

UNIVERSITÉ DE NANTES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
Maîtrise : Topologie Algébrique
François Laudenbach (CM) & Friedrich Wagemann (TD)

Introduction

Un corps de base étant fixé, on sait que les espaces vectoriels de dimension finie sont caractérisés à isomorphisme linéaire près par un nombre entier, à savoir la *dimension*. Une question naïve, mais naturelle, est de savoir si une telle démarche peut être suivie pour les espaces topologiques.

La considération des sous-espaces topologiques de \mathbb{R} ou de \mathbb{R}^2 montre que la situation est horriblement compliquée : penser aux ensembles de Cantor ou à leurs complémentaires. Néanmoins l'objet de la *Topologie Algébrique* est bien celui-là : attacher aux espaces topologiques des *invariants* algébriques (nombres, groupes, etc.) de sorte que deux espaces homéomorphes aient les mêmes invariants, et espérer que l'on aura suffisamment d'invariants pour obtenir une classification. Déjà la première partie du programme est très forte puisqu'elle permettra de reconnaître que certains espaces topologiques ne sont pas homéomorphes entre eux (par exemple : \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 , le cercle et la sphère). La seconde partie semble un espoir vain, mais en fait pas tant que cela, comme le montre le cas des surfaces topologiques, dont la théorie est abordée à la fin de ce cours en guise d'applications des outils qui y sont introduits.

Le fondateur reconnu de la *Topologie Algébrique* est Henri Poincaré avec son mémoire *Analysis Situs* (Journal de l'École polytechnique, 1895) et ses cinq compléments publiés dans différents autres journaux. Henri Poincaré ouvre deux directions, celle de l'*homologie* (qui n'est pas abordée dans ce cours) et

celle du *groupe fondamental*, qui sera un peu plus tard le point de départ de la théorie de l'*homotopie*.

Pour étudier les fonctions analytiques d'une variable complexe d'un point de vue topologique, Poincaré a rapproché trois concepts : groupe fondamental, action de groupe proprement discontinue, revêtement. C'est l'articulation de ces trois concepts qui est développée dans la première partie de ce cours (chapitres I à V). Certains aspects de la théorie des revêtements, étudiés pour eux-mêmes sont postérieurs à Poincaré ; ils ont reçu de nombreuses contributions et ont été systématiquement rassemblés par H. Seifert et W. Threlfall dans leur célèbre livre *Lehrbuch der Topologie*, 1934.

La seconde partie (chapitres VI à VIII) est là pour sortir de la théorie et se replonger dans l'esprit de Poincaré. Un théorème de Poincaré, rarement enseigné, traite des pavages ; c'est une belle application de tout l'arsenal qui précède. À titre un peu anecdotique, il est présenté ici dans le cadre des pavages du plan euclidien. En fait Poincaré l'avait conçu pour les pavages du *plan hyperbolique* ou demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} := \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$. C'est ce qui est fait au chapitre VII après une rapide introduction à la géométrie hyperbolique. On trouve que presque toutes les surfaces sont des quotients très explicites de \mathbb{H} par des actions de groupes, de la même façon que le *tore* est le quotient du plan euclidien par le groupe des translations entières. Après avoir découvert les surfaces par ce biais, au chapitre VIII on en aborde la théorie du point de vue topologique. C'est de nouveau grâce au groupe fondamental que l'on peut définir correctement des notions telles que le *bord* d'une surface ou son *orientabilité*.

F. Laudenbach

Nantes, le 18 août 2004

Table de matières

Première partie

Chapitre I : Groupes et espaces topologiques

1. Action de groupes
2. Ensemble quotient ou ensemble des orbites
3. Espaces topologiques
4. Rappels sur la compacité
5. Topologie produit (cas des produits finis)
6. Recollements

Chapitre II : Revêtements

7. L'exponentielle complexe et ses propriétés topologiques
8. Revêtements, premiers exemples
9. Le revêtement induit
10. Théorème fondamental des revêtement : le relèvement de chemins
11. Simple connexité

Chapitre III : Groupe fondamental

12. Construction du groupe fondamental, propriétés générales
13. Groupe libre à deux générateurs
14. La suite exacte des revêtements.

Chapitre IV : Groupe défini par générateurs et relations, Théorèmes de Van Kampen

15. Groupe défini par générateurs et relations,
16. Produit libre de deux groupes
17. Premier théorème de Van Kampen
18. Second théorème de Van Kampen

Chapitre V : Classification des revêtements

19. Le théorème de relèvement
20. Revêtement 1-connexe ou universel
21. Applications :
 - A. Le théorème de Schreier
 - B. Automorphismes de revêtements

Seconde partie**Chapitre VI : Pavages du plan euclidien**

22. Isométries du plan
23. Domaine de Dirichlet
24. Le théorème de Poincaré

Chapitre 7 : Introduction à la géométrie hyperbolique

25. La sphère de Riemann
26. La métrique de Poincaré sur \mathbb{H} ou métrique hyperbolique
27. Géodésiques
28. Triangles géodésiques
29. Polygones réguliers

Chapitre : Surfaces

30. Définition des surfaces
31. Surfaces orientables
32. L'orientabilité du point de vue algébrique
33. Classification des surfaces compactes orientables à bord vide
34. Classification des surfaces compactes non-orientables.

Chapitre I : Groupes et espaces topologiques

c1

Actions de groupes

1.1. Définition. — Un groupe G agit à gauche sur un ensemble X si l'on a une loi de composition

$$G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto g \cdot x,$$

telle que

$$(a) \quad g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x \text{ (associativité)}$$

$$(b) \quad e \cdot x = x \text{ pour tout } x \in X.$$

1.2. Exemples. — 1) $G = \mathbb{Z}$, $X = \mathbb{R}$ avec $g \cdot x = x + g$.

2) $G = O(2)$, $X = \mathbb{R}^2$ avec $g \cdot x =$ le produit de la matrice (2×2) g par la colonne x .

3) Soit D_1 et D_2 deux droites vectorielles dans \mathbb{R}^2 . Soit σ_i la symétrie orthogonale par rapport à D_i ; $\sigma_i \in O(2)$. Soit G le sous-groupe de $O(2)$ engendré par σ_1 et σ_2 (= le plus petit sous-groupe contenant σ_1 et σ_2 = l'ensemble de tous les produits $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1 \sigma_2, \sigma_2 \sigma_1, \dots$). Si l'angle des deux droites est $\pi \frac{p}{n}$ (p et n étant deux entiers premiers entre eux), ce groupe est noté D_n ; il est d'ordre $2n$. Si l'angle n'est pas dans $\pi\mathbb{Q}$, il est d'ordre infini et est noté D_∞ .

4) $G = \text{Bij}(X)$ est l'ensemble des bijections de X , muni de la loi de groupe $g_1 g_2 = g_1 \circ g_2$ et de l'action $g \cdot x = g(x)$.

1.3. Proposition. — La donnée d'une action de G sur X équivaut à la donnée d'un morphisme de groupes $G \rightarrow \text{Bij}(X)$.

Démonstration. — 1) À partir de l'action, pour tout $g \in G$, on a une application $f_g : X \rightarrow X$ définie par $f_g(x) = g \cdot x$. On a

$$(1) \quad f_{g_1} \circ f_{g_2} = f_{g_1 g_2}$$

d'après l'associativité de l'action et

$$(2) \quad f_e = \text{Id}_X.$$

Donc

$$f_{g^{-1}} \circ f_g = f_g \circ f_{g^{-1}} = \text{Id}_X$$

et $f_g \in \text{Bij}(X)$. De plus les formules (1) et (2) signifient que $f : G \rightarrow \text{Bij}(X)$, définie par $g \mapsto f_g$, est un morphisme de groupes.

2) Réciproquement, si $f : G \rightarrow \text{Bij}(X)$ est un morphisme de groupes $g \mapsto f_g$, la formule $g \cdot x = f_g(x)$ satisfait aux deux conditions d'une action. \square

De la même manière, une *action à droite* est une loi de composition $X \times G \rightarrow X$, $(x, g) \mapsto x \cdot g$ vérifiant

- (a) $(x \cdot g_1) \cdot g_2 = x \cdot (g_1 g_2)$
- (b) $x \cdot e = x$ pour tout $x \in X$.

1.1. Exercice. — Si l'on part d'une action à gauche, on peut faire une action à droite par $x \cdot g := g^{-1} \cdot x$.

2. Ensemble quotient ou ensemble des orbites.

2.1. Définition. — Soit G un groupe agissant sur un ensemble X . L'*orbite* de $x \in X$, notée Gx , est la partie

$$Gx := \{g \cdot x \mid g \in G\} \subset X.$$

Si $\mathcal{P}(X)$ désigne l'ensemble des parties de X , Gx désigne aussi un point de $\mathcal{P}(X)$; si l'on craint l'ambiguïté, on pourra noter ce point $[Gx]$.

2.2. Proposition. — *Les orbites forment une partition de X ; c'est-à-dire, pour deux éléments de X , être dans la même orbite est une relation d'équivalence.*

Démonstration. — a) Tout élément x appartient à une orbite : $x \in Gx$ car $x = e \cdot x$.

b) Si $Gx \cap Gy \neq \emptyset$, alors $Gx = Gy$; en effet, si $z = g_1 x = g_2 y$, on a $y = g_2^{-1} g_1 x$, donc $y \in Gx$ et $Gy \subset Gx$. On a aussi $x = g_1^{-1} g_2 y$, donc $x \in Gy$ et $Gx \subset Gy$. Finalement $Gx = Gy$. \square

2.3. Définition. — L'ensemble des classes d'équivalence est l'*ensemble quotient* $G \backslash X$; c'est une partie de $\mathcal{P}(X)$. On a une *projection* $p : X \rightarrow G \backslash X \subset \mathcal{P}(X)$ définie par $p(x) = [Gx]$.

2.4. Exemple. — Soit H un sous-groupe de G . H agit à gauche sur G par $(h, g) \mapsto hg$. Les orbites Hg sont les classes à droite. Le groupe G agit à droite sur $H \backslash G$ par

$$[Hg'] \cdot g = [Hgg'].$$

2.5. Proposition. — Il existe une loi de groupe sur $H \backslash G$ telle que $p : G \rightarrow H \backslash G$ soit un morphisme si et seulement si H est un sous-groupe distingué (normal) de G .

Démonstration. — “ \Rightarrow ” Pour tout morphisme de groupes, le noyau est un sous-groupe distingué.

“ \Leftarrow ” $[Hg_1] \cdot [Hg_2] = [Hg_1g_2]$ est bien défini, indépendamment des représentants g_1 et g_2 . En effet, si h_1g_1 et h_2g_2 sont deux autres représentants, $(h_1g_1)(h_2g_2) = h_1(g_1h_2g_1^{-1})g_1g_2 \in Hg_1g_2$, car $g_1h_2g_1^{-1} \in H$.

On vérifie immédiatement que cette loi est une loi de groupe. Par construction p est un morphisme de groupes. \square

2.6. Définitions (Terminologie des actions). — 1) On dit que G agit transitivement sur X si $X = Gx$ (une seule orbite) ou encore si, pour toute paire $(x, y) \in X \times X$, il existe $g \in G$ tel que $y = g \cdot x$.

Exemple. — $O(2)$ agit transitivement sur S^1 .

2) Le stabilisateur d'un point $x \in X$ est le sous-groupe de G , en général non distingué,

$$\text{Stab}(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}.$$

Exemple. — G agit à gauche sur G/H (l'ensemble des classes à gauche). On a $\text{Stab}([eH]) = H$ et $\text{Stab}([gH]) = gHg^{-1}$.

3) Une action est libre si $\text{Stab}(x) = e$ pour tout $x \in X$, c.-à-d.

$$\forall g \neq e \quad \forall x \in X : g \cdot x \neq x.$$

Exemple. — $O(2)$ n'agit pas librement sur \mathbb{R}^2 :

si $x = 0$, on a $\text{Stab}(x) = O(2)$,

si $x \neq 0$, on a $\text{Stab}(x) = \{Id, \text{symétrie orthogonale par rapport à la droite}$

$$x\mathbb{R} \} \cong \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z}.$$

4) Une action est *fidèle* ou *effective* si :

$$\forall g \neq e \exists x \in X : g \cdot x \neq x.$$

Autrement dit, $G \rightarrow \text{Bij}(X)$ est injective.

3. Espaces topologiques

3.1. Définition. — Soit X un ensemble et $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble de ses parties. Une *topologie* sur X est la donnée d'une famille T de parties de X , appelées *ouverts*, (T est une partie de $\mathcal{P}(X)$) et vérifiant les axiomes suivants :

- La partie vide et la partie pleine sont des ouverts.
- Une intersection finie d'ouverts est ouverte.
- Une union quelconque d'ouverts est ouverte.

Par définition, une partie A est *fermée* si $X \setminus A$ est ouverte.

3.2. Exemples. — 1) *Espace métrique.* Soit X un espace métrique : $A \subset X$ est ouvert si, pour tout $a \in A$, il existe $\epsilon > 0$ tel que la *boule*

$$B(a, \epsilon) := \{x \in X \mid d(a, x) < \epsilon\}$$

soit contenue dans A .

2) *Topologie discrète* : $T = \mathcal{P}(X)$. Tout singleton est ouvert.

3.3. Définitions. — 1) *Application continue.* (X, T_X) et (Y, T_Y) étant deux espaces topologiques, $f : X \rightarrow Y$ est *continue* pour ces topologies si, pour tout U ouvert de Y (c.-à-d. $U \in T_Y$), $f^{-1}(U) \in T_X$.

Dans le cas des espaces métriques, cette définition équivaut à la suivante : pour toute suite $(x_n)_n$ convergente dans X , la suite $(f(x_n))_n$ est convergente dans Y et

$$\lim_n f(x_n) = f(\lim_n x_n).$$

2) *Homéomorphisme.* Une application $f : X \rightarrow Y$ est un *homéomorphisme* si f est une bijection continue ainsi que son application réciproque f^{-1} .

Exemple. — Soit $X = [0, 1]$, T_X la topologie discrète sur X , $Y = [0, 1]$ et T_Y la topologie de la métrique euclidienne sur Y . L'application $f = \text{Identité}$, $f : X \rightarrow Y$, est une bijection continue, mais f^{-1} n'est pas continue.

Notons que l'ensemble $\text{Homéo}(X)$ des homéomorphismes de X dans lui-même est un groupe pour la composition des applications ; c'est un sous-groupe de $\text{Bij}(X)$.

3) L'action d'un groupe (discret) sur un espace topologique est donnée par un morphisme $G \rightarrow \text{Homéo}(X)$.

4) *Topologie quotient.*

Si X est un espace topologique et \mathcal{R} une relation d'équivalence, on note X/\mathcal{R} l'ensemble des classes d'équivalence et $p : X \rightarrow X/\mathcal{R}$ la projection. La topologie quotient sur X/\mathcal{R} est définie par :

$$U \subset X/\mathcal{R} \text{ est ouvert} \Leftrightarrow p^{-1}(U) \text{ est ouvert dans } X.$$

3.1. Exercice. — Vérifier les axiomes d'une topologie.

3.4. Proposition. — 1) p est continue.

2) Si $f : X \rightarrow Y$ est continue et est constante sur chaque classe d'équivalence, alors il existe une unique application $\bar{f} : X/\mathcal{R} \rightarrow Y$ telle que $f = \bar{f} \circ p$. De plus, \bar{f} est continue.

3) Si \mathcal{R} est donnée par l'action d'un groupe G , alors p est ouverte, c'est-à-dire que l'image par p de tout ouvert de X est un ouvert de X/\mathcal{R} .

Démonstration. — 1) Cela est vrai par définition de la topologie quotient.

2) Exercice.

3) Soit U un ouvert de X . Il s'agit de voir que $p^{-1}(p(U))$ est un ouvert de X . Or

$$p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{x \in U} Gx = \bigcup_{g \in G} gU.$$

Mais g agit par homéomorphisme de X , donc gU est un ouvert et une réunion d'ouverts est un ouvert. \square

3.5. Exemples. — 1) $\mathbb{Z} \backslash \mathbb{R} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (car \mathbb{Z} est abélien⁽¹⁾) est homéomorphe à S^1 , le cercle unité de \mathbb{C} .

⁽¹⁾Pour un groupe abélien G agissant à gauche sur X la loi de l'action à gauche vérifie aussi les axiomes d'une action à droite ; donc on ne parle plus du sens de l'action.

Démonstration. — $\mathbb{R} \ni x \xrightarrow{\text{exp}} e^{2i\pi x} \in S^1$ est 1-périodique et continue, donc se factorise

$$\begin{array}{ccc} x \in \mathbb{R} & & \\ \downarrow p & \searrow & \\ [x] \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} & \xrightarrow{\overline{\text{exp}}} & e^{2i\pi x} \in S^1 \end{array}$$

et $\overline{\text{exp}}$ est continue et évidemment bijective. Par ailleurs, un ouvert de \mathbb{R}/\mathbb{Z} est une réunion de $p(]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[)$ et $\text{exp}(]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[)$ est un ouvert de S^1 pour la topologie induite de \mathbb{C} , car

$$\text{exp}(]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[) = S^1 \cap \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0, \text{arg}(z) \in]2\pi x - \frac{2\pi}{n}, 2\pi x + \frac{2\pi}{n}[\}.$$

Donc $\overline{\text{exp}}$ est ouverte. Finalement c'est un homéomorphisme. \square

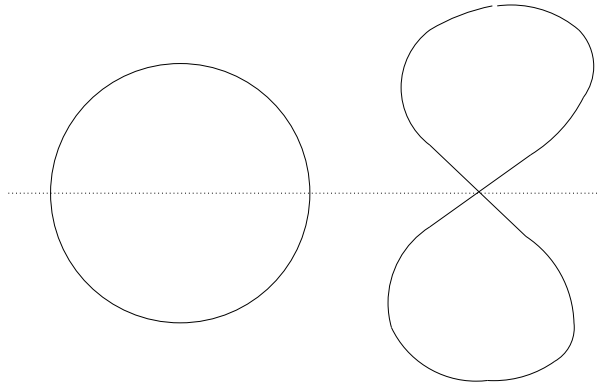
2) Le *plan projectif réel* est le quotient de S^2 par l'involution antipodale :

$$P^2 = \{\pm\} \backslash S^2.$$

3) *Quotient à projection non-ouverte.*

3.2. Exercice. — Soit $X = S^1 \subset \mathbb{C}$ muni de la relation d'équivalence $z_1 \mathcal{R} z_2 \Leftrightarrow z_1 = z_2$ ou $(z_1 = \pm 1 \text{ et } z_2 = -z_1)$. Montrer que $p : X \rightarrow X/\mathcal{R}$ n'est pas ouverte.

Montrer que X/\mathcal{R} est homéomorphe à la figure huit (utiliser le critère d'homéomorphie ci-dessous) (voir la figure ci-dessous).



4) *Quotient non-séparé.*

3.3. Exercice. — Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une bijection continue croissante vérifiant $f(x) > x$ pour tout $x \in]0, 1[$. Soit $f^n = f \circ \dots \circ f$ et $f^{-n} = f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1}$ (n fois). Montrer que, pour tout $x \in]0, 1[$, $f^n(x) \rightarrow 1$ pour $n \rightarrow +\infty$ et $f^n \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow -\infty$. On définit une action de \mathbb{Z} sur $[0, 1]$ par $n \cdot x = f^n(x)$. Montrer que le quotient n'est pas séparé.

4. Rappels sur la compacité

4.1. Définition. — Un espace topologique est *compact* s'il est séparé et si tout recouvrement ouvert admet un sous-recouvrement fini. Un espace dont la topologie possède seulement cette propriété de recouvrement est dit *quasi-compact* ⁽²⁾.

Le théorème de Bolzano-Weierstrass énonce que, si l'espace est métrique, la compacité équivaut à la suivante : toute suite admet une sous-suite convergente. Dans la preuve de l'équivalence intervient un lemme important.

4.2. Lemme (Lemme ε de Lebesgue). — Soit X un espace métrique compact. Soit $\mathcal{R} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X . Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in X$, la boule $B(x, \varepsilon)$ est entièrement contenue dans l'un des U_i :

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in X \quad \exists i \in I : B(x, \varepsilon) \subset U_i.$$

Démonstration. — Sinon

$$\forall \frac{1}{n} \quad \exists x_n \in X \quad \forall i \in I : B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset U_i.$$

Par compacité $(x_n)_n$ admet une sous-suite convergente $(x_{n_p})_p$ de limite a . Cette limite appartient à un U_{i_0} . Comme U_{i_0} est ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que $B(a, \delta) \subset U_{i_0}$ et il existe p_0 tel que, pour tout $p \geq p_0$, $x_{n_p} \in B(a, \frac{\delta}{2})$. Si en plus $\frac{1}{n_{p_0}} < \frac{\delta}{2}$, on a $B(x_{n_p}, \frac{1}{n_p}) \subset U_{i_0}$, ce qui est une contradiction. \square

4.3. Corollaire. — Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue entre deux espaces métriques. Si X est compact, f est uniformément continue.

⁽²⁾ Traduction : compact = a compact Hausdorff space, quasi-compact = a compact set.

Démonstration. — Soit $\epsilon > 0$. On considère le recouvrement ouvert de X

$$\mathcal{R} = \{f^{-1}(B(y, \frac{\epsilon}{2}))\}_{y \in Y}.$$

D'après le lemme, il existe $\eta > 0$ et, pour tout $x \in X$, il existe $y \in Y$ tel que $B(x, \eta) \subset f^{-1}(B(y, \frac{\epsilon}{2}))$. En particulier, $d_X(x, x') < \eta$ implique $d_Y(y, f(x)) < \frac{\epsilon}{2}$ et $d_Y(y, f(x')) < \frac{\epsilon}{2}$, et donc aussi $d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$ par inégalité du triangle. \square

On rappelle le théorème important :

4.4. Théorème. — Soit $f : X \rightarrow Y$ continue. On suppose Y séparé et X (quasi-)compact. Alors $f(X)$ est fermé dans Y et compact.

4.5. Corollaire (Critère d'homéomorphie). — Si $f : X \rightarrow Y$ est une bijection continue, si X est (quasi-)compact et Y séparé, alors f est un homéomorphisme.

Démonstration. — Il s'agit de voir que $f^{-1} : Y \rightarrow X$ est continue, ce qui équivaut à voir que f est une application ouverte.

Soit U un ouvert de X ; $X \setminus U$ est un fermé de X , donc (quasi-)compact. D'après le théorème, $f(X \setminus U)$ est donc un fermé de Y . Or, pour une bijection $f(X \setminus U) = f(X) \setminus f(U) = Y \setminus f(U)$. Donc $f(U)$ est un ouvert. \square

5. Topologie produit (cas des produits finis)

5.1. Définition. — Soit X_1 et X_2 deux espaces topologiques. Une partie $A \subset X \times X$ est un ouvert pour la *topologie produit* si, pour tout $(x_1, x_2) \in A$, il existe des voisinages ouverts U_i de x_i dans X_i , $i = 1, 2$, tels que $U_1 \times U_2 \subset A$.

5.1. Exercice. — Vérifier les axiomes d'une topologie.

5.2. Exemple. — $X \times \mathbb{N}$, où \mathbb{N} est muni de la topologie discrète. Si U est un ouvert de X , $U \times \{n\}$ est un ouvert de $X \times \mathbb{N}$. De plus $X \times \mathbb{N}$ est la réunion disjointe $\coprod_{n \in \mathbb{N}} X \times \{n\}$ des ouverts $X \times \{n\}$.

