

Soient p et q deux points distincts du plan complexe $\mathbb{C}$. On note Ω et D les ouverts respectifs $\mathbb{C} - \{p, q\}$ et $\mathbb{C} - \{-1, 1\}$ et γ_1, γ_2 les cercles de rayon 1 et de centres respectifs -1 et 1. On pose $X = \gamma_1 \cup \gamma_2$; X est constitué des deux cercles γ_1 et γ_2 attachés en le point $(0, 0)$.

1. Montrer que Ω et D sont homéomorphes (chercher l'homéomorphisme sous forme affine $\varphi(z) = az + b$ où a et b sont des nombres complexes).

2. Montrer que D se rétracte par déformation sur X et en déduire que Ω et X ont même type d'homotopie.

3. Calculer l'homologie $H_*(X)$ de X à coefficients dans l'anneau $\mathbb{Z}$.

Exercice 3

Soit Γ un groupe abélien *finiment engendré* i.e. il existe une partie finie $\Sigma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\}$ de Γ tel que tout $\gamma \in \Gamma$ soit de la forme $\gamma = \gamma_1^{s_1} \cdot \ldots \cdot \gamma_k^{s_k}$ où $s_1, \ldots, s_k$ sont des entiers relatifs avec $\eta^s = \underbrace{\eta \cdot \ldots \cdot \eta}_{s \text{ fois}}$ si $s > 0$, $\eta^s = \underbrace{\eta^{-1} \cdot \ldots \cdot \eta^{-1}}_{s \text{ fois}}$ si $s < 0$ et $\eta^s = e$ si $s = 0$; Γ est toujours isomorphe à un groupe de la forme $(\underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{m \text{ fois}}) \bigoplus (\mathbb{Z}/p_1^{\alpha_1}\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/p_t^{\alpha_t}\mathbb{Z})$ où $p_1, \ldots, p_t$ sont des nombres premiers et $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ des entiers naturels ; $\underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{m\text{fois}}$ est un module libre sur $\mathbb{Z}$ appelé la *partie libre* de Γ ; sa dimension (qui est l'entier m) ne dépend que de Γ et sera notée $m(\Gamma)$.

Soit X un espace de *dimension homologique* finie i.e. il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $H_i(X) = 0$ pour $i \geq n + 1$. On suppose en plus que tous les groupes $H_i(X)$ sont finiment engendrés. L'entier $b_i = \dim(H_i(X))$ est appelé le $i^{\text{ème}}$ *nombre de Betti* de X. On pose

$$\chi(X) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i b_i.$$

Cet entier est appelé la *caractéristique d'Euler-Poincaré* de X.

Calculer $\chi(X)$ pour le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, la sphère $\mathbb{S}^2$ et Σ_2, surface compacte orientable de genre 2.

Groupe fondamental d'un espace d'orbites

Faisons d'abord quelques rappels qui nous seront utiles dans la suite. Soit X un espace topologique séparé. On dira que X est :

i) *connexe par arcs* si, pour tous points $x, y \in X$, il existe un chemin dans X d'origine x et d'extrémité y *i.e.* une application continue $\sigma : [0,1] \longrightarrow X$ telle que $\sigma(0) = x$ et $\sigma(1) = y$;

ii) *localement connexe par arcs* si, pour tout $x \in X$ et tout voisinage ouvert U de x, il existe un voisinage ouvert V contenu dans U et connexe par arcs ;

iii) *semi-localement simplement connexe* si tout point $x \in X$ admet un voisinage ouvert U tel que l'homomorphisme de groupes $j_* : \pi_1(U, x) \longrightarrow \pi_1(X, x)$ induit par l'inclusion $j : U \hookrightarrow X$ est trivial *i.e.* j_* est constant égal à élément neutre ; cela signifie que tout lacet dans U basé en x est homotope dans X au lacet constant égal à x ;

iv) *localement simplement connexe* si tout point $x \in X$ admet un voisinage ouvert U simplement connexe. (Bien entendu, un tel espace est toujours semi-localement simplement connexe.)

<u>Exercice 1</u>. Dans $\mathbb{R}^2$, soient X_0 le graphe de la fonction $t \in \mathbb{R}_*^+ \longmapsto \sin\left(\frac{1}{t}\right) \in \mathbb{R}$ et X son adhérence. Dire explicitement ce qu'est X. Montrer que l'espace X est connexe mais qu'il n'est pas connexe par arcs.