5.3. Proposition. — 1) Soit $p_i : X_1 \times X_2 \rightarrow X_i$ la projection $(x_1, x_2) \mapsto x_i$. Les projections p_1 et p_2 sont continues.

2) Soit $f : X \rightarrow X_1 \times X_2$, où X est un espace topologique. Alors f est continue si et seulement si $p_1 \circ f$ et $p_2 \circ f$ sont continues.

Démonstration. — 1) Si U_1 est un ouvert de X_1 , $p^{-1}(U_1) = U_1 \times X_2$ est bien un ouvert de la topologie produit.

2) “ \Leftarrow ”

$$f^{-1}(U_1 \times U_2) = f^{-1}((U_1 \times X_2) \cap (X_1 \times U_2)) = (p_1 \circ f)^{-1}(U_1) \cap (p_2 \circ f)^{-1}(U_2).$$

Par hypothèse $(p_i \circ f)^{-1}(U_i)$ est un ouvert de X , donc leur intersection aussi. Un ouvert général A de $X_1 \times X_2$ est, par définition, une union d'ouverts produits : $A = \bigcup_{j \in J} (U_1^j \times U_2^j)$; donc $f^{-1}(A) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(U_1^j \times U_2^j)$ est un ouvert de X , comme réunion des ouverts $f^{-1}(U_1^j \times U_2^j)$. \square

5.4. Exemple. — Soit $f : [0, 1] \rightarrow X \times \mathbb{N}$ avec $f(0) = (x_0, n_0)$. Soit $\gamma = p_1 \circ f : [0, 1] \rightarrow X$. Alors f est continue si et seulement si γ est continue et $f(t) = (\gamma(t), n_0)$ pour tout $t \in [0, 1]$.

5.5. Produit de compacts. — Si X_1 et X_2 sont compacts, alors $X_1 \times X_2$ est compact. (Écrire la démonstration dans le cas d'espaces métriques en recourant à Bolzano-Weierstrass.)

6. Recollements

6.1. Définition. — On se donne un espace topologique X , une partie $A \subset X$ et une application continue $f : A \rightarrow X$ continue. Pour simplifier, on suppose $f(A) \cap A = \emptyset$. On définit $X/f := X/\mathcal{R}$ où \mathcal{R} est la relation d'équivalence suivante :

- si $x \notin A \cup f(A)$, $\mathcal{R}x = \{x\}$.
- si $x \in A$, $\mathcal{R}x = \{f(x)\} \cup \{x' \in A \mid f(x') = f(x)\}$
- si $x \in f(A)$, $\mathcal{R}x = \{x\} \cup f^{-1}(\{x\})$.

On note aussi $X/f = X/x \sim f(x)$.

6.2. Exemples. — 1) $S^1 \cong [0, 1]/0 \sim 1$ où $A = \{0\}$ et $f(0) = 1$.

2) $[0, 1] \times [0, 1]/(0, y) \sim (1, y) \cong S^1 \times [0, 1]$ (l'anneau);

$S^1 \times [0, 1]/(\theta, 0) \sim (\theta, 1) \cong S^1 \times S^1 = T^2$ (le tore).

3) $P^2 \cong D^2 \sqcup S^1/f$ où ∂D^2 est le bord de D^2 et où $f : \partial D^2 \rightarrow S^1$ est donné par $z \mapsto z^2$.

$$P^2 \cong D^2 / \{x \sim -x \text{ si } x \in \partial D^2\}.$$

6.3. Description d'un ouvert de X/f . — Soit $p : X \rightarrow X/f$ la projection. Par définition de la topologie quotient un ouvert de X/f est un $p(U)$ où U est un ouvert de X qui est une réunion de classes d'équivalence, ce qui s'exprime par :

$$(*) \quad U \cap A = f^{-1}(U \cap f(A))$$

6.4. Proposition. — Si X est compact et si A est fermée dans X , alors X/f est compact.

Noter que A et $f(A)$ sont alors compacts. Voici un contre-exemple si A n'est pas fermé : $X = [0, 1] \times \{0, 1\}$, $A = [0, 1] \times \{0\}$, $f(x, 0) = (x, 1)$. Alors X/f n'est pas séparé.

Démonstration. — Pour simplifier X est supposé métrique.

1) Prouvons que X/f est séparé. Les classes d'équivalence sont fermées dans X . Séparons $p(a_1)$ et $p(a_2)$ où a_1 et a_2 sont deux points distincts de $f(A)$ (les autres cas sont faciles). Soit W_1 et W_2 deux voisinages de a_1 et a_2 , fermés et disjoints, et disjoints de A ; par exemple deux boules de rayon $\inf(\frac{d(a_1, a_2)}{2}, d(a_i, A))$. Alors $f^{-1}(W_1)$ et $f^{-1}(W_2)$ sont deux fermés disjoints dans A , donc deux compacts disjoints. Les quatre compacts $W_1, W_2, f^{-1}(W_1)$ et $f^{-1}(W_2)$ sont à des distances mutuelles $\geq \delta > 0$. En prenant la réunion des boules ouvertes $B(x_i, \frac{\delta}{2})$, $x_i \in f^{-1}(W_i)$, on fabrique des ouverts $V_i \supset f^{-1}(W_i)$ tels que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_i \cap (W_1 \cup W_2) = \emptyset$.

$f^{-1}(\text{int}(W_i))$ est un ouvert de A ; donc $f^{-1}(\text{int}(W_i)) = A \cap U_i$ où U_i est un ouvert de X qu'on peut prendre dans V_i . On pose $O_i := \text{int}(W_i) \cup U_i$. Cet ouvert vérifie (*) et contient $\mathcal{R}a_i$. Donc $p(O_i)$ est un ouvert de X/f . De plus, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Comme ces ouverts sont saturés par \mathcal{R} , $p(O_1) \cap p(O_2) = \emptyset$. Donc on a séparé $p(a_1)$ et $p(a_2)$.

2) $p : X \rightarrow X/f$ est continue de source compacte et de but séparé. Donc $p(X)$ est compact. Comme p est surjective, X/f est compact. \square

6.1. Exercice. — Établir les homéomorphismes des exemples (6.2) ci-dessus. On peut utiliser le critère d'homéomorphie (4.5) et la proposition générale ci-dessus (6.4).

On peut aussi remarquer que les quotients considérés sont séparés car ils sont munis d'une injection continue à valeurs dans un espace séparé.

FRANÇOIS LAUDENBACH & FRIEDRICH WAGEMANN
Département de mathématiques, Université de Nantes,
2 Rue de la Houssinière F-44322 Nantes Cedex 03

UNIVERSITÉ DE NANTES
 DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Maîtrise : Topologie Algébrique

François Laudenbach (CM) & Friedrich Wagemann (TD)

td1

Travaux dirigés de Mathématiques, Fiche 1, Topologie algébrique
 2005-2006

Actions de groupes.

1.1. Exercice (Le groupe diédral). — Soient D_1 et D_2 deux droites dans \mathbb{R}^2 qui s'intersectent et qui forment un angle α entre elles, et σ_i la symétrie par rapport à D_i , $i = 1, 2$. Soit $G \subset O(2)$ le sous-groupe du groupe orthogonal du plan $O(2)$ engendré par les symétries σ_i , $i = 1, 2$.

a) Montrer comment σ_1 et σ_2 peuvent être combinés pour donner une rotation R . Utiliser la règle de commutation de σ_i avec R pour réduire la liste des éléments de G .

b) Montrer que si $\alpha = \pi \frac{p}{n}$ avec $n, p \in \mathbb{N}$ et $\text{pgcd}(p, n) = 1$, alors G est un groupe fini d'ordre $2n$, qu'on note D_n (si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on le note D_∞).

c) Calculer le noyau de la restriction de $\det : O(2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ à $D_n \subset O(2)$ et à D_∞ . À quelles transformations correspond-t-il géométriquement ?

d) Est-ce que $D_n \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_n$? Est-ce que D_n est le produit semi-direct de \mathbb{Z}_2 et de \mathbb{Z}_n ?

Indication

Corrigé

1.2. Exercice (Exemple d'une action non propre sur un espace compact)

1) **Classification des sous-groupes additifs de \mathbb{R}**

Pour $a \in \mathbb{R}_+$, $a\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ est un sous-groupe additif du groupe $(\mathbb{R}, +)$ (exercice!).

On appelle un tel groupe *discret*. Le but de cet exercice est de montrer que les sous-groupes non discrets de $(\mathbb{R}, +)$ sont denses.

a) Soit G un sous-groupe additif non nul de \mathbb{R} . Posons $F = G \cap \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\inf(F) =: a$ existe dans \mathbb{R} .

b) Montrer que si $a > 0$, alors $a \in G$ et en déduire $G = a\mathbb{Z}$

c) Montrer que si $a = 0$, alors pour tout $x < y$ couple d'éléments de \mathbb{R} , on a $]x, y[\cap G \neq \emptyset$, i.e. que G est dense dans \mathbb{R} . (Indication : Trouver $z \in G$ tel que $0 < z < y - x$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nz \in]x, y[$. Conclure.)

2) D_∞ n'agit pas proprement sur S^1

On rappelle que G agit *proprement* sur un espace topologique X si et seulement si :

Pour tout $x, y \in X$, il existe des voisinages V_x, V_y de x et de y respectivement tels que $gV_x \cap V_y = \emptyset$ sauf pour un nombre fini de $g \in G$.

a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $G_\alpha := \{n\alpha + q \mid n, q \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que G_α est un sous-groupe additif de \mathbb{R} . Montrer que G_α est discret si et seulement si $\alpha \in \mathbb{Q}$ (on pourrait montrer dans le cas $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, que les valeurs de la suite $(n\alpha \bmod 1)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $[0, 1]$ sont toutes distinctes).

b) Soit $\overline{G}_\alpha = \{n\alpha \bmod 1\} \subset S^1 = \mathbb{Z} \backslash \mathbb{R}$. Montrer que $G_\alpha \subset \mathbb{R}$ est dense si et seulement si $\overline{G}_\alpha \subset S^1$ l'est.

c) Utiliser l'existence d'éléments arbitrairement petits dans \overline{G}_α pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ pour montrer que pour tout $x \in S^1$ et tout voisinage U de x dans S^1 , il existe une suite d'éléments distincts g_n de \overline{G}_α telle que pour tout $y \in U : g_n \cdot y \in U$ à partir d'un certain n .

d) Conclure que D_∞ n'agit pas proprement sur S^1 .

Indication Corrigé

1.3. Exercice (Sous-groupes discrets des groupes de Lie)

Montrer que tout sous-groupe distingué discret H d'un groupe topologique connexe G est contenu dans le centre (Indication : montrer que pour tout $x \in G$ l'application continue $\phi_x : y \mapsto xyx^{-1}y^{-1}$ de G vers le sous-groupe des commutateurs $[G, G] := \{xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in G\}$ est d'image discrète si et

seulement si x est central.). Trouver des exemples non-triviaux (i.e. G non-abélien et $H \neq \{1\}$) dans $SU(2)$ et dans le *groupe de Heisenberg* des matrices réelles de taille 3×3 triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale.

Indication Corrigé

UNIVERSITÉ DE NANTES
 DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Maîtrise : Topologie Algébrique

François Laudenbach (CM) & Friedrich Wagemann (TD)

Actions de groupes : indications pour les exercices

1.1. Indication exercice. — 1.1 a) Calculer ou construire géométriquement la composé $\sigma_1 \circ \sigma_2$.

Le sous-groupe de $O(2)$ engendré par σ_1 et σ_2 consiste à priori des mots $\sigma_1^{n_1} \circ \sigma_2^{n_2} \dots \sigma_1^{n_r} \circ \sigma_2^{n_r}$. Réduire un tel mot à l'aide de la relation faisant intervenir σ_1 , σ_2 et R .

1.1 b) Examiner l'ordre de la rotation R .

1.1 c) Que vaut le déterminant d'une rotation ? Que vaut le déterminant d'une symétrie ?

1.1 d) Un *produit semi-direct* $G = N \rtimes Q$ de groupes est une suite exacte de groupes

$$1 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 1$$

qui est *scindé*, i.e. où le morphisme de groupes i (ou π) admet un inverse à gauche (resp. à droite) qui est un morphisme de groupes.

Énoncé Corrigé

1.2. Indication exercice. — 1.2 1a) Tout sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$ non vide minoré possède un infimum dans \mathbb{R} . Ceci est la propriété de *complétude* de \mathbb{R} , qui le distingue par exemple de \mathbb{Q} .

1.2 1b) Si a n'était pas dans F , on pourrait approcher a par un élément y de F et construire par la loi du groupe G un élément de F strictement plus petit que a .

1.2 1d) n est la partie entière de x/z .

1.2 2a) Utiliser le *principe des tiroirs*, i.e. quand on distribue $n + 1$ (ou plus) éléments d'un ensemble sur n tiroirs (ou ici n intervalles), alors il y a forcément un tiroir qui contient deux éléments.

1.2 2c) Montrer qu'il existe $h_n \in \overline{G_\alpha}$ tel que $0 < h_n < \frac{1}{n}$ et $h_n < h_{n-1}$.
Poser ensuite $g_n := 1 - h_n$.

1.2 2d) Par la contraposée.

Énoncé Corrigé

1.3. Indication exercice. — **1.3** Utiliser (et montrer!) qu'une application continue d'un connexe vers un discret est constante.

Énoncé Corrigé

UNIVERSITÉ DE NANTES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Maîtrise : Topologie Algébrique

François Laudenbach (CM) & Friedrich Wagemann (TD)

Travaux dirigés de Mathématiques, Fiche 1, Topologie algébrique
2005-2006

Actions de groupes : solution des exercices

1.1. Corrigé exercice. — (a) Soient donc σ_1 et σ_2 les deux réflexions dans le plan \mathbb{R}^2 par rapport aux droites D_1 et D_2 . Soit O le point d'intersection de D_1 et D_2 , et soit $\alpha \leq \pi$ l'angle de D_1 à D_2 dans le sens mathématiquement positif. Alors $\sigma_1 \circ \sigma_2 = R_{2\alpha}$, la rotation d'angle 2α dans le sens mathématiquement positif, et $\sigma_2 \circ \sigma_1 = R_{-2\alpha}$. Ceci se démontre par exemple comme suit : en prenant un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) dans le plan affine \mathbb{R}^2 tel que $\mathbb{R}\vec{i} = D_1$, la matrice S de σ_1 s'écrit

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le changement de repère orthonormé direct de (O, \vec{i}, \vec{j}) en $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ tel que $\mathbb{R}\vec{e}_1 = D_2$ donne lieu à des matrices de changement de base P et P^{-1} :

$$P = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

$P^{-1}SP$ est la matrice de σ_1 dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Dans ce dernier, la symétrie σ_2 s'écrit simplement S , et par suite $SPSP^{-1}$ est la matrice de la composée. Un calcul montre que

$$SPSP^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & -\sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & \cos(2\alpha) \end{pmatrix}.$$

Le sous-groupe de $O(2)$ engendré par σ_1 et σ_2 consiste à priori des $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1 \circ \sigma_2, \sigma_2 \circ \sigma_1, \dots$. Un mot quelconque $\sigma_1^{n_1} \circ \sigma_2^{n_2} \dots \sigma_1^{n_r} \circ \sigma_2^{n_r}$ peut se réduire grâce aux relations $\sigma_1^2 = \text{id}, \sigma_2^2 = \text{id}, \sigma_1 \circ \sigma_2 = R_{2\alpha}, \sigma_2 \circ \sigma_1 = R_{-2\alpha}$ et $\sigma_2 \circ R_{2\alpha} \circ \sigma_2 = R_{-2\alpha}$: on en déduit par les deux premières relations que tout mot se réduit en $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_1, \sigma_2 \circ \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_1, \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_2$ ou $\sigma_2 \circ \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_2$. Ensuite on regroupe les symétries pour réduire les mots en $R_{2\alpha}^n, R_{2\alpha}^n \circ \sigma_1, \sigma_2 \circ R_{2\alpha}^n$ et $\sigma_2 \circ R_{2\alpha}^n \circ \sigma_1$. Quitte à admettre des rotations d'angles positifs et négatifs, on peut commuter $\sigma_2 \circ R_{2\alpha} = R_{-2\alpha} \circ \sigma_2$ afin d'avoir toutes les symétries non-appariées derrière les rotations. Ceci entraîne aussi qu'on peut se restreindre à une symétrie en fin de mot, prenons σ_2 . Les mots réduits sont donc du type $R_{2\alpha}^z$ et $R_{2\alpha}^{z'} \circ \sigma_2$ pour $z, z' \in \mathbb{Z}$. L'utilisation du déterminant montre que ces deux types de mot ne se transforment pas les uns dans les autres. On a donc

$$G = \{R_{2\alpha}^z, R_{2\alpha}^{z'} \circ \sigma_2 \mid z, z' \in \mathbb{Z}\}.$$

Énoncé Indication

1.1 (b) Si $\alpha = \pi \frac{p}{n}$ avec $p, n \in \mathbb{N}$ et $\text{pgcd}(p, n) = 1$, alors $R_{2\alpha}^n = R_{2p\pi} = \text{id}$. Ainsi on voit facilement que $2n$ est l'ordre de G . Quand $\alpha \neq \pi \frac{p}{n}$, alors $R_{2\alpha}$ est d'ordre infini ainsi que G .

Il s'avère que D_n est le *groupe de symétrie du n -gone régulier* : pour n pair, il y a $\frac{n}{2}$ symétries passant par le milieu de 2 arêtes et $\frac{n}{2}$ symétries passant par deux sommets (dont l'un se trouve en face de l'autre) plus les n rotations. Pour n impair, il y a n symétries passant par un sommet et le milieu d'une arête plus les n rotations.

Énoncé Indication

1.1 (c) $\ker(\det : D_n \rightarrow \{\pm 1\}) = \mathbb{Z}_n$, le sous-groupe des rotations. $\ker(\det : D_\infty \rightarrow \{\pm 1\}) = \mathbb{Z}$, le groupe abélien libre engendré par la rotation $R_{2\alpha}$.

Énoncé Indication

1.1 (d) La question précédente implique qu'on a une suite exacte courte de groupes

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_n \rightarrow D_n \xrightarrow{\det} \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0,$$

respectivement

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow D_\infty \xrightarrow{\det} \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0.$$

D_n (resp. D_∞) n'est pas isomorphe à $\mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_2$ (resp. $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$) parce que ce dernier groupe est abélien, mais D_n (resp. D_∞) ne l'est pas. Un *produit semi-direct*

$G = N \rtimes Q$ de groupes est une suite exacte de groupes

$$1 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 1$$

qui est *scindé*, i.e. où le morphisme de groupes i (ou π) admet un inverse à gauche (resp. à droite) qui est un morphisme de groupes. Dans notre cas, on peut choisir comme inverse à droite du déterminant le morphisme déterminé de façon unique par $s(-1) = \sigma_2$. En effet, $\det(s(-1)) = \det(\sigma_2) = -1$ (de même pour D_∞). On en déduit que D_n (et D_∞) est isomorphe au produit semi-direct $D_n \simeq \mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_2$ (resp. $D_\infty \simeq \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$).

Énoncé Indication

1.2. Corrigé exercice. — (1a) F n'est pas vide, car pour tout $x \in G \setminus \{0\}$, x ou $-x$ est dans F . F est minoré par 0. En conclusion, l'inf existe bien.

Énoncé Indication

1.2 (1b) Si $a > 0$, alors il existe $y \in F$ avec $a \leq y < 2a$. Si on avait $a < y$, alors il existerait $z \in F$ avec $a \leq z < y < 2a$, et par suite $y - z \in F$ et $0 < y - z < a$, ce qui contredirait le fait que $a = \inf F$. Ainsi $a = y \in G$ et donc $a\mathbb{Z} \subset G$.

D'un autre côté, pour un élément quelconque $x \in G$, soit m la partie entière de x/a , i.e. $m \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq x - am < a$. On a $x - am \in G$, donc $a = \inf F$ implique $x - am = 0$, et par suite $x \in a\mathbb{Z}$. Ceci donne $G \subset a\mathbb{Z}$.

Énoncé Indication

1.2 (1c) Soit donc $a = 0$. Soient $x < y$ deux éléments de \mathbb{R} ; montrons que $]x, y[\cap G \neq \emptyset$. Puisque $\inf F = 0$ et $0 < y - x$, on peut trouver $z \in G$ tel que $0 < z < y - x$. Soit n la partie entière de x/z . On a $0 < (n+1)z - x \leq z < y - x$, ce qui implique $x < (n+1)z < y$, i.e. $(n+1)z \in]x, y[$. Finalement $(n+1)z \in]x, y[\cap G$, et ceci veut dire que G est partout dense dans \mathbb{R} .

Énoncé Indication

1.2 (2a) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $G_\alpha = \{n\alpha + q \mid n, q \in \mathbb{Z}\}$. Il est facile à montrer que G_α est un sous-groupe additif de \mathbb{R} . Soit $\alpha = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ (sans perte de généralité $r, s > 0$), et supposons qu'il existe $n, q \in \mathbb{Z}$ avec $0 < n\alpha + q < \frac{1}{s}$. Ceci implique $0 < nr + qs < 1$. Or, $nr + qs \in \mathbb{Z}$, donc ceci est impossible. Ainsi, si on note $F = G_\alpha \cap \mathbb{R}_+^*$, $\inf F \geq \frac{1}{s} > 0$, et par suite G_α est discret (par ce qui précède).

Réciproquement, soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. J'affirme que la suite $(\alpha n \bmod \mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}}$ ne prend que des valeurs deux à deux distinctes dans $[0, 1]$. En effet, $\alpha n + l = \alpha m + r$ implique $\alpha(n - m) = r - l$, i.e. $\alpha = \frac{r-l}{n-m} \in \mathbb{Q}$ si $n \neq m$. Ainsi l'égalité des deux valeurs entraînerait une contradiction avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. De ce fait, on déduit facilement que G_α est dense pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. En effet, les représentants dans $[0, 1]$ des éléments de la suite $(\alpha n \bmod \mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}}$ sont dans G_α , puisque $\mathbb{Z} \subset G_\alpha$. Parmi les différences entre $n + 1$ éléments distincts de $[0, 1]$, il se trouve forcément une qui est inférieure à $\frac{1}{n}$ (principe des tiroirs), et par suite les différences des éléments de la suite deviennent aussi petites que l'on veut. Ainsi G_α possède des éléments aussi petits que l'on veut, i.e., si on note $F = G_\alpha \cap \mathbb{R}_+^*$, $\inf F = 0$ et G_α est dense dans \mathbb{R} .

Énoncé Indication

1.2 (2b) $\overline{G_\alpha} \subset S^1$ est dense si et seulement si $\overline{G_\alpha} \subset [0, 1]$ l'est. Mais les représentants dans $[0, 1]$ des éléments de la suite $(\alpha n \bmod \mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}}$ sont encore dans G_α , puisque $\mathbb{Z} \subset G_\alpha$. Ainsi, si on note $F = G_\alpha \cap \mathbb{R}_+^*$, $\inf F = 0$ et G_α est dense dans \mathbb{R} . Réciproquement, si G_α est dense dans \mathbb{R} , la projection $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z} \setminus \mathbb{R}$ (qui est aussi un homomorphisme de groupes!) envoie G_α sur $\overline{G_\alpha}$ qui est par suite dense dans $[0, 1]$.

Énoncé Indication

1.2 (2c) On sait que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $g \in \overline{G_\alpha}$ tel que $0 < g < \epsilon$ (on note aussi g le représentant dans $[0, 1]$ de la classe défini par g dans $\overline{G_\alpha}$). Montrons que pour tout $x \in S^1$ et tout voisinage U de x dans S^1 , il existe $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \overline{G_\alpha}$ suite d'éléments distincts avec pour tout $y \in U : g_n \cdot y \in U$ à partir d'un certain n . En effet, il existe par hypothèse $h_n \in \overline{G_\alpha}$ tel que $0 < h_n < \frac{1}{n}$ et $h_n < h_{n-1}$. Posons alors $g_n := 1 - h_n \in \overline{G_\alpha}$. Les g_n forment une suite strictement croissante, bornée par 1. Maintenant, étant donné x et U , posons $U_\epsilon := \{z \in S^1 \mid d(x, z) < \epsilon\}$. Pour un $y \in U$, il existe $\epsilon < \frac{1}{2}$ tel que $y \in U_\epsilon \subset U$. Il est clair qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ avec $\frac{1}{n} < \epsilon$ pour tout $n > N$. Par construction $d(g_n y, y) = |g_n y - y| = |(1 - h_n)y - y| = |h_n y| < |h_n| < \frac{1}{n} \leq \epsilon$ à partir d'un certain n .

Énoncé Indication

1.2 (2d) Par contraposition, il faut montrer l'existence de x et y dans S^1 tels que pour tous voisinages U_x et V_y , il existe une infinité de $g \in D_\infty$ avec $gU_x \cap V_y \neq \emptyset$. Pour cela, il suffit de prendre $x = y$, et, quitte à passer à l'intersection, il suffit de prendre $U := U_x = V_x$. Ainsi, étant donné x et U , il

faut montrer qu'il existe une infinité de $g \in D_\infty$ avec $gy \in U$ pour tout $y \in U$. Mais $\overline{G_\alpha}$ peut être vu comme le sous-groupe des rotations de D_∞ , donc 1.2 (2c) montre que D_∞ n'agit pas proprement sur S^1 .

Énoncé Indication

1.3. Corrigé exercice. — Montrons d'abord - comme indiqué - que l'application $\phi_x : G \rightarrow [G, G]$ donnée par $y \mapsto xyx^{-1}y^{-1}$ est d'image discrète si et seulement si $x \in Z(G)$. Si $x \in Z(G)$, alors $xyx^{-1}y^{-1} = 1$ pour tout $y \in G$, et l'image de ϕ_x est réduit à $\{1\}$ qui est discret dans G . Soit réciproquement $\text{Im}(\phi_x)$ discrète. $1 \in \text{Im}(\phi_x)$, et toute application continue $f : X \rightarrow Y$ d'un connexe vers un discret est constante (cf 2.1 2)). En effet, sinon il existe $y \neq y' \in f(X) \subset Y$, i.e. $f(X) \setminus \{y\} \neq \emptyset$. Y discret implique que $f^{-1}(y)$ et $f^{-1}(f(X) \setminus \{y\})$ sont deux ouverts non vides de X , d'intersection vide, et de réunion X . Ceci est impossible pour un connexe X . Par suite $\text{Im}(\phi_x) = \{1\}$ et $x \in Z(G)$.

La restriction de $\phi_x : G \rightarrow [G, G], y \mapsto xyx^{-1}y^{-1}$ à H est à valeur dans H , car H est distingué. Ainsi l'image est discrète, et par ce qui précède, tous les éléments $x \in H$ sont centraux, i.e. $H \subset Z(G)$.

Dans $G = SU(2)$, le sous-groupe \mathbb{Z}_2 donné par les matrices I_2 (matrice identité) et $-I_2$ est distingué et discret, donc central. L'application quotient $SU(2) \rightarrow SU(2)/\mathbb{Z}_2 = SO(3)$ sera discuté dans l'exo 10.4.

Soit

$$H = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \mid a \in \mathbb{Z} \right\}$$

un sous-groupe du groupe de Heisenberg G . H s'identifie (comme espace topologique) à $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^3$, ainsi H est discret. H est distingué, et central. Le quotient G/H est homéomorphe à $\mathbb{R}^2 \times S^1$.

Énoncé Indication

UNIVERSITÉ DE NANTES
 DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
 Maîtrise : Topologie Algébrique

François Laudenbach (CM) & Friedrich Wagemann (TD)

Travaux dirigés de Mathématiques, Fiche 2, Topologie algébrique
 2005-2006

Topologie élémentaire.

2.1. Exercice (Connexité). — 1a) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sont-ils des espaces topologiques connexes ? Quels sont les composantes connexes ? En déduire que \mathbb{R} et \mathbb{R}^2 ne sont pas homéomorphes.

1b) Montrer que \mathbb{R} et S^1 ne sont pas homéomorphes.

2) Montrer que toute application localement constante sur un espace connexe Y est constante.

3) Montrer qu'un espace topologique connexe par arcs est connexe. Montrer que l'espace topologique $\{(x, \sin(1/x)) \mid x \in]0, 1]\} \cup \{(0, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$ est connexe, mais pas connexe par arcs. Montrer qu'un espace topologique qui est connexe et localement connexe par arcs, est connexe par arcs.

Indication Corrigé

2.2. Exercice (La topologie produit). — Soient X et Y deux espaces topologiques. On munit $X \times Y$ de la topologie produit.

1) Les projections p_X et p_Y sont-elles continues ? ouvertes ? fermées ?

2) A quelle(s) condition(s) une application $f : Z \rightarrow X \times Y$ est-elle continue ?

3) A quelle(s) condition(s) $X \times Y$ est-il séparé ? compact ? connexe ?

Indication Corrigé

2.3. Exercice (Plongements). — Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue injective entre espaces topologiques. On dit que f est un *plongement topologique* si f induit un homéomorphisme entre X et son image. Une application f s'appelle *propre* si l'image réciproque de tout compact est compact.

- 1) Montrer que f n'est pas nécessairement un plongement topologique.
- 2) Montrer que si Y est séparé, alors X l'est aussi.
- 3) Montrer que si Y est séparé et X compact, alors f est un plongement.
- 4) Montrer que si Y est localement compact et f est propre, alors f est un plongement.

Indication Corrigé

2.4. Exercice (Homéomorphismes). — 1) Montrer qu'une application bijective continue n'est pas forcément un homéomorphisme.

2) Montrer qu'une application bijective continue $f : X \rightarrow Y$ avec Y séparé et X compact est un homéomorphisme (cf 2.3 3)).

Rappelons la définition d'un *homéomorphisme local* : une application continue $f : X \rightarrow Y$ est un homéomorphisme local si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert V de x , et un voisinage ouvert U de $f(x)$ tels que la restriction $f|_V : V \rightarrow U$ soit un homéomorphisme.

3) Donner un exemple d'un homéomorphisme local $f : X \rightarrow Y$ et d'un sous-ensemble $A \subset X$ tel que $f|_A$ ne soit pas un homéomorphisme local de A sur $f(A)$.

4a) Montrer que si X est compact et $f : X \rightarrow Y$ est un homéomorphisme local, alors pour tout $y \in Y$, la fibre $f^{-1}(y)$ est discrete. En déduire que l'ensemble $f^{-1}(y)$ est fini.

b) Supposons en plus que Y est connexe et séparé. Montrer alors que f est surjective (montrer que le complémentaire de $f(X)$ est ouvert et fermé).

Indication Corrigé

2.5. Exercice (La topologie quotient). — 1) Soit $X = [0, 1]$ muni de la topologie induite par la valeur absolue. On considère la relation d'équivalence sur X définie par

$$x \sim y \text{ si et seulement si } x = y, (x, y) = (0, 1) \text{ ou } (x, y) = (1, 0)$$

et on note E l'espace quotient.

a) Montrer que E est séparé et en déduire que E est compact.

b) Montrer que E est homéomorphe à S^1 , le cercle unité muni de la topologie induite par celle de \mathbb{R}^2 .

- 2) Soient X, Y des espaces topologiques, $f : X \rightarrow Y$ une application continue surjective telle que Y ait la topologie quotient par rapport à f . Montrer que
- f est fermée si et seulement si pour tout fermé $A \subset X : f^{-1} \circ f(A) \subset X$ est fermé.
 - f est ouverte si et seulement si pour tout ouvert $O \subset X : f^{-1} \circ f(O) \subset X$ est ouvert.

Remarque : on appelle $f^{-1} \circ f(B)$ le saturé d'un sous-ensemble $B \subset X$.

Indication Corrigé

2.6. Exercice (Problème de séparation du quotient)

- On définit sur \mathbb{R} la relation d'équivalence \mathcal{R} par $x\mathcal{R}y$ si $x - y \in \mathbb{Q}$. Montrer que l'espace quotient \mathbb{R}/\mathcal{R} n'est pas séparé.
- Soit X un espace topologique, \mathcal{R} une relation d'équivalence sur X et $q : X \rightarrow X/\mathcal{R}$ la surjection canonique.
 - On suppose que q est ouverte. Montrer que X/\mathcal{R} est un espace séparé si et seulement si le graphe de la relation \mathcal{R} est un fermé de $X \times X$.
 - On suppose X compact. Montrer que X/\mathcal{R} est séparé si et seulement si q est fermée.
 - Soit maintenant A une partie non vide de X . On définit \mathcal{R} par

$$x\mathcal{R}y \text{ si et seulement si } x = y \text{ ou } (x, y) \in A \times A.$$

- Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application continue $f : X \rightarrow Y$ se factorise par X/A .
- On suppose X compact. Montrer que X/A est séparé si et seulement si A est un sous-espace fermé de X .
- Retrouver le résultat de l'exercice 2.5 1a).
- Etudier le cas où $X = D^2$ et $A = S^1$, et plus généralement $X = D^n$ et $A = S^{n-1}$.

Indication Corrigé

- ### 2.7. Exercice (La topologie discrète).
- Montrer que l'espace topologique \mathbb{R} muni de la topologie engendrée par tous les intervalles de la forme $]x, y]$ et tous les intervalles $[x, y[$ est discret.
 - Soit F un espace discret fini. Donner la liste des ouverts de $F \times [0, 1]$.

Indication Corrigé

2.8. Exercice (Quotient par l'action d'un groupe)

1a) Montrer que si le groupe G agit sur l'espace topologique X , alors l'application $X \rightarrow X/G$ est ouverte.

1b) Montrer que si en plus G est fini, alors l'application $X \rightarrow X/G$ est fermée.

Indication Corrigé

2.9. Exercice (Groupes topologiques). — On appelle *groupe topologique* un groupe G muni d'une topologie séparée vérifiant :

- $\mu : G \times G \rightarrow G$, $\mu(g, h) = g \cdot h$ est continue et
- $i : G \rightarrow G$, $i(g) = g^{-1}$ est continue.

1) Montrer que pour tout $g \in G$, la translation à gauche (resp. à droite, resp. la conjugaison) par g est un homéomorphisme de G sur G .

2) Montrer que si H est un sous-groupe de G , il en est de même pour son adhérence. Montrer que si de plus H est distingué dans G , \bar{H} est également distingué dans G .

3) Soit H un sous-groupe fermé de G . Montrer que G/H , l'ensemble des classes à gauche, munit de la topologie quotient, est séparé, et que la projection $G \rightarrow G/H$ est une application ouverte (cf exo 2.8 1a)). Montrer que si de plus H est distingué dans G , G/H est un groupe topologique.

4) Ici, \mathbb{K} désigne le corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

a) Montrer que $GL(n, \mathbb{K})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{K})$.

b) Montrer que $GL(n, \mathbb{K})$ est un groupe topologique.

c) Montrer que $U(n)$, $SU(n)$, $GL(n, \mathbb{R})$, $O(n)$ et $SO(n)$ sont des sous-groupes fermés de $GL(n, \mathbb{C})$ resp. de $GL(n, \mathbb{R})$.

d) Montrer que $U(n)$, $SU(n)$, $O(n)$ et $SO(n)$ sont compacts.

e) Construire un isomorphisme de groupes topologiques entre $GL(n, \mathbb{C})$ et $\mathbb{C}^* \times SL(n, \mathbb{C})$, $U(n)$ et $SU(n) \times S^1$, $O(n)$ et $SO(n) \times \{\pm 1\}$, $U(1)$ et $SO(2)$.

f) Montrer que $SU(n)$ et $SO(n)$ sont connexes par arcs.

Indication Corrigé

2.10. Exercice (Compacité). — Est-ce que le sous-espace topologique $A = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$ est compact ?

Indication Corrigé

2.11. Exercice (Construction d'applications continues)

Soit $X = O_1 \cup O_2$ (resp. $X = F_1 \cup F_2$) un espace topologique, réunion de deux sous-espaces ouverts (resp. fermés). Soient $f_i : O_i \rightarrow Y$ (resp. $f_i : F_i \rightarrow Y$) pour $i = 1, 2$ deux applications continues vers un espace topologique Y qui coïncident sur l'intersection. Montrer que l'application réunion $f := f_1 \cup f_2 : X \rightarrow Y$ est continue.

Corrigé

2.12. Exercice (L'espace projectif réel). — Sur $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, on définit la relation d'équivalence \mathcal{R} :

$$v \sim v' :\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^* : v' = \lambda v.$$

L'espace quotient $X / \mathcal{R} =: \mathbb{R}P^n$ s'appelle *l'espace projectif réel* de dimension n .

- 1) Montrer que la projection $\pi : X \rightarrow \mathbb{R}P^n$ est ouverte.
- 2) Montrer que le graphe $\text{gr}(\mathcal{R})$ est fermé, et en déduire que $\mathbb{R}P^n$ est séparé.
- 3) Sur la sphère \mathbb{S}^n , on définit une relation d'équivalence \mathcal{S} par :

$$x \sim y :\Leftrightarrow y = \pm x.$$

Montrer que $\mathbb{S}^n / \mathcal{S}$ est compact, et que $\mathbb{S}^n / \mathcal{S}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}P^n$.

- 4) Montrer que $\mathbb{R}P^n$ est connexe et connexe par arcs.
- 5) Montrer que $\mathbb{R}P^2$ est homéomorphe à l'espace quotient $[0, 1]^2 / \sim$ où \sim est la relation d'équivalence engendré par les identifications $(s, 1) \sim (1 - s, 0)$ et $(1, t) \sim (0, 1 - t)$ pour tout $s, t \in [0, 1]$.

Indication Corrigé

UNIVERSITÉ DE NANTES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Maîtrise : Topologie Algébrique

François Laudenbach (CM) & Friedrich Wagemann (TD)

Topologie élémentaire : indications pour les exercices

2.1. Indication exercice. — **2.1** 1a) Un espace topologique X s'appelle *connexe* si pour tous ouverts U, V de X avec $X = U \cup V$ et $U \cap V = \emptyset$, on a $U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$.

On pourra montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est connexe à l'aide du critère donné plus bas : un espace topologique connexe par arcs est connexe.

Pour montrer que \mathbb{R}^2 et \mathbb{R} ne sont pas homéomorphes, on pourra utiliser ce qui précède : déduire de l'existence d'un homéomorphisme entre \mathbb{R}^2 et \mathbb{R} l'existence d'un homéomorphisme entre $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2.1 1b) Faire intervenir la propriété d'un espace topologique d'être *compact*.

2.1 2) Une application $f : X \rightarrow Y$ est appelé *localement constante* si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert $O \ni x$ tel que $f|_O$ soit constante. Examiner la préimage des différentes composantes connexes.

2.1 3) Rappelons qu'un espace topologique X s'appelle *connexe par arcs* si pour tout couple de points $x, y \in X$, il existe un *chemin* de x à y dans X (i.e. une application continue $c : [0, 1] \rightarrow X$ avec $c(0) = x$ et $c(1) = y$).

X n'est pas connexe par arcs, car la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas continue en 0. La continuité d'une fonction se vérifie à l'aide de suites.

Dans un espace topologique localement connexe par arcs et connexe, les composantes connexes par arcs sont ouvertes.

Énoncé Corrigé

2.2. Indication exercice. — **2.2** 1) oui - oui - non.

2.2 2) Une application $f : Z \rightarrow X \times Y$ est continue si et seulement si les deux applications $p_X \circ f : Z \rightarrow X$ et $p_Y \circ f : Z \rightarrow Y$ sont continues.

2.2 3) À condition que X et Y ont la même propriété. La propriété la plus difficile à montrer dans ce contexte est la compacité. Il faudra travailler

composante par composante pour extraire un sous-recouvrement fini. Un recouvrement ouvert quelconque se remplace d'abord par un recouvrement par des carrés (i.e. des ouverts élémentaires de la topologie produit).

Énoncé Corrigé

2.3. Indication exercice. — **2.3** 1) Essayer l'exponentielle $\exp : [0, 1] \rightarrow S^1$ sur un intervalle bien choisi.

2.3 3) Pour montrer que $f : X \rightarrow f(X)$ est ouverte, passer aux fermés, car l'image d'un quasicompact par une application continue est quasicompact.

2.3 4) Travailler localement dans une situation où on peut appliquer ce qui précède.

Énoncé Corrigé

2.4. Indication exercice. — **2.4** 3) Un homéomorphisme local $f : X \rightarrow Y$ est toujours une application ouverte.

2.4 4) Un sous-ensemble discret et compact d'un espace topologique est fini.

Énoncé Corrigé

2.5. Indication exercice. — **2.5** 1a) La *topologie quotient* sur E est donnée par : $O \subset E$ est ouvert si et seulement si $\pi^{-1}(O) \subset [0, 1]$ est ouvert, où on a noté $\pi : X = [0, 1] \rightarrow E = X / \sim$ la projection. Cette topologie vérifie la propriété universelle suivante : étant donné une application continue $\phi : [0, 1] \rightarrow Y$ à valeurs dans un espace topologique Y telle que ϕ soit constante sur les classes de la relation d'équivalence, i.e. ici telle que $\phi(0) = \phi(1)$, alors il existe une unique application continue $\bar{\phi} : E = [0, 1] / \sim \rightarrow Y$ telle que $\bar{\phi} \circ \pi = \phi$.

2.5 2a) Puisque la topologie considérée sur Y est la topologie quotient par rapport à f , $O \subset Y$ est ouvert si et seulement si $f^{-1}(O) \subset X$ est ouvert. Donc aussi $F \subset Y$ est fermé si et seulement si $f^{-1}(F) \subset X$ est fermé.

Énoncé Corrigé

2.6. Indication exercice. — **2.6** 1) On utilise la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , i.e. que entre deux réels $r_1 < r_2$, il existe un rationnel $q \in \mathbb{Q} : r_1 < q < r_2$.

2.6 2a) Il faut montrer que le complémentaire du graphe est ouvert dans le produit.

2.6 2b) Un espace compact est *normal*, i.e. deux fermés disjoints C_1 et C_2 peuvent être séparés par des ouverts disjoints, ou encore en passant aux complémentaires, il existe deux fermés F_1 et F_2 avec $C_1 \subset (X \setminus F_1)$, $C_2 \subset (X \setminus F_2)$ et $F_1 \cup F_2 = X$.

2.6 c1) Il s'agit de traduire la propriété universelle du quotient.

2.6 c4) Faire intervenir le cône $C^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ sur D^2 .

Énoncé Corrigé

2.7. Indication exercice. — **2.7** 2) Faire la liste de tous les ouverts de $[0, 1]$.

Énoncé Corrigé

2.8. Indication exercice. — **2.8** Exprimer le saturé d'un ouvert (resp. d'un fermé) en tant que réunion d'ouverts (resp. réunion fini de fermés).

Énoncé Corrigé

2.9. Indication exercice. — **2.9** 3) Montrer que le graphe de la relation d'équivalence $x \sim y :\Leftrightarrow xy^{-1} \in H$ est un fermé.

2.9 4e) Les homomorphismes en question sont donnés par le déterminant.

2.9 4f) Utiliser la forme canonique des éléments de $SU(n)$ et $SO(n)$, i.e. celle où la matrice est diagonale avec des matrices 2×2 sur la diagonale. Trouver d'abord un chemin pour une de ces matrices 2×2 , et les superposer pour trouver un chemin qui marche pour toute la matrice.

Énoncé Corrigé

2.10. Indication exercice. — **2.10** oui.

Énoncé Corrigé

2.12. Indication exercice. — **2.12** 2) Une possibilité est d'introduire le *produit extérieur* : Pour un espace vectoriel V , $\Lambda^2 V$ désigne l'espace vectoriel quotient du produit tensoriel $V \otimes V$ par le sous-espace engendré par les éléments $x \otimes y + y \otimes x$ pour tout $x, y \in V$. Le produit extérieur est la composée des deux passages au quotient $V \times V \rightarrow V \otimes V$ et $V \otimes V \rightarrow \Lambda^2 V$. Il est par construction antisymétrique (i.e. $x \wedge y = -y \wedge x$ pour tout $x, y \in V$), bilinéaire (i.e. $x \wedge (y + z) = x \wedge y + x \wedge z$, $x \wedge (\lambda y) = (\lambda x) \wedge y$, et $(x + y) \wedge z = x \wedge z + y \wedge z$

pour tout $x, y, z \in V$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$), et par suite nul si x et y sont linéairement dépendant.

Mais on peut aussi directement trouver géométriquement deux ouverts séparants dans le quotient (montrer que les cônes engendrés par deux boules séparants v et $v' \in X$ sont disjoints), ou à faire un raisonnement à l'aide de suites.

2.12 3) On peut montrer que le quotient d'un espace séparé par l'action libre d'un groupe fini est séparé ou s'en tirer sans cette affirmation.

2.12 5) On pourrait utiliser un homéomorphisme h qui identifie $[0, 1]^2$ avec l'hémisphère supérieur (fermé) de \mathbb{S}^2 pour mettre \mathbb{S}^2 et $[0, 1]^2$ en relation.

Énoncé Corrigé

UNIVERSITÉ DE NANTES
 DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Maîtrise : Topologie Algébrique

François Laudenbach (CM) & Friedrich Wagemann (TD)

Travaux dirigés de Mathématiques, Fiche 2, Topologie algébrique
 2005-2006

Topologie élémentaire : solutions des exercices.