<u>Exercice 2</u>. Pour tout entier $n \geq 2$, on note C_n le cercle dans $\mathbb{R}^2$ de diamètre $d_n = 2 - \frac{1}{n}$ centré sur l'axe des ordonnées et passant par le point $A = (0, 1)$ et C_0 le cercle passant par A et de centre l'origine. On pose :

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n.$$

Montrer que X est connexe par arcs mais qu'il n'est pas localement connexe par arcs.

<u>Exercice 3</u>. Pour tout entier $n \geq 2$, on note C_n le cercle dans $\mathbb{R}^2$ de rayon $r_n = \frac{1}{n}$ centré sur l'axe des ordonnées et passant par le point $A = (0, 1)$ et C_0 le cercle passant par A et de centre l'origine. On pose :

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n.$$

Montrer que X n'est pas semi-localement simplement connexe.

On se donne deux espaces topologiques séparés X et Y (qu'on supposera connexes par arcs) et $p : X \longrightarrow Y$ une application continue surjective. On dira que p est un *revêtement* si tout point $y \in Y$ admet un voisinage ouvert V tel que l'ouvert $p^{-1}(V)$ soit une réunion disjointe d'ouverts U_i, $i \in I$ et que, pour tout $i \in I$, la restriction de p à U_i soit un homéomorphisme sur V ; Y est la *base* et X l'*espace total* ; pour $y \in Y$, l'ensemble $p^{-1}(y)$ est la *fibre* au-dessus de y et est en bijection avec I.

Un *automorphisme* du revêtement $X \xrightarrow{p} Y$ est un homéomorphisme $X \xrightarrow{f} X$ tel que $p \circ f = p$. Ces automorphismes forment un groupe Aut(p) (c'est bien sûr un sous-groupe du groupe Homéo(X) des homéomorphismes de X). Soit $f \in$ Aut(p) ;

alors pour tout $y \in Y$, f préserve $p^{-1}(y)$; Aut(p) induit donc une action sur toute fibre $p^{-1}(y)$. Lorsque cette action est *transitive* (*i.e.* $p^{-1}(y)$ est la seule orbite), on dira que le revêtement est *galoisien.*

Soient $x \in X$ et $y = p(x)$; p induit un homomorphisme :

$$p_* : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, y).$$

On peut montrer qu'en fait l'homomorphisme p_* est injectif. Les sous-groupes $p_*(\pi_1(X, x))$ et $p_*(\pi_1(X, x'))$ de $\pi_1(Y, y)$ correspondant à deux points base x et x' dans $p^{-1}(y)$ sont conjugués. Le revêtement p est galoisien si, et seulement si, pour tout $x \in p^{-1}(y)$, le sous-groupe $p_*(\pi_1(X, x))$ est distinguué dans $\pi_1(Y, y)$.

Soient maintenant X un espace séparé connexe par arcs et Γ un groupe discret (*i.e.* Γ est dénombrable et muni de la topologie discrète) agissant de façon continue, libre et propre sur X. (Via l'action, le groupe Γ peut-être vu comme un sous-groupe de Homéo(X).) On sait alors que l'espace des orbites Y, muni de la topologie quotient, est un espace séparé connexe par arcs et que la projection canonique $p : X \longrightarrow Y$ est un revêtement. Il est facile de voir que le groupe Aut(p) contient Γ ; comme ce dernier agit transitivement sur chaque fibre (car les fibres de p sont exactement les orbites de l'action), c'est a fortiori le cas pour Aut(p), donc le revêtement p est galoisien.

Théorème 1. *Soit Y un espace connexe par arcs, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Alors :*
i) *il y a correspondance biunivoque entre les sous-groupes Γ de $\pi_1(Y)$ et les revêtements $p : X \longrightarrow Y$;*
ii) *il y a correspondance biunivoque entre les sous-groupes distingués Γ de $\pi_1(Y)$ et les revêtements galoisiens $p : X \longrightarrow Y$;*
iii) *le revêtement $p : \widetilde{Y} \longrightarrow Y$ correspondant à $\Gamma = \pi_1(X)$ est simplement connexe (i.e. l'espace $\widetilde{Y}$ est simplement connexe). Il est défini à homéomorphisme près et appelé* ***revêtement universel*** *de Y.*

Soient x un point de X, y sa projection $p(x)$ et σ un lacet dans Y basé en y *i.e.* $\sigma : [0, 1] \longrightarrow Y$ est une application continue telle que $\sigma(0) = \sigma(1) = y$. D'après la propriété de relèvement des chemins et des homotopies dans un revêtement, il existe une application continue $\widetilde{\sigma} : [0, 1] \longrightarrow X$ telle que :
i) $\widetilde{\sigma}(0) = x$ et $p \circ \widetilde{\sigma} = \sigma$;
ii) si σ' est un autre lacet dans Y basé en y homotope à σ, son relèvement $\widetilde{\sigma}'$ à X d'origine x est tel que $\widetilde{\sigma}'(1) = \widetilde{\sigma}(1)$.