2.1. Corrigé exercice. — (1a) Un espace topologique X s'appelle *connexe* si pour tous ouverts U, V de X avec $X = U \cup V$ et $U \cap V = \emptyset$, on a $U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$. $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}_+^* \cup \mathbb{R}_-^*$ n'est pas connexe, car \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* sont bien ouverts et non-vides, ce sont les deux composantes connexes de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est connexe. Montrons le avec le critère donné plus bas : un espace topologique connexe par arcs est connexe. Rappelons qu'un espace topologique X s'appelle *connexe par arcs* si pour tout couple de points $x, y \in X$, il existe un chemin de x à y dans X (i.e. une application continue $c : [0, 1] \rightarrow X$ avec $c(0) = x$ et $c(1) = y$). Or, $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est connexe par arcs : soient $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Joignons les dans \mathbb{R}^2 par une ligne droite, i.e. il existe $l : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec $l(0) = x$ et $l(1) = y$ (par deux points distincts passe une et une seule droite). Si la droite l ne passe pas par 0, l induit un chemin de x à y dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Sinon, il existe un unique $t_0 \in [0, 1]$ avec $l(t_0) = 0$. Soit $B_r(0)$ une boule fermée de rayon r autour de 0 avec $0 < r < \min\{|x|, |y|\}$. Il existe des uniques $t_1 < t_2 \in [0, 1]$ avec $|l(t_1)| = |l(t_2)| = r$. Soit $l(t_1) = re^{2\pi i \alpha_1}$ et $l(t_2) = re^{2\pi i \alpha_2}$. Définissons une fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(t) = t \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{t_2 - t_1} + \alpha_1 - t_1 \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{t_2 - t_1}.$$

f vérifie $f(t_1) = \alpha_1$ et $f(t_2) = \alpha_2$. On définit alors un chemin $\tilde{l} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ par $\tilde{l}|_{[0, t_1]} = l|_{[0, t_1]}$, $\tilde{l}|_{[t_2, 1]} = l|_{[t_2, 1]}$ et $\tilde{l}|_{[t_1, t_2]}(t) = re^{2\pi i f(t)}$. Il reste à montrer que \tilde{l} est continue - ceci est laissé au lecteur. (Le lecteur voudra peut-être montrer plus généralement que étant donné des fonctions continues $f_i : F_i \rightarrow Y$ $i = 1, \dots, n$ sur des fermés $F_i \subset X$ d'un espace topologique X telles que

$f_i|_{F_i \cap F_j} = f_j|_{F_i \cap F_j}$ pour tous i, j , il existe une unique fonction continue $f : X \rightarrow Y$ avec $f|_{F_i} = f_i$ pour tous les $i = 1, \dots, n$. La même chose vaut pour un recouvrement de X par des ouverts au lieu des fermés, cf exo 2.11)

Si \mathbb{R}^2 et \mathbb{R} étaient homéomorphes, alors il existerait $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $h^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ continues avec $h \circ h^{-1} = \text{id}_{\mathbb{R}}$ et $h^{-1} \circ h = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$. Les restrictions $h : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ et $h^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ sont alors continues. On compose avec une translation t afin d'avoir $t(h(0)) = 0$. On a alors une application bijective continue $h^{-1} \circ t \circ h : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{h^{-1}(0)\}$, d'inverse $h^{-1} \circ t^{-1} \circ h$ évidemment continue, donc un homéomorphisme. On en déduit que $h : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{h(0)\}$ est un homéomorphisme, ce qui est absurde, puisque $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est connexe, pendant que $\mathbb{R} \setminus \{h(0)\}$ ne l'est pas.

Énoncé Indication

2.1 (1b) \mathbb{R} et S^1 ne sont pas homéomorphes, puisque S^1 est compact, pendant que \mathbb{R} ne l'est pas. En effet, une image continue séparée d'un compact est compact (étant donné un recouvrement ouvert $f(X) = \bigcup_i O_i$, les $f^{-1}(O_i)$ forment un recouvrement ouvert de X dont on peut par hypothèse extraire un sous-recouvrement fini; les O_i correspondant forment le sous-recouvrement fini voulue de $f(X)$), et S^1 est l'image sous l'exponentielle complexe $t \mapsto e^{2\pi it}$ du compact $[0, 1]$ (et est un sous-espace du séparé \mathbb{R}^2). Par contre, le recouvrement ouvert $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]-n, n[$ n'admet pas de sous-recouvrement fini, comme on le montre facilement.

Énoncé Indication

2.1 (2) Une application $f : X \rightarrow Y$ est appelé *localement constante* si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert $O \ni x$ tel que $f|_O$ soit constante. Maintenant, si f est localement constante et si l'on suppose que f n'est pas constante, alors il existe $x, y \in X$ avec $f(x) \neq f(y)$. Montrons que $f^{-1}(f(x))$ et $f^{-1}(f(X) \setminus f(x))$ sont ouverts. En effet, f localement constant veut dire que tout $y \in f^{-1}(f(x))$ possède un petit voisinage ouvert $O \subset f^{-1}(f(x))$. De l'autre côté, $f^{-1}(f(X) \setminus f(x)) = f^{-1}(\bigcup_{i \in I} f(x_i)) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(f(x_i))$ où x_i pour $i \in I$ parcourt un système de représentants des $x \in X$ qui ont des valeurs différents de $f(x)$. Ainsi, puisque chaque $f^{-1}(f(x_i))$ est ouvert, $f^{-1}(f(X) \setminus f(x))$ est ouvert. Par ce qui précède, $X = f^{-1}(f(X) \setminus f(x)) \cup f^{-1}(f(x))$ est une décomposition en ouverts non-vides disjoints, ce qui contredit la connexité de X .

Énoncé Indication

2.1 (3) Rappelons qu'un espace topologique X s'appelle *connexe par arcs* si pour tout couple de points $x, y \in X$, il existe un chemin de x à y dans X (i.e. une application continue $c : [0, 1] \rightarrow X$ avec $c(0) = x$ et $c(1) = y$). Montrons que "connexe par arcs" implique "connexe" : en effet, sinon il existerait $x, y \in X$ et une fonction continue $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ avec $f(x) = 0$ et $f(y) = 1$ (choisir x et y dans deux composantes connexes différentes). Par hypothèse, il existe un chemin continu $c : [0, 1] \rightarrow X$ avec $c(0) = x$ et $c(1) = y$. On en déduit une application continue surjective $f \circ c : [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$. $K_1 := f^{-1}(0)$ et $K_2 := f^{-1}(1)$ sont deux compacts non-vides disjoints de $[0, 1]$ qui recouvrent $[0, 1]$. Ceci est impossible : en effet, soit $0 \in K_1$. L'intersection de K_1 avec une boule assez petite autour de 0 est un intervalle (compacité! - utiliser par exemple le lemme de Lebesgue) et soit $t_1 \in K_1$ son extrémité (supérieure). Puisque $X = K_1 \cup K_2$ et puisque K_2 compact, l'intersection de K_2 avec une boule assez petite autour de t_1 sera un intervalle, soit $t_2 \in K_2$ son extrémité (inférieure). Il existe $t \in \mathbb{R}$ avec $t_1 < t < t_2$, ce qui est une contradiction.

Montrons que $X := \{(x, \sin(1/x)) \mid x \in]0, 1]\} \cup \{(0, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$ est connexe : en effet, X est un sous-espace topologique de \mathbb{R}^2 , donc tout voisinage ouvert dans X autour de $(0, 0)$ contient l'intersection $B_\epsilon \cap X$ d'une boule B_ϵ de rayon $\epsilon > 0$ de \mathbb{R}^2 autour de $(0, 0)$ avec X . Or, $(\epsilon, \sin(\frac{1}{\epsilon})) \in X \setminus \{(0, 0)\}$, et soit $\delta > 0$ tel que $\epsilon > \delta$ et $\sin(\frac{1}{\delta}) = 0$ (δ varie entre $(0, 0)$ et $\frac{\epsilon}{1-2\pi\epsilon}$ - on peut choisir ϵ assez petit pour que $1 - 2\pi\epsilon > 0$). Alors $(\delta, 0) \in B_\epsilon \cap X$; ceci implique que tout voisinage ouvert de $\{(0, 0)\}$ dans X contient un élément de $X \setminus \{(0, 0)\}$, i.e. $(0, 0)$ n'est pas isolé dans X . Ceci suffit pour montrer que X est connexe, car $X \setminus \{(0, 0)\}$ est l'image continue d'une intervalle, donc connexe; si $X = U \cup V$ avec U, V ouverts et $(0, 0) \in U$, alors $\{(x, \sin(1/x)) \mid x \in]0, \delta]\} \subset U$ par ce qui précède, et puisque $\{(x, \sin(1/x)) \mid x \in]0, 1]\}$ est connexe en tant que image continue d'une intervalle, soit $\{(x, \sin(1/x)) \mid x \in]0, 1]\} \subset U$ et $V = \emptyset$, soit $U \cap V \neq \emptyset$. Ainsi X est connexe.

Montrons que X n'est pas connexe par arcs. En effet, sinon il existerait un chemin continu $c : [0, 1] \rightarrow X$ avec $c(0) = (0, 0)$ et $c(1) = (\epsilon, \sin(\frac{1}{\epsilon}))$ avec $\epsilon > 0$. On sait que $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ n'est pas continue en 0, et on va provoquer une contradiction en utilisant que pour montrer qu'une fonction f est continue en 0, il faut et il suffit de montrer que $f(x_n) \rightarrow f(0)$ pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers 0. En effet, soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui tend vers 0, et notons $y_n = \sin(\frac{1}{x_n})$. Il existe $t_n \in [0, 1]$ avec $c(t_n) = y_n$ à partir d'un certain N

(théorème des valeurs intermédiaires!). La suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contient une sous-suite convergente $(t_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ vers $a \in [0, 1]$. On remplace alors le chemin c par un chemin $\tilde{c} : [0, 1] \rightarrow X$ afin que $\tilde{c}(a) = (0, 0)$ (on remplace c par le chemin constant en $(0, 0)$ jusqu'à a , et on parcourt le chemin c ensuite de façon accélérée entre a et 1, cf chapitre sur le groupe fondamental). Par construction, on a donc

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{x_{n_i}}\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{c}(t_{n_i}) = \tilde{c}\left(\lim_{i \rightarrow \infty} t_{n_i}\right) = \tilde{c}(a) = (0, 0),$$

ce qui implique que $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ est continue en 0; cette contradiction montre que X n'est pas connexe par arcs.

Montrons finalement qu'un espace topologique X qui est localement connexe par arcs et connexe est connexe par arcs. Ici, X s'appelle *localement connexe par arcs* si tout point de X possède un système fondamental de voisinages connexes par arcs. Soient $x, y \in X$. Il faut montrer qu'il existe un chemin de x à y . x possède un voisinage U connexe par arcs. Soit $(U_i)_{i \in I}$ le système de tous les sous-espaces connexes par arcs de X contenant x . La réunion $U := \bigcup_{i \in I} U_i$ est encore connexe par arcs, et le sous-espace connexe par arcs maximal de X contenant x , U s'appelle la *composante connexe par arcs* contenant x . De même, soit V la réunion de toutes les autres composantes connexes par arcs. Montrons que U (et par suite aussi V) est ouvert. En effet, puisque X est localement connexe par arcs, tout point de U possède un voisinage ouvert O connexe par arcs, et par maximalité de U , O est encore inclus dans U (sinon, $U \cup O$ serait un connexe par arcs strictement plus grand que U , contradiction). Puisque U et V sont donc ouverts, disjoints et recouvrent X , et en plus U n'est pas vide, V doit être vide par connexité de X , et $y \in U$ se relie à x par un chemin.

Énoncé Indication

2.2. Corrigé exercice. — 1) Soit $x \in X$, et U_x un voisinage ouvert de x dans X . Alors $p_X^{-1}(U_x) = U_x \times Y$ est ouvert, car pour tout $(x', y) \in U_x \times Y$, il existe un ouvert $O_{x'} \times O_y \subset U_x \times Y$. De même pour p_Y . En fait, p_X (et p_Y) est même ouverte. Soit O un ouvert dans $X \times Y$, et soit $x \in p_X(O)$, i.e. par exemple $(x, y) \in O$. Alors, par définition de la topologie produit, il existe des ouverts O_x, O_y de X , resp. de Y tels que $O_x \times O_y \subset O$. On a donc $O_x \subset p_X(O)$, i.e. p_X est ouverte. Les projections ne sont en général pas

fermées, comme le montre l'exemple suivant : $\{(x, y) \mid xy = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ est un fermé (le complémentaire dans le plan est une réunion de boules ouvertes (dont les adhérences sont tangents soit à une branche, soit aux deux branches de l'hyperbole)), et sa projection sur l'axe de réels positifs est l'ouvert \mathbb{R}_+^* .

2.2 2) Une application $f : Z \rightarrow X \times Y$ est continue si et seulement si les deux applications $p_X \circ f : Z \rightarrow X$ et $p_Y \circ f : Z \rightarrow Y$ sont continues. Il suffit de montrer que si $p_X \circ f : Z \rightarrow X$ et $p_Y \circ f : Z \rightarrow Y$ sont continues, alors f l'est. On peut se restreindre à montrer $f^{-1}(O_X \times O_Y)$ ouvert pour un ouvert $O_X \times O_Y \subset X \times Y$. On a $f^{-1}(O_X \times O_Y) = f^{-1}(p_X^{-1}(O_X) \cap p_Y^{-1}(O_Y)) = (f^{-1} \circ p_X^{-1}(O_X)) \cap (f^{-1} \circ p_Y^{-1}(O_Y))$ ce qui est ouvert par hypothèse.

Énoncé Indication

2.2 3) $X \times Y$ est séparé si et seulement si X et Y sont séparés. Le sous-espace $\{(x, y_0) \in X \times Y\}$ est pour un $y_0 \in Y$ fixé un sous-espace de $X \times Y$ homéomorphe à X . Or, tout sous-espace d'un séparé est séparé. Réciproquement, soient $a \neq b$ deux points de $X \times Y$. On a $p_X(a) \neq p_X(b)$ ou $p_Y(a) \neq p_Y(b)$; restreignons-nous au premier cas. Il existe par hypothèse O_1 et O_2 ouverts de X avec $p_X(a) \in O_1$, $p_X(b) \in O_2$ et $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Alors, $p_X^{-1}(O_1)$ et $p_X^{-1}(O_2)$ séparent a et b .

$X \times Y$ est connexe si et seulement si X et Y sont connexes. En effet, un critère pour la connexité est que toute fonction continue à valeurs discrètes est constante. Si $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ est continue, alors $f \circ p_X$ est continue, donc la connexité de $X \times Y$ implique celles de X et de Y . Supposons réciproquement l'existence d'une application continue $f : X \times Y \rightarrow \{0, 1\}$. La restriction de f à $X \times \{y\}$ est constante pour tout $y \in Y$, car $X \times \{y\}$ est un sous-espace de $X \times Y$ homéomorphe à X . De même la restriction de f à $\{x\} \times Y$ est constante pour tout $x \in X$. Il suffit de montrer que la valeur de f est toujours la même. Or, $f((x_0, y_0)) = f((x_1, y_0)) = f((x_1, y_1))$ pour tous $x_0, x_1 \in X$ et tous $y_0, y_1 \in Y$.

$X \times Y$ est compact si et seulement si X et Y sont compacts. En effet, d'après le paragraphe sur la séparation, on peut se restreindre à *quasi-compact*, i.e. tout recouvrement ouvert possède un sous-recouvrement fini. Étant donné un recouvrement ouvert $(O_i)_i$ de X , $(p_X^{-1}(O_i))_i$ est recouvrement ouvert de $X \times Y$, donc si $X \times Y$ est compact, on extrait un sous-recouvrement fini, et celui-là recouvre déjà X . Ainsi la compacité de $X \times Y$ implique celles de X et de Y . Soient réciproquement X et Y compacts, et $(O_i)_i$ un recouvrement ouvert de

$X \times Y$. Pour tout $(x, y) \in X \times Y$, il existe un $i_{(x,y)}$ avec $(x, y) \in O_{i_{(x,y)}}$ et il existe des ouverts $U_{(x,y)} \subset X$ et $V_{(x,y)} \subset Y$ avec $U_{(x,y)} \times V_{(x,y)} \subset O_{i_{(x,y)}}$. Pour un x fixé, $(V_{(x,y)})_{y \in Y}$ est un recouvrement ouvert de Y , par hypothèse il existe donc $y_1(x), \dots, y_{r_x}(x)$ avec $Y = \bigcup_{i=1}^{r_x} V_{(x,y_i(x))}$. Soit donc $U_x = V_{(x,y_1)} \cap \dots \cap V_{(x,y_{r_x})}$. La compacité de X implique à son tour qu'il existe x_1, \dots, x_n avec $X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$. Les ouverts $O_{i_{(x_i,y_j(x_i))}}$ pour $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, r_{x_i}$ recouvrent alors $X \times Y$.

Énoncé Indication

2.3. Corrigé exercice. — 1) Un exemple typique d'une application continue bijective qui n'est pas un homéomorphisme sur son image est l'application $\exp : [0, 1[\rightarrow S^1$ donnée par $t \mapsto \exp(2\pi it)$. En effet, \exp n'est pas un homéomorphisme, puisque S^1 est compact (en tant qu'image du compact $[0, 1]$), pendant que $[0, 1[$ n'est pas compact (le recouvrement ouvert $\{[0, 1 - \frac{1}{n}]_{n \in \mathbb{N}}[$ ne permet d'extraire un sous-recouvrement fini).

Énoncé Indication

2.3 2) Un sous-espace d'un espace topologique séparé est séparé (on intersecte les ouverts séparant deux points dans l'espace ambiant avec le sous-espace), ainsi le sous-espace $f(X) \subset Y$ est séparé. Soient $x_1 \neq x_2 \in X$. Puisque f est injective, $f(x_1) \neq f(x_2)$, et on peut les séparer par des ouverts disjoints O_1 et O_2 . $f^{-1}(O_1)$ et $f^{-1}(O_2)$ sont alors deux ouverts disjoints séparant x_1 et x_2 .

Énoncé Indication

2.3 3) Il faut montrer que l'application continue bijective $f : X \rightarrow f(X)$ est un homéomorphisme, i.e. qu'elle est une application ouverte. Soit donc O un ouvert de X , i.e. $X \setminus O =: F$ est fermé dans l'espace compact X , ainsi F est compact. Mais l'image continue d'un quasi-compact est quasi-compact, ainsi $f(F)$ est quasi-compact, et ceci dans l'espace séparé Y , donc finalement $f(F)$ est compact. Or, un sous-espace compact dans un espace séparé est fermé, donc $f(F)$ est fermé. En conclusion, $f(O) = f(X \setminus F) = f(X) \setminus f(F)$ (où on a utilisé que f est injective) est ouvert.

Énoncé Indication

2.3 4) La propriété que l'on veut montrer est une propriété locale (à savoir que l'application $f : X \rightarrow f(X)$ est ouverte), donc étant donné $x \in X$, il suffit de montrer que l'image $f(O)$ d'un voisinage ouvert O de x est un

voisinage ouvert de $f(x)$. Pour cela, on peut se restreindre (quitte à intersecter O avec l'ouvert $f^{-1}(\overset{\circ}{K})$) à un voisinage O tel que $f(O) \subset K$ où K est un voisinage compact de $f(x)$. Or, $f^{-1}(K)$ est compact par hypothèse, donc $f : f^{-1}(K) \rightarrow K$ vérifie exactement les hypothèses de 2.3 3) (remarquer qu'un espace localement compact est toujours séparé!), et par suite, $f(O)$ est ouvert et f un homéomorphisme.

Énoncé Indication

2.4. Corrigé exercice. — 1) On peut prendre le même exemple que pour 2.3 1).

Énoncé Indication

2.4 2) Même preuve que 2.3 3).

Énoncé Indication

2.4 3) Un homéomorphisme local $f : X \rightarrow Y$ est toujours une application ouverte : en effet, la propriété que l'on veut montrer est une propriété locale, donc étant donné $x \in X$, il suffit de montrer que l'image $f(O)$ d'un voisinage ouvert O de x est un voisinage ouvert de $f(x)$. Or, quitte à intersecter O avec un voisinage ouvert U de x tel que $f(U)$ est ouvert et $f : U \rightarrow f(U)$ est un homéomorphisme, ceci est évident. Prenons donc comme exemple d'un homéomorphisme local $\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $t \mapsto \exp(2\pi it)$ (un revêtement est toujours un homéomorphisme local), et comme sous-espace $A =]0, 1]$. Si $f|_A$ était un homéomorphisme local, alors $f|_A$ serait ouverte, mais l'image $f|_A(] \frac{1}{2}, 1])$ de l'ouvert $] \frac{1}{2}, 1] \subset]0, 1]$ n'est pas un ouvert de S^1 (elle ne contient pas l'arc de cercle ouvert autour de $1 \in S^1$).

Énoncé Indication

2.4 4a) Il faut montrer que pour tout $x \in f^{-1}(y)$, il existe un voisinage ouvert $O \subset X$ tel que $O \cap f^{-1}(y) = \{x\}$. Pour cela, il suffit de prendre un voisinage ouvert O tel que $f(O)$ soit ouvert et tel que $f : O \rightarrow f(O)$ soit un homéomorphisme, i.e. on n'utilise que la propriété "homéomorphisme local". Remarquons que $\{f(x)\} \subset Y$ est fermé grâce à l'homéomorphisme local et à la séparation de X . Maintenant, supposons que $f^{-1}(y)$ n'est pas fini. $f^{-1}(y)$ est un fermé d'un compact, donc compact. (Supposons pour la suite $y \in f(X)$.) Alors tout choix de voisinages ouverts des $x \in f^{-1}(y)$ est un recouvrement ouvert de $f^{-1}(y)$ dont on doit pouvoir extraire un sous-recouvrement fini, i.e. il existe au moins un $x \in f^{-1}(y)$ dont tout voisinage ouvert contient une

infinité de points de f^{-1} . Ceci est en contradiction avec l'existence du voisinage ouvert O tel que $O \cap f^{-1}(y) = \{x\}$.

Énoncé Indication

2.4 4b) L'image $f(X) \subset Y$ est fermée, puisque X est compact et Y séparé. Or, l'image $f(X) \subset Y$ est aussi ouverte, puisque un homéomorphisme local est une application ouverte (voir 2.4 3)). Ainsi, $f(X) \subset Y$ est une composante connexe, mais puisque Y est connexe, on a $f(X) = Y$, i.e. que f est surjective.

Énoncé Indication

2.5. Corrigé exercice. — 1a) La *topologie quotient* sur E est donnée par : $O \subset E$ est ouvert si et seulement si $\pi^{-1}(O) \subset [0, 1]$ est ouvert, où on a noté $\pi : X = [0, 1] \rightarrow E = X / \sim$ la projection. Cette topologie vérifie la propriété universelle suivante : étant donné une application continue $\phi : [0, 1] \rightarrow Y$ à valeurs dans un espace topologique Y telle que ϕ soit constante sur les classes de la relation d'équivalence, i.e. ici telle que $\phi(0) = \phi(1)$, alors il existe une unique application continue $\bar{\phi} : E = [0, 1] / \sim \rightarrow Y$ telle que $\bar{\phi} \circ \pi = \phi$. Pour la suite, regardons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] & \xrightarrow{i} & \mathbb{R} \\ \downarrow \pi & & \downarrow p \\ E & \xrightarrow{\bar{\phi}} & S^1 \end{array}$$

Ici, $i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est l'inclusion, $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ est l'application donnée par $p(t) = \exp(2\pi it)$, et l'application continue $\bar{\phi}$ existe par propriété universelle de la topologie quotient, appliquée à $\phi = p \circ i$. L'application $\bar{\phi}$ est injective, et une injection continue dans un espace séparé suffit pour déduire la séparation (en effet, deux ouverts séparants les images de deux points différents se retirent en ouverts séparants), ainsi E est séparé (le cercle S^1 est vu ici comme sous-espace de \mathbb{C} , donc séparé). En plus, E est image du compact $[0, 1]$, donc quasi-compact, et finalement compact.

Énoncé Indication

2.5 1b) Nous utilisons le critère 2.3 3) dont les hypothèses sont vérifiées. L'application $\bar{\phi} : E \rightarrow S^1$ est donc un homéomorphisme sur son image, mais $\bar{\phi}$ est surjective, d'où l'assertion. Pour être exact, on aurait dû identifier $S^1 \subset \mathbb{R}^2$

avec $[0, 2\pi] / 0 \sim 2\pi$, mais il est clair que S^1 est par ailleurs homéomorphe à un cercle de circonférence égale à 1.

Énoncé Indication

2.5 2) Puisque la topologie considérée sur Y est la topologie quotient par rapport à f , $O \subset Y$ est ouvert si et seulement si $f^{-1}(O) \subset X$ est ouvert. Donc aussi $F \subset Y$ est fermé si et seulement si $f^{-1}(F) \subset X$ est fermé. Donc, si f est une application fermée, $f(A) \subset Y$ est fermé, i.e. $f^{-1}(f(A)) \subset X$ est fermé. Réciproquement, soit $f^{-1}(f(A)) \subset X$ fermé pour tout fermé $A \subset X$. Il faut montrer que $f(A) \subset Y$ est fermé, i.e. $f^{-1}(f(A)) \subset X$ doit être fermé, ce qui est le cas. 2.5 2b) se montre à l'aide d'un raisonnement analogue.

Énoncé Indication

2.6. Corrigé exercice. — **2.6 1)** Supposons le contraire, i.e. que \mathbb{R} / \mathcal{R} est séparé. Par abus de notation, nous allons noter les éléments de \mathbb{R} / \mathcal{R} encore x ou y , et nous allons les appeler des réels, confondant ainsi les classes elles-mêmes et des représentants de classes d'équivalence. Alors pour tout couple de réels $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il existe des voisinages ouverts disjoints O_x et O_y les séparants dans le quotient. $O_x \subset \mathbb{R} / \mathcal{R}$ est ouvert, i.e. $\pi^{-1}(O_x)$ est un ouvert de \mathbb{R} , où on a noté $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / \mathcal{R}$ la projection. Il existe $\epsilon > 0$ tel que la boule $B_\epsilon(x)$ de rayon ϵ autour de x soit contenue dans $\pi^{-1}(O_x)$. De même, il existe $\delta > 0$ tel que la boule $B_\delta(y)$ de rayon δ autour de y soit contenue dans $\pi^{-1}(O_y)$. On va provoquer une contradiction en montrant que O_x et O_y ne sont pas disjoints, i.e. en montrant qu'il existe $z_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, avec $z_1 \mathcal{R} z_2$ et $z_1 \in B_\epsilon(x)$ et $z_2 \in B_\delta(y)$. Pour cela, il suffit de choisir $z_1 \in B_\epsilon(x)$ et $z_2 \in B_\delta(y)$ tels que la distance entre z_1 et z_2 soit rationnelle. Concrètement, restreignons-nous au cas où $x = 0$, le cas général étant analogue. Si $|y| \in \mathbb{Q}$, il suffit de prendre $z_1 = x$ et $z_2 = y$. Sinon, strictement compris entre y et $y - \delta$, il existe un rationnel z_2 par densité de $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, et $x = z_1$ et z_2 conviennent.

Énoncé Indication

2.6 2a) Supposons que X / \mathcal{R} est séparé. Il faut montrer que $\{(x, y) \in X \times X \mid x \mathcal{R} y\} \subset X \times X$ est fermé. Montrons que le complémentaire est ouvert. Soit $(x, y) \in ((X \times X) \setminus \{(x, y) \in X \times X \mid x \mathcal{R} y\})$, i.e. x et y définissent deux points différents dans le quotient X / \mathcal{R} , et il existe par hypothèse des ouverts disjoints O_x et O_y de X / \mathcal{R} les séparants. Le fait que O_x et O_y soient disjoints

implique que $q^{-1}(O_x) \times q^{-1}(O_y)$ est un voisinage de $(x, y) \in X \times X$ avec

$$q^{-1}(O_x) \times q^{-1}(O_y) \subset ((X \times X) \setminus \{(x, y) \in X \times X \mid x\mathcal{R}y\}),$$

ainsi le complémentaire de $\{(x, y) \in X \times X \mid x\mathcal{R}y\}$ dans $X \times X$ est ouvert. Supposons réciproquement que le complémentaire de $\{(x, y) \in X \times X \mid x\mathcal{R}y\}$ dans $X \times X$ est ouvert. Un ouvert élémentaire autour de $(x, y) \in ((X \times X) \setminus \{(x, y) \in X \times X \mid x\mathcal{R}y\})$ est du type $O_x \times O_y$, et $q(O_x)$ et $q(O_y)$ sont des ouverts (q ouverte!) disjoints séparant x et y dans le quotient (i.e. séparant $q(x)$ et $q(y)$).

Énoncé Indication

2.6 2b) Par hypothèse, les classes d'équivalence sont fermées (cf 2.5 2a)). Notons C_1 et C_2 deux telles classes disjointes. C_1 et C_2 correspondent à deux points distincts x_1 et x_2 de X/\mathcal{R} . Or, un espace compact est *normal*, i.e. les deux fermés disjoints C_1 et C_2 peuvent être séparés par des ouverts disjoints, ou encore en passant aux complémentaires, il existe deux fermés F_1 et F_2 avec $C_1 \subset (X \setminus F_1)$, $C_2 \subset (X \setminus F_2)$ et $F_1 \cup F_2 = X$. q étant fermée, $q(F_1)$ et $q(F_2)$ sont encore deux fermés avec $x_1 \notin q(F_1)$, $x_2 \notin q(F_2)$ et $q(F_1) \cup q(F_2) = X/\mathcal{R}$, ce qui équivaut à la séparation de X/\mathcal{R} . Soit réciproquement X/\mathcal{R} séparé et $A \subset X$ un fermé. Il suffit de montrer (par 2.5 2a)) que $q^{-1}(q(A)) \subset X$ est fermé. Or, $A \subset X$ est compact, et l'image continue d'un compact est compact, donc fermé dans un espace séparé, i.e. l'hypothèse implique que $q(A)$ est un fermé de X/\mathcal{R} . Puisque q est continue, $q^{-1}(q(A)) \subset X$ est fermé.

Énoncé Indication

2.6 c1) Par la propriété universelle de la topologie quotient (cf 2.5 1a)), une application continue $f : X \rightarrow Y$ se factorise par X/A si f est constante sur A , i.e. $f(x) = f(y)$ pour tous $x, y \in A$. Réciproquement, si f factorise par X/A , f est constante sur A .

Énoncé Indication

2.6 c2) Par 2.6 2b) et 2.5 2a), il suffit de montrer que pour tout $F \subset X$ fermé, le saturé $q^{-1}(q(F)) \subset X$ est fermé. Si $F \cap A = \emptyset$, ceci est clair. Sinon, $q^{-1}(q(F)) = A \cup F$ ce qui est fermé si A l'est. Réciproquement, $A = q^{-1}(x)$ pour un point $x \in X/\mathcal{R}$, et puisque X/\mathcal{R} est séparé, l'ensemble $\{x\} \subset X/\mathcal{R}$ est fermé, ce qui montre que A est fermé.

Énoncé Indication

2.6 c3) Il suffit de prendre $A = \{0, 1\} \subset [0, 1]$ qui est bien un sous-espace fermé. X/A est alors séparé, et donc compact, car image continue d'un compact.

Énoncé Indication

2.6 c4) $A = S^{n-1} \subset D^n$ (le sous-espace de la sphère unité dans la boule unité compacte de dimension n) est un sous-espace fermé (une suite convergente de vecteurs de norme 1 a comme limite un vecteur de norme 1), et par ce qui précède, D^n/S^{n-1} est un espace topologique compact. Le premier cas qu'on a traité était celui de 2.5 1), i.e. le cas $S^0 \subset D^1$, et le résultat était S^1 . De même, D^2/S^1 est homéomorphe à S^2 . Représentons-nous d'abord sur D^2 un cône $C^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Clairement, $D^2 \cup C^2$ est homéomorphe à S^2 par un homéomorphisme ϕ . Or, D^2/S^1 est homéomorphe à $(D^2 \cup C^2)/(S^1 \cup C^2)$, et ce dernier espace est encore homéomorphe à S^2 ; il suffit de réduire l'image de $S^1 \cup C^2$ sous ϕ à un point. Je laisse au lecteur de rendre ces instructions précises et concrètes. On fait de même pour $D^n/S^{n-1} \cong S^n$.

Énoncé Indication

2.7. Corrigé exercice. — 1) Si $]x, y[$ et $]y, z[$ sont des ouverts, alors leur intersection $]x, y[\cap]y, z[= \{y\}$ l'est aussi. Ainsi, tous les ensembles à un point sont ouverts. En conclusion, la topologie en question est la topologie discrète.

Énoncé Indication

2.7 2) Il est bien connu (et un bon exercice de le montrer!) que les ouverts de $[0, 1]$ sont des réunions d'intervalles ouverts disjoints contenus dans $[0, 1]$. Si $F = \{x_1, \dots, x_r\}$, alors tout ouvert de $F \times [0, 1]$ est une réunion de $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\} \times I$ où I est un intervalle ouvert contenu dans $[0, 1]$.

Énoncé Indication

2.8. Corrigé exercice. — 1a) Notons $q : X \rightarrow X/G$. Le saturé d'un ouvert $O \subset X$ est l'ensemble $q^{-1}(q(O)) = \bigcup_{x \in O} G \cdot x = \bigcup_{g \in G} g \cdot O$. Or, G agit par homéomorphismes, donc $g \cdot O$ est un ouvert, et $q^{-1}(q(O))$ est une réunion d'ouverts. Par 2.5 2b), q est une application ouverte. Énoncé Indication

2.8 1b) Le saturé d'un fermé $F \subset X$ est $q^{-1}(q(F)) = \bigcup_{x \in F} G \cdot x = \bigcup_{g \in G} g \cdot F$, et $g \cdot F$ est un fermé, donc la réunion finie $\bigcup_{g \in G} g \cdot F$ est un fermé, et $q^{-1}(q(F))$ est fermé. Par 2.5 2a), q est une application fermée.

Énoncé Indication

2.9. Corrigé exercice. — 1) L'inverse de la translation à gauche $h \mapsto gh$ par $g \in G$ est la translation à gauche par $g^{-1} \in G$. On déduit directement des axiomes que $h \mapsto gh$ est continue, mais aussi que $h \mapsto g^{-1}h$ l'est, donc $h \mapsto gh$ est un homéomorphisme. De même, la translation à droite est un homéomorphisme. La conjugaison est simplement la composée de la translation à gauche par g et celle à droite par g^{-1} , d'où l'assertion.

Énoncé Indication

2.9 2) Soit $H < G$ un sous-groupe, et soit $g \in \bar{H}$ un élément de son adhérence. $x \mapsto gx$ est un homéomorphisme de \bar{H} sur un fermé F qui contient H . Si F n'était pas minimal, alors il existerait un $g^{-1}F$ strictement contenu entre H et \bar{H} , ce qui est impossible. Donc $x \mapsto gx$ envoie \bar{H} sur \bar{H} . De même, l'inversion laisse stable \bar{H} , et par suite, \bar{H} est un sous-groupe, le plus petit sous-groupe fermé contenant H . Le fait que \bar{H} est un sous-groupe distingué si H l'est se déduit comme auparavant en utilisant l'homéomorphisme conjugaison.

Énoncé Indication

2.9 3) G/H est séparé si et seulement si le graphe de la relation $x \sim y :\Leftrightarrow xy^{-1} \in H$ est un fermé de $G \times G$ par 2.6 2a), parce que $q : G \rightarrow G/H$ est ouverte grâce à 2.8 1a). Or, le graphe de la relation d'équivalence $\text{gr}(\mathcal{R}) = \{(x, y) \in G \times G \mid xy^{-1} \in H\}$ est simplement $\text{gr}(\mathcal{R}) = \phi^{-1}(H)$ pour l'application continue $\phi : G \times G \rightarrow G$ donnée par $(x, y) \mapsto xy^{-1}$. Ainsi le graphe est un fermé, et G/H est séparé. Si $H < G$ est distingué, alors G/H est un groupe. Il faut montrer que l'application $\bar{\mu} : G/H \times G/H \rightarrow G/H$ donnée par $\bar{\mu}(xH, yH) = xyH$ est continue. Soit $OH \subset G/H$ un ouvert, i.e. $O \cdot H \subset G$ est ouvert. $\bar{\mu}^{-1}(OH) = \{(xH, yH) \in G/H \times G/H \mid xy \in O\}$. $\mu^{-1}(O \cdot H) = \{(x, y) \in G \times G \mid xy \in O \cdot H\}$ est un ouvert de $G \times G$ par hypothèse, donc $(x, y) \in \mu^{-1}(O \cdot H)$ possède un voisinage ouvert $O_x \times O_y$ avec $O_x \times O_y \subset \mu^{-1}(O \cdot H)$. $O_x H \times O_y H = q(O_x) \times q(O_y)$ est alors un voisinage ouvert de (xH, yH) dans $\bar{\mu}^{-1}(OH)$. L'inversion $G \rightarrow G$ donnée par $g \mapsto g^{-1}$ est continue par hypothèse, donc la composée $G \rightarrow G \rightarrow G/H$ l'est. Or, elle est constante sur $H \subset G$, donc par la propriété universelle du quotient, elle factorise en l'inversion $G/H \rightarrow G/H$ qui est donc continue. En conclusion, G/H est un groupe topologique séparé.

2.9 4a) $Gl(n, \mathbb{K})$ est le complémentaire du fermé $\det^{-1}(\{0\})$, donc ouvert.

2.9 4b) Montrons déjà que la multiplication de matrices $M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ est continue. En effet, l'espace d'arrivé est un produit topologique et en chaque composante, l'application est donnée par une somme finie de produits. Puisque somme et produit comme applications $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ sont continues, la multiplication des matrices l'est. Maintenant, la restriction de la multiplication à l'ouvert $Gl(n, \mathbb{K}) \times Gl(n, \mathbb{K}) \subset M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K})$ est aussi continue. Puisque l'inverse est donné par $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Adj}(A)$ où $\text{Adj}(A)$ est la transposée de la comatrice, on voit que l'inversion est continue (le déterminant est polynomial, donc continu, donc la comatrice dépend continûment de la matrice, et ainsi aussi l'inverse). En conclusion, $Gl(n, \mathbb{K})$ est un groupe topologique.

Énoncé Indication

2.9 4c) $U(n) = \{U \in Gl(n, \mathbb{C}) \mid U^* = U^{-1}\}$. Or, les deux opérations $A \mapsto A^*$ et $A \mapsto A^{-1}$ sont continues, donc si on a une suite de $U_k \in U(n)$ qui converge dans $Gl(n, \mathbb{C})$ (ou dans $M_n(\mathbb{C})$!), alors la limite est encore dans $U(n)$, i.e. $U(n)$ est un sous-groupe fermé de $Gl(n, \mathbb{C})$. $SU(n)$ est simplement l'intersection du fermé $U(n)$ avec le fermé $\det^{-1}(\{1\})$, donc aussi fermé. On raisonne de façon similaire pour $O(n)$ et $SO(n)$.

Énoncé Indication

2.9 4d) Pour montrer que $O(n)$ est compact, il suffit de montrer que la norme d'opérateur d'un $O \in O(n)$ est bornée (car les fermés bornés dans $M_n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n^2}$ sont exactement les compacts). Or,

$$\|O\| := \sup_{x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq 1} |O(x)|^2 = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq 1} \langle O(x), O(x) \rangle = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq 1} \langle x, x \rangle = 1.$$

Ceci montre donc que $O(n)$ est compact.

Énoncé Indication

2.9 4e) En effet, l'homomorphisme surjectif déterminant $\det : Gl(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^*$ a comme noyau $Sl(n, \mathbb{C})$, mais la suite exacte courte de groupes

$$1 \rightarrow Sl(n, \mathbb{C}) \rightarrow Gl(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^* \rightarrow 1$$

est scindé par $\mathbb{C}^* \rightarrow Gl(n, \mathbb{C}), \lambda \mapsto \text{diag}(1, \dots, 1, \lambda)$, donc $Gl(n, \mathbb{C})$ est le produit semi-direct $Sl(n, \mathbb{C}) \rtimes \mathbb{C}^*$. Le même raisonnement marche pour $U(n) = SU(n) \rtimes S^1$, et $O(n) = SO(n) \rtimes \{\pm 1\}$. L'isomorphisme entre $U(1)$ et $SO(2)$

(et S^1) est clair :

$$U(1) \rightarrow SO(2), \quad e^{2\pi i\theta} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Énoncé Indication

2.9 4f) On utilisera la forme canonique des éléments de $SU(n)$ et $SO(n)$ en remarquant qu'il suffit de montrer que tout élément admet un chemin continu à l'élément neutre. On fera la preuve pour $SO(n)$, celle pour $SU(n)$ étant analogue. Soit donc $A \in SO(n)$. Il existe $O \in O(n)$ tel que OAO^{-1} soit une matrice diagonale avec r -fois un 1 sur la diagonale, s -fois un -1 ($r+s = n-2t$), et t carrés de matrices 2×2 du type

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}.$$

Puisque $A \in SO(n)$, s est paire. Pour un couple de -1 sur la diagonale, on regarde le chemin de longueur π

$$\theta \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

de $1 \in SO(2)$ à $-1 \in SO(2)$. De même,

$$\theta \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

est un chemin de $1 \in SO(2)$ à

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$$

(de longueur θ_i). On peut renormaliser ces longueurs pour qu'elles soient toutes égales à 1 (quitte à parcourir les chemins avec une vitesse plus ou moins élevée). Ainsi, on arrive (en superposant les carrés correspondant aux différents chemins) à trouver un chemin $c : [0, 1] \rightarrow SO(n)$ qui joint 1 à OAO^{-1} . En conclusion, $t \mapsto O^{-1}c(t)O$ est un chemin de 1 à A .

Énoncé Indication

2.10. Corrigé exercice. — La réponse est "oui". En effet, A est évidemment une partie bornée de \mathbb{R} , et pour montrer qu'elle est compacte, il suffit de montrer qu'elle est fermée. Soit donc $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite

d'éléments de A qui converge dans \mathbb{R} et qu'on peut supposer non-constante (i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $k > n$ avec $a_k \neq a_n$). Puisque $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non-constante, mais convergente, elle ne peut converger que vers $0 \in A$, ainsi A est fermé.

Énoncé Indication

2.11. Corrigé exercice. — Il faut montrer que $f^{-1}(O)$ est ouvert pour un ouvert $O \subset Y$. $f^{-1}(O) = f^{-1}(O) \cap X = f^{-1}(O) \cap (O_1 \cup O_2) = (f^{-1}(O) \cap O_1) \cup (f^{-1}(O) \cap O_2) = f_1^{-1}(O) \cup f_2^{-1}(O)$ qui est ouvert par hypothèse. La preuve pour la construction à l'aide de fermés est analogue, une application $f : X \rightarrow Y$ étant continue si et seulement si $f^{-1}(F)$ est fermé pour tout fermé $F \subset Y$.

Énoncé

2.12. Corrigé exercice. — 1) La projection est ouverte par exercice 2.8 1a), puisqu'il s'agit d'un quotient par l'action du groupe multiplicatif \mathbb{R}^* .

2) Les couples $(v, \lambda v)$ avec v fixé, sont tous les vecteurs collinéaires à v , et $\text{gr}(\mathcal{R}) = \bigcup_{v,w \in X} \{(v, w) \mid v \wedge w = 0\}$ où $v \wedge w$ désigne le produit extérieur

$$\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \Lambda^2 \mathbb{R}^{n+1}, \quad (v, w) \mapsto v \wedge w.$$

Ici, pour un espace vectoriel V , $\Lambda^2 V$ désigne l'espace vectoriel quotient du produit tensoriel $V \otimes V$ par le sous-espace engendré par les éléments $x \otimes y + y \otimes x$ pour tout $x, y \in V$. Le produit extérieur est donc simplement la composée des deux passages au quotient $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \otimes \mathbb{R}^{n+1}$ et $\mathbb{R}^{n+1} \otimes \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \Lambda^2 \mathbb{R}^{n+1}$. Il est par construction antisymétrique (i.e. $x \wedge y = -y \wedge x$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$), bilinéaire (i.e. $x \wedge (y + z) = x \wedge y + x \wedge z$, $x \wedge (\lambda y) = (\lambda x) \wedge y$, et $(x + y) \wedge z = x \wedge z + y \wedge z$ pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}^{n+1}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$), et par suite nul si x et y sont linéairement dépendant. En tant que application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie, $\wedge : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \Lambda^2 \mathbb{R}^{n+1}$ est continue, donc sa restriction $\wedge : X \times X \rightarrow \Lambda^2 \mathbb{R}^{n+1}$ est continue. On a clairement $\wedge^{-1}(0) = \text{gr}(\mathcal{R})$, et ainsi $\text{gr}(\mathcal{R})$ est fermé.

Le reste du sous-exercice se déduit de 2.6 2a).

Énoncé Indication

3) On peut montrer que le quotient d'un espace séparé par l'action libre d'un groupe fini est séparé, mais ici, on peut s'en tirer sans montrer la séparation du quotient $\mathbb{S}^n / \mathcal{S}$. En effet, l'inclusion $i : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ induit un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \mathbb{S}^n / \mathcal{S} & \xrightarrow{\bar{i}} & \mathbb{R}P^n \end{array}$$

puisque i est clairement constante sur les classes d'équivalence de la relation \mathcal{R} . En plus, \bar{i} est injective, comme on le vérifie facilement. Mais une injection continue dans un espace séparé suffit pour montrer la séparation de la source, donc $\mathbb{S}^n / \mathcal{S}$ est compact (on utilise en plus qu'il est image continue d'un espace compact). En conclusion, \bar{i} est une bijection continue de l'espace compact $\mathbb{S}^n / \mathcal{S}$ sur l'espace séparé $\mathbb{R}P^n$, donc un homéomorphisme par 2.4 2).

Énoncé Indication

4) La sphère \mathbb{S}^n est localement connexe par arcs en tant que sous-espace de \mathbb{R}^{n+1} . Puisque $\pi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n / \mathcal{S}$ est un homéomorphisme local (comme on le vérifie facilement!), le quotient $\mathbb{S}^n / \mathcal{S} \approx \mathbb{R}P^n$ est encore localement connexe par arcs. Par ailleurs, \mathbb{S}^n est connexe pour $n \geq 1$ (cf exercice 2.1), donc son image, $\mathbb{R}P^n$, est connexe, et finalement connexe par arcs en utilisant l'exercice 2.1 3).

Énoncé Indication

5) Soit h un homéomorphisme qui identifie $[0, 1]^2$ avec l'hémisphère supérieur (fermé) de \mathbb{S}^2 . h induit un diagramme

$$\begin{array}{ccc} [0, 1]^2 & \xrightarrow{h} & \mathbb{S}^2 \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ [0, 1]^2 / \sim & \xrightarrow{\bar{h}} & \mathbb{R}P^2 \end{array}$$

Les identifications du carré $[0, 1]^2$ sont construites de telle manière que \bar{h} est une bijection continue. En utilisant 2.4 3) une fois de plus, on voit que \bar{h} est un homéomorphisme.