Ceci montre que l'extrémité de $\widetilde{\sigma}(1)$ ne dépend que de sa classe d'homotopie. Comme $p(\widetilde{\sigma}(1)) = p(x) = y$, x et $\sigma(1)$ sont sur la même orbite de l'action de Γ et donc il existe un unique $\gamma_\sigma \in \Gamma$ tel que $\widetilde{\sigma}(1) = \gamma_\sigma \cdot x$. On a donc obtenu une application :

$$\phi : [\sigma] \in \pi_1(Y, y) \longmapsto \gamma_\sigma \in \Gamma.$$

Lemme 1. *L'application $\phi : [\sigma] \in \pi_1(Y, y) \longmapsto \gamma_\sigma \in \Gamma$ est un homomorphisme de groupes.*

Preuve. Soient $[\sigma]$ et $[\sigma']$ deux éléments de $\pi_1(Y, y)$. Alors le composé $\sigma \cdot \sigma'$ a un relèvement unique d'origine x qu'on notera $\widetilde{\sigma \cdot \sigma'}$. On a $\widetilde{\sigma \cdot \sigma'} = \widetilde{\sigma} \cdot \theta_z(\sigma')$ où $\theta_z(\sigma')$

est l'unique relèvement de σ' d'origine $\widetilde{\sigma}(1)$. Puisque $\gamma_\sigma \cdot \widetilde{\sigma}'$ est le relèvement de σ' d'origine $\gamma_\sigma \cdot x$ et que $z = \widetilde{\sigma}(1) = \gamma_\sigma \cdot x$, on a $\theta_z(\sigma') = \gamma_\sigma \cdot \widetilde{\sigma}'$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\widetilde{\sigma \cdot \sigma'}(1) =& \gamma_\sigma \cdot (\widetilde{\sigma}'(1)) \\ =& \gamma_\sigma \cdot (\gamma_{\sigma'} \cdot x) \\ =& (\gamma_\sigma \gamma_{\sigma'}) \cdot x.\end{aligned}$$

Ce qui montre que $\phi([\sigma][\sigma']) = \phi([\sigma])\phi([\sigma'])$ *i.e.* ϕ est un homomorphisme de groupes. □

Lemme 2. *L'homomorphisme $\phi : \pi_1(Y, y) \longrightarrow \Gamma$ est surjectif.*

<u>*Preuve*</u>. Soient $\gamma \in \Gamma$ et τ un chemin dans X d'origine x et d'extrémité $\gamma \cdot x$. Ce chemin se projette sur Y en un lacet σ basé en y et détermine donc un élément $[\sigma] \in \pi_1(Y, y)$. Par définition $\phi([\sigma]) \cdot x = \widetilde{\sigma}(1)$ où $\widetilde{\sigma}$ est l'unique relevé de σ à X d'origine x. On a donc nécessairement $\phi([\sigma]) = \gamma$, qui montre bien que le morphisme ϕ est surjectif. □

Lemme 3. *Le noyau de $\phi : \pi_1(Y, y) \longrightarrow \Gamma$ est l'image $p_*(\pi_1(X, x))$ du groupe $\pi_1(X, x)$ par l'homomorphisme $p_* : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, y)$ induit par $p : X \longrightarrow Y$.*

<u>*Preuve*</u>. Le noyau de ϕ est exactement l'ensemble des éléments $[\sigma] \in \pi_1(Y, y)$ tels que $\widetilde{\sigma}(1) = x$ *i.e.* $\widetilde{\sigma}$ est un lacet dans X basé en x. Ce sont donc les éléments $[\sigma] \in \pi_1(Y, y)$ de la forme $[p \circ \widetilde{\sigma}]$ avec $[\widetilde{\sigma}] \in \pi_1(X, x)$, c'est-à-dire $p_*(\pi_1(X, x))$. □

Théorème 2. *L'homomorphisme $\phi : \pi_1(Y, y) \longrightarrow \Gamma$ induit un isomorphisme :*

$$\overline{\phi} : \pi_1(Y, y)/p_*(\pi_1(X, x)) \longrightarrow \Gamma.$$

En particulier si X est simplement connexe on a $\pi_1(Y, y) = \Gamma$.