Énoncé

Indication

Chapitre II : Revêtements

c2

L'exponentielle complexe et ses propriétés topologiques

7.1. Définition. — L'exponentielle complexe est l'application $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$, aussi notée \exp , définie par la somme de la série convergente

$$f(z) = e^z := 1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

7.2. Proposition. — 1) $\exp : (\mathbb{C}, +) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$ est un morphisme de groupes ;

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2).$$

2) $\text{Ker}(\exp) = 2i\pi\mathbb{Z} =: P$ (le groupe des périodes).

7.3. Logarithme complexe. — Pour $u \in \mathbb{C}^*$, on définit la série

$$\log u := (u - 1) - \frac{(u - 1)^2}{2} + \frac{(u - 1)^3}{3} \dots;$$

elle converge sur le disque $D_1 = \{u \in \mathbb{C}^* \mid |u - 1| < 1\}$.

7.4. Proposition. — Pour $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$, on a la formule

$$\exp(\log(1 + z)) = 1 + z.$$

Démonstration. — Les deux séries formelles $S_1(w) = 1 + w + \frac{w^2}{2!} + \dots$

et $S_2(z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots$ sont composables car S_2 n'a pas de termes constants. Par ailleurs la formule de composition est bien connue pour z réel et elle implique que la série formelle composée vérifie

$$S_1 \circ S_2(z) = 1 + z.$$

Lorsque ces deux séries sont convergentes, on obtient alors la formule de composition des fonctions analytiques qu'elles définissent. \square

En particulier, pour $u \in D_1$, on a

$$\exp(\log u) = u.$$

7.5. Section locale. — La formule ci-dessus dit que \log est un *inverse à droite* pour \exp (c.-à-d. une *section*). Mais il n'est pas défini globalement sur \mathbb{C}^* , seulement sur D_1 ; on dit que \log est une *section locale*.

Pour $k \in \mathbb{Z}$, $D_1 \ni u \mapsto \log(u) + 2i\pi k$ est une autre section locale.

Soit $a = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$; posons $D_a := aD = \{u \in \mathbb{C}^* \mid \frac{u}{a} \in D_1\}$. Alors

$$(*) \quad u \in D_a \mapsto \log\left(\frac{u}{a}\right) + \log(\rho) + i\theta$$

est une section locale de l'exponentielle.

7.6. Proposition. — 1) *Tout $z_0 \in \mathbb{C}$ est dans l'image d'une section définie au voisinage de $\exp(z_0)$.*

2) *Deux sections distinctes définies sur le même ouvert connexe U de \mathbb{C}^* diffèrent d'une constante, élément de P , et sont d'images disjointes.*

Démonstration. — 1) Soit $z_0 = \log \rho + i\theta$, $a = \exp z_0 = \rho e^{i\theta}$. La formule (*) donne une section définie sur D_a passant par z_0 pour $u = a$.

2) Soit $g_0, g_1 : U \rightarrow \mathbb{C}$ deux sections. On a $\exp(g_0(u) - g_1(u)) = \frac{u}{u} = 1$. Donc $g_0(u) - g_1(u) \in P$. Comme P est discret pour la topologie induite de \mathbb{C} , que $g_0 - g_1$ est continue et que U est connexe, $g_0 - g_1$ est une constante non nulle. Si les images se rencontrent, il existe u_0 et u_1 tels que $g_0(u_0) = g_1(u_1)$. Comme g_0 et g_1 sont des sections, $u_0 = u_1$ et alors la constante ci-dessus est nulle. \square

7.7. Proposition. — *Pour tout $a \in \mathbb{C}^*$, il existe un voisinage ouvert V de a et un homéomorphisme $h : V \times f^{-1}(\{a\}) \rightarrow f^{-1}(V)$ (où $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ est l'exponentielle complexe) qui fait commuter le diagramme ci-dessous.*

$$\begin{array}{ccc} V \times f^{-1}(\{a\}) & \xrightarrow{h} & f^{-1}(V) \\ \downarrow \text{proj.} & & \downarrow f \\ V & \xrightarrow{\text{Id}} & V \end{array}$$

Noter que $f^{-1}(\{a\})$ est discret, puisque $z_1, z_2 \in f^{-1}(\{a\})$ implique $z_1 - z_2 \in P$.

Démonstration de la proposition. — On prend $V = D_a$. Soit g une section définie sur D_a . On définit $h(u, \alpha) = g(u) + (\alpha - g(a))$. C'est un

homéomorphisme d'application réciproque

$$f^{-1}(V) \ni z \mapsto \begin{cases} u & = & f(z) = \exp(z) \\ \alpha & = & \underbrace{z - g(u)}_{\in P} + \underbrace{g(a)}_{\in f^{-1}(\{a\})} \end{cases}$$

□

8. Revêtements, premiers exemples

8.1. Définitions. — 1) Un *revêtement* est la donnée triple (X, p, B) , où X (*espace total*) et B (*base*) sont deux espaces topologiques et où $p : X \rightarrow B$ (*projection*) est continue et vérifie les axiomes suivants :

(i) Pour tout $b \in B$, $F_b := p^{-1}(b)$ (la *fibres* de p en b) est discret pour la topologie induite de X .

(ii) Pour tout $b \in B$, il existe un voisinage ouvert U_b de b dans B et un homéomorphisme rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} U_b \times F_b & \xrightarrow{h} & p^{-1}(U_b) \\ & \searrow \text{proj.} & \swarrow p \\ & & U_b \end{array}$$

On dit que U_b est un *ouvert trivialisant*.

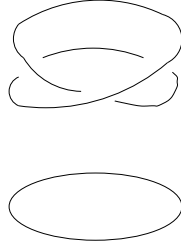
2) On dit que deux revêtements (X_1, p_1, B) et (X_2, p_2, B) de base B sont *isomorphes* s'il existe un homéomorphisme $h : X_1 \rightarrow X_2$ tel que $p_2 \circ h = p_1$.

8.2. Exemples. — 1) F un espace discret, $X = B \times F$ et $p = \text{proj}_B$. On dit que le revêtement est *trivial*. Tout revêtement isomorphe à un revêtement trivial est aussi dit trivial.

2) $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$, $z \mapsto e^z$

3) $\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $x \mapsto e^{ix}$

4) $X = S^1 \subset \mathbb{C}$, $B = S^1$ et $p(z) = z^2$.



Remarque. — Noter : $\mathbb{R} \not\cong S^1 \times \{\text{discret}\}$. Donc les exemples 2), 3), 4) ci-dessus sont des revêtements non-triviaux.

8.3. Proposition. — 1) p est un homéomorphisme local; en particulier, p est ouverte.

2) Si B est séparé et X compact, et si p un homéomorphisme local, alors p est un revêtement et ses fibres sont finies.

Démonstration. — 1) Cela résulte de la définition car $\text{proj} : U_b \times \{\text{discret}\} \rightarrow U_b$ est un homéomorphisme local.

2) Tout singleton $\{b\}$ est fermé dans B . Donc $p^{-1}(b)$ est compact. Comme p est un homéomorphisme local, $p^{-1}(b)$ est discret et un espace compact discret est fini.

Soit $\{x_1, \dots, x_l\} = p^{-1}(b)$. Pour chaque $k \in \{1, \dots, l\}$, il existe des voisinages ouverts V_k de x_k dans X et U_k de b dans B tels que $p|_{V_k}$ soit un homéomorphisme local sur U_k .

(Fin de la preuve en supposant B métrisable). Soit B_n la boule fermée centrée en b de rayon $\frac{1}{n}$. La préimage $p^{-1}(B_n)$ est fermée. Soit $F_n = p^{-1}(B_n) \cap (X \setminus \bigcup_k V_k)$; c'est un fermé dans le compact $X' = X \setminus \bigcup_k V_k$. On a $\bigcap_n F_n = p^{-1}(b) \cap X' = \emptyset$. Donc il existe n_0 tel que $B_{n_0} \subset U_k$ pour tout $k \in \{1, \dots, l\}$ et $p^{-1}(B_{n_0}) \subset V_1 \cup \dots \cup V_l$.

Soit $W_k = p^{-1}(\text{int}(B_{n_0})) \cap V_k$. On a $p^{-1}(\text{int}(B_{n_0})) = W_1 \cup \dots \cup W_l$. De plus $p|_{W_k}$ est un homéomorphisme sur $\text{int}(B_{n_0})$ car $p|_{V_k}$ est un homéomorphisme sur U_k . Donc $\text{int}(B_{n_0})$ est un ouvert trivialisant pour p . Comme tout $b \in B$ admet un ouvert trivialisant, p est un revêtement. \square

8.4. Remarques. — 1) $p(X)$ est ouvert et compact; c'est une réunion de composantes connexes. Il peut y avoir d'autres composantes connexes de B sur lesquelles la fibre est vide.

2) La deuxième assertion de la proposition précédente est vraie dans le cadre

plus général d'un homéomorphisme local qui est une application *propre* (c.-à-d. la préimage de tout compact du but est compacte) d'un espace localement compact à valeurs dans un espace séparé.

En revanche, sans l'hypothèse de propriété, l'assertion n'est plus vraie. Prendre par exemple pour X un ouvert strict de B et pour p l'injection de X dans B ; si b appartient à la frontière de X dans B , b n'a pas de voisinage ouvert trivialisant.

8.5. Théorème. — *Soit G un groupe agissant continûment sur l'espace topologique X . On suppose que l'action vérifie la condition (L)⁽³⁾ suivante :*

(L) *Pour tout $x \in X$ il existe V_x , voisinage de x , tel que $gV_x \cap V_x = \emptyset$ pour tout $g \neq e$; en particulier, l'action est libre.*

Alors $p : X \rightarrow G \backslash X$ est un revêtement.

Démonstration. — Soit $x_0 \in X$, $b = p(x_0)$. Soit V un voisinage ouvert de x_0 vérifiant (L). Soit $U = p(V)$; c'est un ouvert du quotient car la projection p est ouverte (3.4). La restriction $p|_V : V \rightarrow U$ est un homéomorphisme car c'est une bijection continue qui est ouverte. Soit s l'homéomorphisme réciproque; $s(b_0) = x_0$.

Affirmation : U est un ouvert trivialisant pour p .

On a $p^{-1}(b_0) = Gx_0$ et $p^{-1}(U) = GV$. Soit $h : U \times (Gx_0) \rightarrow p^{-1}(U)$ l'application définie par $(b, g \cdot x_0) \mapsto g \cdot s(b)$. Il est évident que h est bijectif, continu, et commute avec les projections sur U . Voyons que h est une application ouverte; il suffit de le faire pour la restriction de h à un ouvert du type $U \times \{g_0 \cdot x_0\}$. Mais $s : U \rightarrow V$ et $g_0 : V \rightarrow g_0V$ sont deux homéomorphismes. Cela donne la conclusion. \square

8.6. Exemple. — $X = \mathbb{R}^2$, $G = \mathbb{Z}^2$ agissant par translation. Le quotient est le tore de dimension 2, noté T^2 . La condition (L) est satisfaite en prenant pour V_x la boule centrée en x de rayon $1/4$. D'après le théorème précédent $X \rightarrow G \backslash X$ est un revêtement.

⁽³⁾On dit parfois que l'action est proprement discontinue, ou même, par abus de langage, que le groupe est proprement discontinu.

9. Le revêtement induit

À partir d'un revêtement, on peut en déduire beaucoup d'autres par des opérations simples. L'*induction* en est une.

9.1. Construction du revêtement induit.— On se donne :

- i) un revêtement $q : Y \rightarrow B$,
- ii) une application continue $f : A \rightarrow B$.

Construction. Soit $X \subset A \times Y$, $X = \{(a, y) \in A \times Y \mid f(a) = q(y)\}$. Soit $p = \text{proj}_A|_X$ et $\pi = \text{proj}_Y|_X$. Le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi} & Y \\ \downarrow p & & \downarrow q \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

9.2. Proposition. — L'application $p : X \rightarrow A$ (ou le triple (X, p, A)) est un revêtement, qui est noté $f^*(Y, q, B)$

Démonstration. — Soit $a \in A$, $b = f(a)$. La fibre en a de p est $\{a\} \times q^{-1}(b)$, partie discrète de X en bijection via π avec $q^{-1}(b)$. Soit V un ouvert trivialisant de q et $h : V \times q^{-1}(b) \rightarrow q^{-1}(V)$ une trivialisant.

Affirmation : $f^{-1}(V)$ est un ouvert trivialisant de p .

En effet, soit $U = f^{-1}(V)$. On a $p^{-1}(U) = \pi^{-1}(q^{-1}(V))$. Pour $x \in p^{-1}(U)$, on définit $k(x) \in U \times p^{-1}(a)$ par $k(x) = (p(x), h^{-1} \circ \pi(x))$.

Pour $(z, \alpha) \in U \times p^{-1}(a)$, on définit $k'(z, \alpha) \in p^{-1}(U)$ par $k'(z, \alpha) = (z, h(f(z), \alpha)) \in U \times q^{-1}(V) \subset X \times Y$. On a $k'(z, \alpha) \in X$ car $f(z) = q \circ h(f(z), \alpha)$. On vérifie sans peine que k et k' sont continues et inverses l'une de l'autre. \square

Exemple. — Soit $A \subset B$ et f l'inclusion. Si $q : Y \rightarrow B$ est un revêtement, on a un revêtement induit par l'inclusion.

Par exemple, si l'on considère $\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $t \mapsto e^{2i\pi t}$, et si $A = S^1 \setminus \{-1\}$, le revêtement induit est trivial. Exercice : construire une trivialisant de ce revêtement induit. [On pourra étendre la fonction logarithme à $S^1 \setminus \{-1\}$.]

9.1. Exercice. — Soit $f : A \rightarrow B$ un revêtement. Montrer que le revêtement induit $f^*(A, f, B)$ par f au-dessus de A possède une section globale.

10. Théorème fondamental des revêtements : le relèvement des chemins

10.1. Définition. — Un *chemin* dans X est une application $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ continue.

10.2. Théorème. — Soit $p : X \rightarrow B$ un revêtement. Soit $x_0 \in X$ et $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ un chemin d'origine $\gamma(0) = x_0$. Alors il existe un unique chemin $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow X$ tel que $p \circ \tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$ (on dit que $\tilde{\gamma}$ relève γ) et $\tilde{\gamma}(0) = x_0$.

Démonstration. — Soit $\mathcal{R} = \{V_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert trivialisant p . Soit $\mathcal{R}' = \{\gamma^{-1}(V_i)\}_{i \in I}$ le recouvrement de $[0, 1]$ induit par γ . Par le lemme ε de Lebesgue (4.2), il existe une subdivision de $[0, 1]$, $0 = t_0, t_1, \dots, t_n = 1$, telle que $\gamma([t_k, t_{k+1}])$ soit contenu dans l'un des V_i . Supposons $\tilde{\gamma}$ déjà construit sur $[0, t_k]$. Soit $b_i \in V_i$ et $h : V_i \times p^{-1}(b_i) \rightarrow p^{-1}(V_i)$ une trivialisant; alors $h^{-1}(\tilde{\gamma}(t_k))$ s'écrit $(\gamma(t_k), \alpha_k)$ avec $\alpha_k \in p^{-1}(b_i)$. Pour $t \in [t_k, t_{k+1}]$, on pose $\tilde{\gamma}(t) = h(\gamma(t), \alpha_k)$. L'unicité en résulte en même temps car $p^{-1}(b_i)$ étant discret une application continue d'un intervalle à valeurs dans $p^{-1}(b_i)$ est constante. □

10.3. Exemple. — Considérons le problème de relèvement

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{R} \\ & \nearrow \tilde{\gamma} & \downarrow p \\ [0, 1] & \xrightarrow{\gamma} & S^1 \end{array}$$

avec $\gamma(t) = (\cos(2\pi nt), \sin(2\pi nt))$ et $x_0 = 0$. Alors le relèvement est $\tilde{\gamma}(t) = nt$.

10.4. Corollaire. — Si B est connexe par arcs, alors p est surjectif.

Démonstration. — Soit $b_0 = p(x_0)$ et $b_1 \in B$. Il existe un chemin γ de b_0 à b_1 . On le relève à partir de $x_0 \in p^{-1}(b_0)$. On a $p(\tilde{\gamma}(1)) = \gamma(1)$. Donc b_1 est dans l'image de p . □

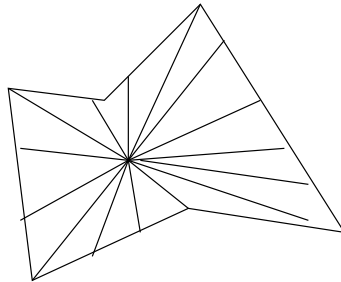
10.1. Exercice. — B étant connexe par arcs, montrer que si $\#(p^{-1}(b_0)) < \infty$ toutes les fibres ont le même nombre d'éléments.

10.5. Définitions. — 1) Soit f de $X \rightarrow Y$ continue. Une *homotopie* de f est une application continue $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ telle que $F(x, 0) = f(x)$. On

dit que f et $g : X \rightarrow Y$ sont *homotopes* s'il existe une application continue $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ telle que $F(x, 0) = f(x)$ et $F(x, 1) = g(x)$. On dit que F est une homotopie de f à g et on écrit $f \sim g$.

2) L'espace X est *contractile* (ou *contractible*) si $Id_X : X \rightarrow X$ est homotope à une application constante. Une *contraction* est une homotopie de Id_X jusqu'à une application constante.

3) Une partie A de \mathbb{R}^n *étoilée* par rapport à $a \in A$ si, pour tout $x \in A$, le segment $[x, a]$ est contenu dans A . Dans ce cas A est contractible et une contraction est donnée par $c(x, t) = (1 - t)x + ta$.

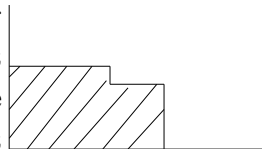


10.6. Théorème (Relèvement des homotopies de chemins)

Soit $p : X \rightarrow B$ un revêtement, $\tilde{f} : [0, 1] \rightarrow X$ un chemin, $f = p \circ \tilde{f}$. Soit $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow B$ une homotopie de f . Alors il existe une unique homotopie $\tilde{F} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ telle que $p \circ \tilde{F} = F$ et $\tilde{F}|_{[0, 1] \times \{0\}} = \tilde{f}$. On dit que \tilde{F} relève F à partir de \tilde{f} .

Esquisse de la démonstration. — Par le lemme ε de Lebesgue (4.2), il existe un quadrillage du carré $[0, 1] \times [0, 1]$ tel que chaque petit carré soit envoyé par F dans un ouvert trivialisant de p . On construit \tilde{F} de proche en proche.

Si \tilde{F} est déjà construite sur la région rayée, on l'étend à un petit carré C adjacent. Précisément \tilde{F} est donné sur le bord de C à valeurs dans $p^{-1}(U) \cong U \times \{\text{discret}\}$ et comme la partie du bord de C où \tilde{F} est déjà construite est connexe, la projection sur le facteur discret est constante. On prolonge aisément.



□

11. Simple connexité

11.1. Définitions. — 1) Un *lacet* de X est un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ tel que $\gamma(0) = \gamma(1)$.

2) Une *homotopie de lacets* est une application continue $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$, $(t, s) \mapsto \gamma(t, s)$, telle que, pour tout $s \in [0, 1]$, $\Gamma(0, s) = \Gamma(1, s)$. Donc, si s est fixé, $t \mapsto \Gamma(t, s)$ est un lacet.

3) On dit que X est *simplement connexe* (ou *1-connexe*) si X est connexe par arcs et si tout lacet est homotope à un lacet constant.

11.2. Remarques. — 1) Si X et Y sont homéomorphes et si X est 1-connexe, alors Y est 1-connexe.

2) Si X est contractile, alors X est 1-connexe.

11.3. Proposition. — Soit S^n la sphère unité de \mathbb{R}^{n+1} . Si $n \geq 2$, alors S^n est 1-connexe.

Démonstration. — Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow S^n$ un lacet. Par le lemme ε de Lebesgue (4.2), il existe une subdivision de $[0, 1]$, $0, \dots, t_k, \dots, 1$, telle que $\gamma([t_k, t_{k+1}])$ soit contenu dans un hémisphère. Alors γ est homotope à un lacet polygonal γ' (formé d'arcs de grands cercles). Si $n \geq 2$, un tel lacet évite un point $a \in S^n$. Comme $S^n \setminus \{a\} \cong \mathbb{R}^n$ est contractile, γ' est homotope à un lacet constant. \square

11.4. Théorème. — Soit $p : X \rightarrow B$ un revêtement. On suppose X et B connexes par arcs.

1) Si $p^{-1}(b_0)$ contient au-moins deux points, alors B n'est pas 1-connexe.

2) Si B est 1-connexe, alors p est un homéomorphisme.

Démonstration. — 1) Soit $x_1 \neq x_0$ dans $p^{-1}(b_0)$ et $\tilde{\gamma}$ un chemin de x_1 à x_0 dans X . Soit $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$; c'est un lacet. Par hypothèse il existe $b_1 \in B$ et une homotopie de lacets $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow B$, $(t, s) \mapsto \Gamma(t, s)$, tels que

$$\begin{aligned} \Gamma(0, s) &= \Gamma(1, s) \text{ pour tout } s \in [0, 1], \\ \Gamma(t, 1) &= b_1 \text{ et } \Gamma(t, 0) = \gamma(t) \text{ pour tout } t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

On relève Γ en $\tilde{\Gamma}$ à partir de $\tilde{\gamma}$. Le chemin $t \mapsto \tilde{\Gamma}(t, 1)$ relève le chemin constant b_1 . Donc $\tilde{\Gamma}_1$ est constant : $\tilde{\Gamma}(t, 1) = y_1$. Mais alors $\tilde{\Gamma}(0, 1-s)$ et $\tilde{\Gamma}(1, 1-s)$,

$s \in [0, 1]$, sont deux chemins relevant le même chemin $\Gamma(0, 1 - s)$ à partir de y_1 . Ils sont donc égaux d'après le théorème 10.2. D'où $\tilde{\Gamma}(0, 0) = \tilde{\Gamma}(1, 0)$, c'est-à-dire $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1)$, soit $x_0 = x_1$.

2) La contraposée de 1) dit que p est injectif. Comme B est connexe par arcs, p est surjectif. Comme p est un homéomorphisme local, c'est un homéomorphisme. \square

11.5. Corollaire. — 1) S^1 n'est pas 1-connexe.

2) Si la base B est 1-connexe, tout revêtement de B est trivial.

Démonstration. — 1) En effet, $\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ est un revêtement et n'est pas injectif.

2) L'hypothèse sur la topologie de B permet de choisir un recouvrement $\{U_i\}$ par des ouverts trivialisants de (X, p, B) qui sont connexes par arcs. Alors, si X_0 est une composante connexe par arcs de X , $p|_{X_0} : X_0 \rightarrow B$ est un revêtement avec la même famille $\{U_i\}$ d'ouverts trivialisants (une composante connexe par arcs de $p^{-1}(U_i)$ est soit dans X_0 soit disjointe de X_0). D'après le théorème, $p|_{X_0}$ est un homéomorphisme. Donc X est la réunion disjointe d'espaces qui sont tous homéomorphes à B ; c'est donc le produit de B par l'espace discret où chaque point représente une composante connexe par arcs de X . \square

11.6. Remarque. — Le théorème fondamental de l'algèbre : *Tout polynôme complexe non-constant a une racine* admet une démonstration simple à l'aide des revêtements (voir exercices de TD).

On donne ci-dessous des définitions équivalentes de la 1-connexité.

11.7. Proposition. — *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

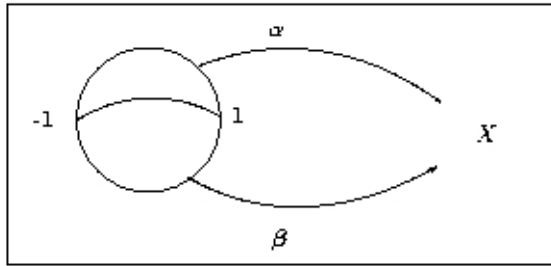
1) X est 1-connexe.

2) Toute application continue $S^1 \rightarrow X$ se prolonge continûment au disque D^2 .

3) Pour tout $x_0, x_1 \in X$ et pour tout chemin α, β de x_0 à x_1 , on a $\alpha \sim \beta$ par une homotopie de chemins de x_0 à x_1 .

Démonstration. — “1) \Rightarrow 2)” Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ un lacet. Par hypothèse il existe $\gamma : S^1 \times [0, 1] \rightarrow X$ telle que $\gamma|_{S^1 \times \{0\}} = \gamma$ et $\gamma|_{S^1 \times \{1\}} = \text{const.}$ Donc γ se factorise par $\gamma = \bar{\gamma} \circ p$ où p est la projection de $S^1 \times [0, 1]$ sur le quotient $S^1 \times [0, 1] / S^1 \times \{1\} \sim 1 \text{ pt}$. Mais ce quotient est homéomorphe à D^2 comme l’indiquent les coordonnées polaires du disque.

“2) \Rightarrow 3)” Soit $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$ deux chemins de même origine et extrémité. On définit $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ par $\gamma(t) = \alpha(2t)$ si $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ et $\gamma(t) = \beta(2 - 2t)$ si $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$. Comme $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$, γ donne $\bar{\gamma} : S^1 \rightarrow X$ définie par $\bar{\gamma}(e^{2i\pi t}) = \gamma(t)$. Par hypothèse $\bar{\gamma}$ se prolonge continûment à D^2 . L’homotopie cherchée est alors donnée par la restriction de $\bar{\gamma}$ à la famille d’arcs de cercle joignant 1 à -1 dans \mathbb{C} .



“3) \Rightarrow 1)” Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ un lacet. Soit $x_0 = \gamma(0) = \gamma(1)$. On pose $\alpha = \gamma$ et $\beta(t) = x_0$. On applique 3) à ce couple α, β . Donc il existe $\gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ tel que $\gamma|_{[0,1] \times \{0\}} = \alpha$, $\gamma|_{[0,1] \times \{1\}} = \beta$, $\gamma|_{\{0\} \times [0,1]} = \gamma|_{\{1\} \times [0,1]} = x_0$. Donc γ est une homotopie de lacets du lacet $\gamma = \alpha$ au lacet constant. \square

11.8. Définition. — Un lacet est dit *basé* en x_0 si $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$.

11.9. Remarque. — On vient de montrer que dans un espace 1-connexe tout lacet basé en x_0 est homotope au lacet constant x_0 parmi les lacets basés en x_0 .

11.1. Exercice. — 1) Démontrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ n’est pas 1-connexe.

2) Démontrer que $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ est 1-connexe.

3) En déduire que \mathbb{R}^2 n’est pas homéomorphe à \mathbb{R}^3 .

FRANÇOIS LAUDENBACH & FRIEDRICH WAGEMANN
Département de mathématiques, Université de Nantes,
2 Rue de la Houssinière F-44322 Nantes Cedex 03

UNIVERSITÉ DE NANTES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Maîtrise : Topologie Algébrique

François Laudenbach (CM) & Friedrich Wagemann (TD)

td2

Travaux dirigés de Mathématiques, Fiche 3, Topologie algébrique
2005-2006

Revêtements.

3.1. Exercice. — Soit $p : X \rightarrow B$ un revêtement. Montrer que $p(X) \subset B$ est ouvert et fermé.

Corrigé

3.2. Exercice. — Soit $p : X \rightarrow B$ un revêtement avec B connexe. Montrer que s'il existe $b \in B$ avec $\#(p^{-1}(b)) := n < \infty$, alors toutes les fibres ont n éléments.

Indication Corrigé

3.3. Exercice. — Montrer que l'inclusion $A \subset X$ d'un sous-espace ouvert et fermé A de X est un revêtement.

Corrigé

3.4. Exercice. — 1) Soit X un espace métrique. Montrer que, si $(a_n) \subset X$ est une suite de points distincts, convergente vers un $a \neq a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\{a_n | n \in \mathbb{N}\} \subset X$ est discret.

2) Soit $(a_n) \subset X$ une suite de Cauchy dans un espace métrique X , non convergente dans X . Montrer que $\{a_n | n \in \mathbb{N}\} \subset X$ est fermé. (On fabrique un exercice du même type avec la *compactification par un point* $X^+ = X \cup \{\infty\}$ d'un espace métrique localement compact X et une suite $a_n \rightarrow \infty \in X^+$: dans ces conditions, $\{a_n | n \in \mathbb{N}\} \subset X$ est fermé.)

3) Montrer que $p : X \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $x \mapsto \exp(2i\pi x)$ n'est pas une application fermée.

4) Soit $p : X \rightarrow B$ un revêtement fini où X et B sont des espaces métriques. Montrer que p est fermée.

Indication Corrigé

3.5. Exercice. — Soit G le groupe d'isométries du plan \mathbb{R}^2 engendré par la translation τ de vecteur $(0, 2)$ et par σ définie par $\sigma(x, y) = (x + 1, -y)$.

1) Calculer $\sigma\tau\sigma^{-1}$.

2) Montrer que l'espace des orbites \mathbb{R}^2/G est isomorphe à la *bouteille de Klein*, i.e. de l'espace topologique $K := ([0, 1] \times [0, 1])/\sim$ où \sim est la relation d'équivalence engendrée par les identifications $(0, t) \sim (1, 1-t)$ et $(t, 0) \sim (t, 1)$.

3) Soit G' le sous-groupe de G engendré par τ et σ^2 . Calculer G/G' . En déduire un revêtement de la bouteille de Klein par le tore.

Indication Corrigé

3.6. Exercice. — On appelle *ruban de Möbius* l'espace quotient $M = [0, 1] \times [0, 1]/\sim$ où \sim est la relation d'équivalence engendrée par les identifications $(0, t) \sim (1, 1-t)$ pour tout $t \in [0, 1]$. On note ∂M l'image de $[0, 1] \times \{0, 1\}$ par la projection canonique.

1) Montrer que ∂M est homéomorphe à un cercle.

2) Décrire un plongement de M dans le plan projectif $\mathbb{R}P^2$. Que peut-on dire de l'espace topologique obtenu en collant à M un disque D^2 par un homéomorphisme entre ∂M et $S^1 = \partial D^2$?

3) Construire un revêtement de \mathbb{R}^2 sur l'intérieur $int(M)$.

Indication Corrigé

3.7. Exercice. — Soit P un polynôme à coefficients complexes, de degré d , non-constant.

1) Montrer que $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est une application propre, i.e. que l'image réciproque d'un compact est compact.

2) Le but du reste de cet exercice est de montrer **le théorème d'Alembert-Gauss** : notons C l'ensemble des *valeurs critiques* de P , i.e. C est l'ensemble des images $P(z)$ où z vérifie $P'(z) = 0$. Soit V le complémentaire de C dans

$\mathbb{C} : V$ contient l'ensemble des *valeurs régulières* R et le complémentaire de l'image $P(\mathbb{C})$. Notons $U := P^{-1}(R)$.

- a) Montrer que V est connexe. Montrer que $P|_U : U \rightarrow R$ est un revêtement.
 b) Montrer que P est surjective sur tout V et conclure.

Indication Corrigé

3.8. Exercice (Construction de revêtements par fonctions de transition)

Soit $\{U_i\}$ un recouvrement ouvert d'un espace topologique B . Soit $Bij(F)$ le groupe des permutations d'un ensemble F . On munit $Bij(F)$ de la topologie discrète et on se donne des applications continues (donc localement constantes) $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow Bij(F)$ telles que

$$g_{kj}(x) \circ g_{ji}(x) = g_{ki}(x) \quad \forall x \in U_i \cap U_j \cap U_k.$$

Soit $X := (\coprod_{i \in I} U_i \times F) / \sim$ où $U_i \times F \ni (x, f) \sim (x', f') \in U_j \times F \Leftrightarrow x = x'$ et $f' = g_{ji}(x)(f)$. Définir une projection $p : X \rightarrow B$ qui soit un revêtement de B de fibre F .

Indication Corrigé

UNIVERSITÉ DE NANTES
 DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Maîtrise : Topologie Algébrique

François Laudenbach (CM) & Friedrich Wagemann (TD)

Revêtements : indications pour les exercices

3.2. Indication exercice. — **3.2** On pourrait montrer que l'application $\# p^{-1} : B \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ donnée par $b \mapsto \# p^{-1}(b)$ est localement constante.

Énoncé Corrigé

3.4. Indication exercice. — **3.4** 1) Examiner $\delta = \inf_{m \neq n_0} \{d(a_m, a_{n_0}) \mid m \in \mathbb{N}\}$.

3.4 4) Trivialiser autour de la limite d'une suite dans l'image d'un fermé. Utiliser que la fibre est fini pour trier les préimages des éléments de la suite.

Énoncé Corrigé

3.5. Indication exercice. — **3.5** 2) Le procédé général d'identification d'un espace quotient X/G par l'action d'un groupe G est de chercher un *domaine fondamental* : on cherche dans X la plus grande partie K (si possible compacte) tel que tout point de $\overset{\circ}{K}$ soit le seul de son orbite (sous l'action de G) dans $\overset{\circ}{K}$. Autrement dit, le passage au quotient de X à X/G revient à n'identifier entre eux que des points sur le bord ∂K de K .

3.5 3) Former les classes à gauche par rapport au sous-groupe $G' \subset G$. Quelle propriété spéciale a un sous-groupe d'indice deux ?

Énoncé Corrigé

3.6. Indication exercice. — **3.6** 1) Le cercle a , en fait, longueur 2.

3.6 2) Se rappeler de la description de $\mathbb{R}P^2$ dans l'exercice 2.12 4). Essayer de décrire l'espace obtenu en coupant de $\mathbb{R}P^2$ le ruban de Möbius, au lieu de décrire l'espace obtenu en collant à M un disque.

3.6 3) L'intérieur $int(M)$ de M peut se voir (à homéomorphisme près) comme un cercle où par tout point passe une droite réelle. Ces dernières se

retrouvent dans \mathbb{R}^2 comme droites parallèles à l'axe des y . Faire intervenir l'isométrie σ .

Énoncé Corrigé

3.7. Indication exercice. — **3.7** 1) Montrer que $P^{-1}(K)$ est borné par la contraposée.

3.7 2b) Montrer que la fonction $V \rightarrow \mathbb{N}$ donnée par $c \mapsto \#p^{-1}(c)$ est localement constante.

Énoncé Corrigé

3.8. Indication exercice. — **3.8** La projection $p : X \rightarrow B$ est induite par la projection sur la première composante. Les U_i sont les ouverts trivialisants pour $p : X \rightarrow B$.

Énoncé Corrigé

UNIVERSITÉ DE NANTES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Maîtrise : Topologie Algébrique

François Laudenbach (CM) & Friedrich Wagemann (TD)

Travaux dirigés de Mathématiques, Fiche 3, Topologie algébrique
2005-2006

Revêtements : solutions des exercices.

3.1. Corrigé exercice. — Un revêtement est en particulier un homéomorphisme local, donc une application ouverte et l'image est ouvert. Par ailleurs, l'application $\#p^{-1} : B \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ donnée par $b \mapsto \#p^{-1}(b)$ est localement constante; ceci découle aussitôt de la *trivialité locale* du revêtement : si $\#p^{-1}(b_0) = n$, alors il existe un voisinage ouvert O_{b_0} avec $\#p^{-1}(b) = n$ pour tout $b \in O_{b_0}$. Donc $\#p^{-1}$ est continue si on munit l'ensemble $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ de la topologie discrète. Si maintenant $p^{-1}(b) = \emptyset$ pour tout $b \in p(X)$, alors $X = \emptyset$ et $p(X)$ est fermé. En tout cas, $p(X) = (\#p^{-1})^{-1}(O)$ pour un ouvert et fermé $O \subset \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, et $p(X)$ est donc fermé.

Énoncé

3.2. Corrigé exercice. — Ceci découle immédiatement de la question précédente, les seuls sous-ensembles ouverts et fermés d'un espace connexe X étant X et \emptyset .

Énoncé Indication

3.3. Corrigé exercice. — En effet, pour tout point $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U_x tel qu'on ait, si $x \in A$, le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 i^{-1}(U_x) & \xrightarrow{\phi} & U_x \times \{1\} \\
 & \searrow i & \swarrow \text{proj}_1 \\
 & & U_x
 \end{array}$$

et si $x \notin A$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \xrightarrow{\phi} & U_x \times \emptyset \\ & \searrow i & \swarrow \text{proj}_1 \\ & & U_x \end{array}$$

où ϕ est bien un homéomorphisme ($U_x \times \emptyset = \emptyset$).

Énoncé

3.4. Corrigé exercice. — 1) Soit $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset X$. Il faut montrer que pour tout $x \in A$, il existe U_x voisinage ouvert de $x \in X$ avec $U_x \cap A = \{x\}$. Soit donc $x = a_{n_0} \in A$, et posons $\delta = \inf_{m \neq n_0} \{d(a_m, a_{n_0}) \mid m \in \mathbb{N}\}$. Supposons $\delta = 0$, alors il existe $(a_{n_i})_{i \in \mathbb{N}} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} a_{n_0}$, i.e. pour tout $\epsilon > 0$, il existe $i \in \mathbb{N}$ avec $d(a_{n_i}, a_{n_0}) < \epsilon$. Fixons un $\epsilon_0 > 0$ tel que $d(a, a_{n_0}) > \epsilon_0$, alors on a

$$\epsilon_0 < d(a, a_{n_0}) \leq d(a, a_{n_i}) + d(a_{n_i}, a_{n_0}) \leq \frac{\epsilon_0}{2} + \frac{\epsilon_0}{2} = \epsilon_0,$$

pour un $n_i > N(\epsilon_0)$, puisque a est la limite de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ceci est une contradiction. Donc $\delta > 0$, et une $\frac{\delta}{2}$ -boule autour de $x = a_{n_0}$ en tant que U_x suffit pour montrer que A est discret.

Énoncé Indication

3.4 2) Il faut montrer que toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $x_n \in \{a_k \mid k \in \mathbb{N}\} =: A$ avec $x_n \rightarrow x \in X$ converge dans A . Il y a deux cas qui se présentent : soit il existe un $N \in \mathbb{N}$ avec pour tous $n, m \geq N$ $d(x_n, x_m) = 0$, i.e. la suite devient stationnaire, alors $x \in A$. Sinon, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n, m \geq N$ avec $d(x_n, x_m) \neq 0$, i.e. $x \notin \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Soit $\epsilon > 0$ et $U_x(\epsilon)$ la ϵ -boule autour de x . On sait par Cauchy qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n, m \geq N_1$ $d(x_m, x_n) < \frac{\epsilon}{2}$. Par ailleurs, on sait par convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qu'il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geq N_2$ $d(x_m, x) < \frac{\epsilon}{2}$. Ainsi, pour $N := \sup\{N_1, N_2\}$, on a

$$d(x, a_n) \leq d(x, x_m) + d(x_m, a_n) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

pour tout $n \geq N$. Ceci implique $a_n \rightarrow x$, ce qui est en contradiction avec l'unicité de la limite.

Énoncé Indication

3.4 3) À l'aide de l'exercice précédent, on montre que la projection $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ donné par $x \mapsto \exp(2\pi ix)$ n'est pas fermée. En effet, la suite $\theta_n = \frac{1}{n} + n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, la compactification par un point de \mathbb{R} . On a $S^1 \ni a_n = p(\theta_n) = \exp(\frac{2\pi i}{n} + 2\pi i n) = \exp(\frac{2\pi i}{n})$, et donc $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \in S^1$. D'après ce qui précède, $\{\theta_n \mid n \in \mathbb{N}, n \neq 1\}$ est un fermé discret, mais $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}, n \neq 1\} \subset S^1$ n'est pas fermé : la suite des a_n tend vers $1 \notin \{a_n \mid n \in \mathbb{N}, n \neq 1\}$.

Énoncé Indication

3.4 4) Soit $F \subset X$ un fermé. Soit $b_n \in p(F)$ une suite convergente dans B vers un $b \in B$. Autour de b , il existe un ouvert trivialisant U , i.e.

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{h} & U \times D \\ & \searrow p & \swarrow \text{proj}_1 \\ & & U \end{array}$$

avec un discret fini D . On a $\#\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cap U = \infty$, si la suite n'est pas constante. Donc, puisque D est fini, il existe $d \in D$ avec $\#\{(b_n, d) \mid n \in \mathbb{N}\} \cap h(p^{-1}(U) \cap F) = \infty$. $h^{-1}(b_n, d) =: x_n \in F$ est donc une suite dans F qui converge vers un $x = h^{-1}(b, d) \in p^{-1}(b) \subset X$. F fermé implique $x \in F$ et $p(x) = b \in p(F)$.

Énoncé Indication

3.5. Corrigé exercice. — 1) $\sigma\tau\sigma^{-1} = \tau^{-1}$.

Énoncé

3.5 2) Le procédé général d'identification d'un espace quotient X/G par l'action d'un groupe G est de chercher un *domaine fondamental* : on cherche dans X la plus grande partie K (si possible compacte) tel que tout point de $\overset{\circ}{K}$ soit le seul de son orbite (sous l'action de G) dans $\overset{\circ}{K}$. Autrement dit, le passage au quotient de X à X/G revient à n'identifier entre eux que des points sur le bord ∂K de K .

Dans notre cas, le carré $\Delta := [0, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$ fournit un tel domaine fondamental. Pour faire le lien avec la description donné dans l'exercice par le carré $[0, 1]^2$, on introduit l'application $f : [0, 1] \times [-1, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ donnée par la multiplication par $\frac{1}{2}$ en direction de y et le recentrage tel que l'axe des x

se retrouve en $y = \frac{1}{2}$. Concrètement, $f(x, y) = (x, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2})$. On a par suite un diagramme

$$\begin{array}{ccc} [0, 1]^2 & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}^2 \\ \downarrow p & & \downarrow \pi \\ [0, 1]^2 / \sim & \xrightarrow{\bar{i}} & G \backslash \mathbb{R}^2 \end{array}$$

où i est la composée de l'homéomorphisme $f : [0, 1] \times [-1, 1] \cong [0, 1]^2$ avec l'inclusion $[0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$, et l'application continue \bar{i} existe par la propriété universelle du quotient. Montrons que $G \backslash \mathbb{R}^2$ est séparé : si \bar{x} et \bar{y} sont deux points dans l'intérieur de Δ , alors si $\epsilon > 0$ est plus petit que le minimum des distances entre x et y et des distances de x et y au bord, les $\frac{\epsilon}{2}$ -boules autour de \bar{x} et \bar{y} conviennent. Si \bar{x} est dans l'intérieur et $\bar{y} \in \partial\Delta$, alors il suffit de prendre comme ϵ la distance au bord. Si finalement x et $y \in \partial\Delta$, l'orbite de chacun intersecte $\partial\Delta$ en 2 ou 4 points, et il suffit de prendre comme ϵ le minimum des distances de tous ces points dans \mathbb{R}^2 . Montrons finalement que \bar{i} est un homéomorphisme : en effet, $[0, 1]^2 / \sim$ est séparé, puisqu'il admet une injection continue vers un espace dont nous venons de montrer la séparation, ainsi $[0, 1]^2 / \sim$ est compact, et la bijection continue \bar{i} est un homéomorphisme (cf 2.3 3)).

Énoncé Indication

3.5 3) Un élément arbitraire de G est un mot $\sigma^{n_1} \tau^{r_1} \dots \sigma^{n_s} \tau^{r_t}$ avec $n_i, r_j \in \mathbb{Z}$. On peut permuter σ et τ suivant $\sigma\tau = \tau^{-1}\sigma$. Un tel mot est dans G' si et seulement si $\sum_j r_j$ est paire. Ainsi l'ensemble des classes à gauche G/G' a exactement deux éléments, représentés par un mot avec $\sum_j r_j$ paire (par exemple, le neutre e), et un mot avec $\sum_j r_j$ impaire (par exemple, le mot τ). On voit ainsi que l'indice $(G : G')$ est 2, et par suite G' est un sous-groupe distingué de G .

Un domaine fondamental (cf exercice précédent) pour l'action de G' sur \mathbb{R}^2 est $[0, 2]^2$, et les identifications sont suivant les deux translations τ et σ^2 . L'espace quotient \mathbb{R}^2/G' est un tore. Le groupe quotient G/G' agit sur ce tore, et le quotient $(\mathbb{R}^2/G')/(G/G')$ est homéomorphe à \mathbb{R}^2/G (en effet, l'identité $\text{id} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ composé par la projection sur \mathbb{R}^2/G passe au quotient en une application continue $\phi : (\mathbb{R}^2/G') \rightarrow (\mathbb{R}^2/G)$, et ϕ passe encore au quotient en

une bijection continue $(\mathbb{R}^2/G')/(G/G') \rightarrow (\mathbb{R}^2/G)$. D'où l'homéomorphisme.). ϕ est un revêtement de la bouteille de Klein par le tore (en effet, le quotient par l'action libre d'un groupe fini sur un espace séparé est un revêtement, puisque la condition (L) du cours est vérifiée).

Énoncé Indication

3.6. Corrigé exercice. — 1) $\partial M = ([0, 1] \times \{0\} \amalg [0, 1] \times \{1\})/\sim$, et la relation d'équivalence identifie $(0, 0) \in [0, 1] \times \{0\}$ avec $(1, 1) \in [0, 1] \times \{1\}$, et $(1, 0) \in [0, 1] \times \{0\}$ avec $(0, 1) \in [0, 1] \times \{1\}$. Si note donc $i : [0, 1] \times \{0\} \amalg [0, 1] \times \{1\} \rightarrow [0, 2]$ l'inclusion de la première composante connexe sur $[0, 1]$ et de la deuxième composante connexe sur $[1, 2]$ (rappel : une application de la somme disjointe de deux espaces topologiques vers un espace topologique se définit en juxtaposant deux applications continues sur les facteurs). Nous avons un diagramme

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] \times \{0, 1\} & \xrightarrow{i} & [0, 2] \\ \downarrow & & \downarrow \\ ([0, 1] \times \{0, 1\})/\sim & \xrightarrow{\bar{i}} & S^1 = [0, 2]/(0 \sim 2) \end{array}$$

où l'application \bar{i} existe par propriété universelle du quotient. Elle est par construction une bijection continue de quasi-compact sur compact, donc un homéomorphisme (cf 2.3 3)).

Énoncé Indication

3.6 2) Le plan projectif (réel) $\mathbb{R}P^2$ s'obtient en tant que quotient du carré $[0, 1]^2$ où on identifie les côtés opposés suivant $(x, 0) \sim (1 - x, 1)$ et $(0, y) \sim (1, 1 - y)$. Si on coupe dans le carré $[0, 1]^2$ la bande $B := \{x, y\} \in [0, 1]^2 \mid \frac{1}{4} \leq y \leq \frac{3}{4}\}$, alors l'espace quotient B/\sim de la bande est (homéomorphe à) une bande de Möbius (la seule différence étant que B/\sim a largeur $\frac{1}{2}$ au lieu d'avoir largeur 1). Ce qui précède décrit donc un plongement de la bande de Möbius M dans le plan projectif réel $\mathbb{R}P^2$; montrons que $\mathbb{R}P^2 \setminus M$ est homéomorphe à un disque : en effet, $\mathbb{R}P^2 \setminus M$ est homéomorphe à l'espace quotient $2D/\sim$ où $2D \subset [0, 1]^2$ est la réunion d'un demi-disque (ellipsoïde) contenu dans $[0, 1] \times [\frac{3}{4}, 1]$, et un autre demi-disque (ellipsoïde) contenu dans $[0, 1] \times [0, \frac{1}{4}]$. En arrondissant ainsi les bords, on évite les identifications (pour $\mathbb{R}P^2 \setminus M$) sur les morceaux

du bord donnés par $\{0\} \times [0, 1]$ et $\{1\} \times [0, 1]$. $2D \subset [0, 1]^2$ a deux composantes connexes (les deux demi-disques) où les seules identifications (quand on passe à $2D/\sim$) s'effectuent sur les morceaux du bord donnés par $[0, 1] \times \{0\}$ et $[0, 1] \times \{1\}$. Ces deux composantes peuvent être déplacées dans le plan afin de mettre les points à identifier l'un en face de l'autre : on voit que $2D/\sim$ constitue un disque (de forme ellipsoïde) ouvert. Autrement dit (en inversant le procédé), le recollement d'un disque fermé D sur le bord d'une bande de Möbius M à l'aide d'un homéomorphisme $\psi : \partial M \rightarrow \partial D$ donne un espace topologique $D \cup_\psi M$ homéomorphe à $\mathbb{R}P^2$.

Énoncé Indication

3.6 3) Comme quotient du plan \mathbb{R}^2 , on n'obtient pas une bande de Möbius compacte $[0, 1]^2/\sim$, mais une bande de Möbius infinie $\mathbb{R} \times [0, 1]/\sim$. En effet, on définit comme dans 3.4 un sous-groupe G de $O(2)$, et ensuite la bande s'obtient comme quotient \mathbb{R}^2/G . Soit donc G le sous-groupe de $O(2)$ engendré par σ (notation de 3.4) ; un domaine fondamental (cf 3.4) pour l'action de G est la bande verticale $[0, 1] \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ (remarquer qu'elle n'est pas compact !), et le quotient par G de la restriction de cette bande à $[0, 1]^2$ donne la bande de Möbius compacte.

Dans le même ordre d'idées, l'autre générateur τ agit encore sur \mathbb{R}^2/G , et le passage au quotient donne un revêtement (attention : l'indice du sous-groupe engendré par σ dans le groupe engendré par σ et τ est infini ! Mais le sous-groupe engendré par τ agit en vérifiant la condition (L) du cours, d'où un revêtement.) de la bouteille de Klein par le ruban de Möbius.

Énoncé Indication

3.7. Corrigé exercice. — 1) Pour montrer que $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, la fonction polynomiale associée au polynôme P , est une application propre, soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact. K est fermé et borné, et il faut montrer que $P^{-1}(K)$ est encore fermé et borné. $P^{-1}(K)$ est fermé, car P est continue. Montrons que l'image réciproque $P^{-1}(B)$ sous P d'un borné B est borné par la contraposée : sinon, il existerait une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}$ avec $P(z_n) \in B$, i.e. $P(z_n)$ borné, et (z_n) non-bornée. Or, si $|z_n| \rightarrow \infty$, alors $P(z_n) \rightarrow \infty$, d'où une contradiction, qui confirme que P est propre.

Énoncé Indication

3.7 2a) P' est un polynôme, donc possède un nombre fini de zéros. Ainsi C est un ensemble fini, et le complémentaire d'un ensemble fini dans le plan est connexe (cf 2.1 1a)), par suite V est connexe. $P|_U : U \rightarrow R$ est un homéomorphisme local par le théorème d'inversion locale (R est l'ensemble des valeurs régulières!), ainsi $P|_U$ est un homéomorphisme local, propre (cf 3.7 1)) entre espaces localement compacts, et donc un revêtement par remarque 8.4 du cours (cf exo 2.3 4)).

Énoncé Indication

3.7 2b) Montrons que la fonction $V \rightarrow \mathbb{N}$ donnée par $c \mapsto \# p^{-1}(c)$ est localement constante : en effet, c'est vrai pour $c \in R$, puisque $P|_U$ est un revêtement (cf exo 3.2). Par ailleurs, c'est vrai aussi pour $c \in V \setminus R$ (qui est l'ensemble des valeurs non-atteintes par P), puisque l'image de P est fermée : soit $P(x_n) = y_n$ une suite convergente vers $y \in \mathbb{C}$. $\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\} =: F$ est un fermé (cf exo 2.10) borné, et P est propre, donc $P^{-1}(F)$ est compact. Il existe donc une sous-suite convergente vers x , et par continuité $P(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(x_{n_i}) = \lim_{i \rightarrow \infty} y_{n_i} = y$, i.e. $P(\mathbb{C})$ est fermé. En conclusion, $c \mapsto \# p^{-1}(c)$ est localement constante sur le connexe V , donc constante. Or, il existe un point qui possède une (en fait même n) préimage, donc P est surjective sur V .

Finalement, P possède un zéro, puisque si $0 \notin V$, alors $0 \in C$, i.e. $0 \in \text{Im}(P)$, et si $0 \in V$, alors 0 est pris comme valeur puisque P est surjective sur V . D'où le théorème d'Alembert-Gauss.

Énoncé Indication

3.8. Corrigé exercice. — Dans cet exercice, nous décrivons un mécanisme général qui permet de construire des fibrés localement triviaux à partir de fonctions de transitions, un revêtement en étant le cas spécial d'un fibré localement trivial de fibre discrète.

La projection $p : X \rightarrow B$ est bien induite par la projection $(x, f) \mapsto x$. p est bien définie. Il est clair que $p : X \rightarrow B$ est continue, puisque $p : \coprod_{i \in I} U_i \times F \rightarrow B$ est continue (continue en chaque facteur!), et passe au quotient en une application continue encore appelée p .

Montrons que le saturé (cf exo 2.5) de tout ouvert est ouvert. En effet, soit $V \subset \coprod_{i \in I} U_i \times F$ un ouvert, i.e. V est une réunion disjointe $V = \bigcup_{i \in I} V_i$ d'ouverts de $U_i \times F$. On a $p^{-1}(p(V_i)) = \bigcup_{(x,f) \in V_i, f'=g_{ij}(x)(f)} (x, f') = \text{proj}_1(V_i) \times F_i$ où

F_i est un sous-ensemble de F . Ceci montre que $p^{-1}(p(V_i))$ est ouvert, puisque $\text{proj}_1(V_i)$ et F_i le sont. Finalement V est ouvert, et p est donc ouverte.

Montrons que les U_i sont des ouverts trivialisants pour $p : X \rightarrow B$. On a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\quad} & U_i \times F \\ & \searrow p & \swarrow \text{proj}_1 \\ & & U_i \end{array}$$

Ici, $\phi : p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F$ est donné par $\phi(x, f) = (x, f)$, et $\psi : U_i \times F \rightarrow p^{-1}(U_i)$ par $\psi(x, f) = (x, f)$. Il suffit de vérifier que ϕ et ψ sont continues : c'est clair pour ϕ , car ϕ est à valeurs dans un produit et les composées avec les projections sont continues, et on le vérifie pour ψ à l'aide d'ouverts immédiatement. En conclusion, $p : X \rightarrow B$ est un revêtement de B de fibre typique F .

Énoncé Indication

UNIVERSITÉ DE NANTES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Maîtrise : Topologie Algébrique

François Laudenbach (CM) & Friedrich Wagemann (TD)

Travaux dirigés de Mathématiques, Fiche 4, Topologie algébrique
2005-2006

Revêtements II.

Soient $p : X \rightarrow B$ et $p' : X' \rightarrow B$ deux revêtements sur B . On rappelle qu'un (*endo*)*morphisme* de revêtement $\phi : X \rightarrow X'$ est un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & X' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ B & \xrightarrow{\text{id}_B} & B' \end{array}$$

On rappelle également qu'une *section* d'un revêtement $p : X \rightarrow B$ est une application continue $s : B \rightarrow X$ avec $p \circ s = \text{id}_B$. On parle d'une section au-dessus d'un sous-espace $A \subset B$, si le domaine de s est A et $p \circ s = \text{id}_A$.

4.1. Exercice. — Soit $p : X \rightarrow B$ un homéomorphisme local.

- Montrer que pour tout point b et tout point $x \in p^{-1}(b)$, il existe un voisinage ouvert V de b et une section au-dessus de V telle que $s(b) = x$.
- Si s est une section de p au-dessus de $A \subset B$, alors s est un homéomorphisme de A sur $s(A)$.
- Deux sections s et s' de p au-dessus de B qui sont égales en $b \in B$ coïncident sur un voisinage de b .
- Soit maintenant $p : X \rightarrow B$ un revêtement. Deux sections s et s' de p au-dessus de $A \subset B$ connexe qui coïncident en $a \in A$ sont égales.
- Déduire de ce qui précède que l'image d'une section d'un revêtement de base localement connexe est ouverte et fermée.
- Soit maintenant $p : X \rightarrow B$ un revêtement d'espace total connexe et de

base localement connexe. Montrer que p est un homéomorphisme sur $p(X)$ si et seulement s'il existe une section.

Indication Corrigé

4.2. Exercice. — Soient X et X' deux revêtements localement connexes de B et $f, g : X \rightarrow X'$ deux morphismes de revêtement. On suppose B (et donc X et X') localement connexe.

a) Montrer que l'ensemble des $x \in X$ avec $f(x) = g(x)$ est un ouvert fermé de X . En particulier, si X est connexe et s'il existe un $x \in X$ avec $f(x) = g(x)$, alors f et g coïncident.

b) En déduire que si la base est connexe et s'il existe un $b \in B$ où les morphismes induits sur la fibre $p^{-1}(b)$ sont égales, alors ils coïncident.

c) En déduire que le groupe des automorphismes $\text{Aut}(X)$ d'un revêtement connexe surjectif $p : X \rightarrow B$ agit librement sur X .

d) En déduire que si G agit avec (L) sur un espace topologique connexe X , alors le groupe $\text{Aut}(p)$ du revêtement $p : X \rightarrow G \backslash X$ s'identifie à G .

Indication Corrigé

4.3. Exercice. — Soient n un entier, et $p_n : S^1 \rightarrow S^1$ le revêtement $p_n(z) = z^n$. Sous quelles hypothèses y a-t-il un homomorphisme de p_n vers p_m ?

Indication Corrigé

4.4. Exercice. — Soient $q : X \rightarrow Y$ et $r : Y \rightarrow Z$ des revêtements connexes par arcs et $p : X \rightarrow Z$ une application continue telle que $p = r \circ q$. Supposons que Z est localement 1-connexe. Montrer que p est un revêtement.

Indication Corrigé

4.5. Exercice. — Soient X et X' deux revêtements de base localement connexe B et $f : X \rightarrow X'$ un morphisme. Alors $f : X \rightarrow X'$ est un revêtement (Indication : supposons B connexe, et X et X' deux revêtements triviaux de B , $f : X \rightarrow X'$ un morphisme. Montrer que $f : X \rightarrow X'$ est un revêtement, trivial sur chaque composante connexe de X' .)

Corrigé

4.6. Exercice. — Soient $p : X \rightarrow B$ et $p' : X' \rightarrow B$ deux revêtements et $f : X \rightarrow X'$ un isomorphisme de revêtement. Montrer que si γ est un chemin dans B qui se relève en lacet dans p , alors il en est de même pour son relèvement dans p' . Classifier à partir de cette remarque les revêtements connexes à deux feuillets de la figure huit (si vous avez du courage, faites de même avec ceux à trois feuillets (il y en a six classes d'isomorphismes)).

Corrigé

UNIVERSITÉ DE NANTES
 DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Maîtrise : Topologie Algébrique

François Laudenbach (CM) & Friedrich Wagemann (TD)

Revêtements II : indications pour les exercices

4.1. Indication exercice. — 4.1 d) Montrer que l'ensemble de coïncidence est ouvert et fermé.

Énoncé Corrigé

4.2. Indication exercice. — 4.2 a) Montrer que la diagonale $\Delta_X = \{(x, x) \in X \times X\} \subset X \times_B X := \{(x, x') \in X \times X \mid p(x) = p(x')\}$ est fermée.

4.2 c) Un *automorphisme* de revêtement est un endomorphisme inversible du revêtement $p : X \rightarrow B$. $x \in \text{Fix}(\text{Aut}(X))$, un point fixe du groupe des automorphismes, est un $x \in X$ avec $\phi(x) = \psi(x)$ pour tous $\phi, \psi \in \text{Aut}(X)$.

4.2 d) Montrer que G agit par automorphismes de revêtement. Réciproquement, G agit par construction transitivement sur la fibre du revêtement, donc étant donné un automorphisme ϕ , pour $x \in X$, il existe $g \in G$ avec $\phi(x) = g \cdot x$.

Énoncé Corrigé

4.3. Indication exercice. — 4.3 Montrer que l'application $S^1 \rightarrow S^1$, $z \mapsto z^{\frac{1}{m}}$ n'est pas continue pour $m > 1$.

Énoncé Corrigé

4.4. Indication exercice. — 4.4 Un revêtement de base 1-connexe est trivial.

Énoncé Corrigé

UNIVERSITÉ DE NANTES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Maîtrise : Topologie Algébrique

François Laudenbach (CM) & Friedrich Wagemann (TD)

Travaux dirigés de Mathématiques, Fiche 4, Topologie algébrique
2005-2006

Revêtements II : solutions des exercices.

4.1. Corrigé exercice. — a) En effet, x possède un voisinage ouvert U homéomorphisant pour p , i.e. $p(U)$ est ouvert et $p|_U : U \rightarrow p(U)$ est un homéomorphisme. Sur l'ouvert $V := p(U)$, $s := (p|_U)^{-1}$ est une section car $p \circ (p|_U)^{-1} = p|_U \circ (p|_U)^{-1} = \text{id}_{p(U)}$.

Énoncé Indication

4.1 b) $s : A \rightarrow X$ est continue, injective (c'est un inverse à gauche de p) et surjective sur $s(A)$. Il reste à montrer que $s : A \rightarrow X$ est ouverte (le sous-ensemble A qui n'est ni forcément ouvert, ni fermé, porte ici la topologie de sous-espace de B). Soit $V \subset A$ ouvert, i.e. il existe un ouvert $U \subset B$ avec $U \cap A = V$. Il faut montrer que $s(V)$ est ouvert dans $s(A)$ (pas forcément dans X !). Soit $x \in s(V)$. Il existe un voisinage ouvert W de x homéomorphisant pour p , i.e. $p(W)$ est ouvert et $p|_W : W \rightarrow p(W)$ est un homéomorphisme. Posons $Z := (p(W) \cap A) \cap V = p(W) \cap V$. C'est un ouvert de A . On a pour tout $b \in p(W) \cap A$ $p^{-1}(b) = s(b)$. En effet, $p(p^{-1}(b)) = b = p(s(b))$, mais p est injectif sur W donc $p^{-1}(b) = s(b)$.

Maintenant, Z est ouvert dans A , donc il existe un ouvert $U' \subset B$ avec $U' \cap A = Z$. On a

$$s(Z) = (p|_W)^{-1}(Z) = (p|_W)^{-1}(U' \cap A) = s(A) \cap (p|_W)^{-1}(U') = s(A) \cap (p|_W)^{-1}(U' \cap p(W)),$$

et puisque $U' \cap p(W)$ est ouvert dans B , $(p|_W)^{-1}(U' \cap p(W))$ est ouvert dans X , et par suite $s(Z)$ est ouvert dans $s(A)$.

Énoncé Indication

4.1 c) Notons $x = s(b) = s'(b)$. Il existe un voisinage ouvert W de x homéomorphisant pour p , i.e. $p(W)$ est ouvert et $p|_W : W \rightarrow p(W)$ est un homéomorphisme. On a par suite $p|_{W^{-1}} = s|_{p(W)} = s'|_{p(W)}$, et $V := p(W)$ est un voisinage ouvert de b sur lequel s et s' coïncident. Énoncé Indication

4.1 d) D'après c), l'ensemble des coïncidence $C \subset A$ de s et s' est ouvert. Montrons que C est fermé : en effet, si s et s' ne coïncident pas en un point, alors il prennent deux valeurs différentes de la fibre qui est discrète, et il existe un voisinage ouvert où s et s' sont différents. C est donc un ouvert fermé non-vide ($a \in C!$) de A qui est connexe, et par suite $C = A$.

Énoncé Indication

4.1 e) Soit $s : B \rightarrow X$ une section. Il faut montrer que $s(B)$ est ouvert et fermé. $s(B)$ est ouvert dans X : soit $x = s(b) \in s(B)$, $b = p(x)$. Il existe un voisinage ouvert U de x homéomorphisant pour p , i.e. $p(U)$ est ouvert et $p|_U : U \rightarrow p(U)$ est un homéomorphisme. Soit V un voisinage ouvert de b , contenu dans $p(W)$, alors $p^{-1}(V) \subset U$ est un ouvert de X , et $(p|_U)^{-1} = s$ sur $p(U)$ (cf 4.1 a)). Ainsi $(p|_U)^{-1}(V) = s(V) \subset s(B)$ est un voisinage ouvert de x dans $s(B)$.

$s(B)$ est fermé dans X : soit $x \in X \setminus s(B)$. Il existe un voisinage ouvert U de x homéomorphisant pour p , i.e. $p(U)$ est ouvert et $p|_U : U \rightarrow p(U)$ est un homéomorphisme. Par hypothèse, il existe un voisinage connexe V de $p(x) \in p(U)$ qu'on peut supposer contenu dans $p(U)$. S'il existait un point de V où $(p|_U)^{-1}$ et s coïncident, alors ils coïncideraient sur tout V d'après d), et x serait atteint par s . Ainsi U est un voisinage de x non-atteint par s , et $s(B)$ est fermé.

Énoncé Indication

4.1 f) Il est clair que si p est un homéomorphisme, alors il existe une section (prendre l'inverse de $p!$). Réciproquement, s'il existe une section $s : B \rightarrow X$, alors $s(B) = X$ d'après e), et s est un homéomorphisme sur $s(B) = X$ par b), donc p est aussi un homéomorphisme.

Énoncé Indication

4.2. Corrigé exercice. — a) Montrons que la diagonale $\Delta_X = \{(x, x) \in X \times X\} \subset X \times_B X := \{(x, x') \in X \times X \mid p(x) = p(x')\}$ est fermée. En effet, le complémentaire de Δ_X consiste des (x, x') avec $x \neq x'$ et $p(x) = p(x')$,

i.e. un tel couple (x, x') consiste de deux éléments différents de la fibre sur $b = p(x) = p(x')$. Grâce à la triviale locale et le fait que la fibre est discrète, il existe des voisinages ouverts disjoints U de x et V de x' . Ainsi $U \times V \cap X \times_B X$ est un voisinage ouvert de (x, x') dans le complémentaire de Δ_X .

Déduisons que l'ensemble de coïncidence de f et g est fermé : on a que $(f \times g)^{-1}(\Delta_{X'}) \subset X \times_B X$ est un fermé. Or, $(f \times g)^{-1}(\Delta_{X'}) = \{(x, x') \in X \times X \mid f(x) = g(x)\}$ est l'ensemble de coïncidence.

Par ailleurs, l'ensemble de coïncidence est ouvert : soit $x \in X$ avec $f(x) = g(x)$. Il existe un voisinage U de $p(x) \in B$ trivialisant p et p' . Ainsi, on peut transporter (par homéomorphisme) $f|_{p^{-1}(U)}$ et $g|_{p^{-1}(U)}$ en $f' : U \times F \rightarrow U \times F'$ et $g' : U \times F \rightarrow U \times F'$ (le diagramme définissant f' et g' est une pyramide où 4 côtés sont des triangles, deux émanant de la trivialisations de p et de p' , un émanant de $p' \circ f = p$ (resp. $p' \circ g = p$), le sommet de la pyramide est U , et le carré de base de la pyramide et le dernier triangle sont commutatifs par définition de f et de g). On en déduit qu'il existe $f' \in F'$ tel que $f'(x, f) = (x, f') = g'(x, f)$ pour tout $x \in U$, et finalement que f et g coïncident aussi sur tout $p^{-1}(U)$.

Énoncé Indication

4.2 b) Par ??, p est surjectif. Dans toute composante connexe de X qui intersecte $p^{-1}(b)$ de façon non-triviale, on peut appliquer a), et les morphismes coïncident sur toute la composante. Or, la fibre $p^{-1}(b)$ intersecte de façon non-triviale toute composante connexe de X , car la restriction de $p : X \rightarrow B$ à une composante connexe de X est encore un revêtement, donc surjectif par ??.

Énoncé Indication

4.2 c) Soit $x \in \text{Fix}(\text{Aut}(X))$ un point fixe du groupe des automorphismes du revêtement $p : X \rightarrow B$. Ainsi, $\phi(x) = \psi(x)$ pour tous $\phi, \psi \in \text{Aut}(X)$, mais ceci implique par a) que $\phi = \psi$, et donc que $\text{Aut}(X) = \{1\}$. Donc si $\text{Aut}(X) \neq \{1\}$, il n'existe pas de point fixe.

Énoncé Indication

4.2 d) En effet, G agit par construction par automorphismes de revêtement. Soit réciproquement $\phi \in \text{Aut}(X)$, alors pour $x \in X$, il existe $g \in G$ avec $\phi(x) = g \cdot x$, car x et $\phi(x)$ sont tous les deux dans la fibre sur $p(x)$. Mais alors l'automorphisme donné par l'action de g et ϕ coïncident en x donc partout (par b)).

Énoncé Indication

4.3. Corrigé exercice. — On cherche une application continue $\phi_{nm} : S^1 \rightarrow S^1$ avec $p_m \circ \phi_{nm} = p_n$, i.e. $(\phi_{nm}(z))^m = z^n$ pour tout $z \in S^1$. Ceci veut dire qu'on veut savoir pour quel $n, m \in \mathbb{N}$, l'application $\phi_{nm} : S^1 \rightarrow S^1$, donnée par $\phi_{nm}(z) = z^{\frac{n}{m}}$ est continue. Or, l'application $z \mapsto z^{\frac{1}{m}}$ n'est pas continue pour $m > 1$. En effet, si on suppose ϕ_{1m} continue, on peut relever ϕ_{1m} d'abord sur $[0, 1]$ et ensuite de proche en proche, pour construire une application continue $\Phi_{1m} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\Phi_{1m}(0) = 0$ et $\pi \circ \Phi_{1m} = \phi_{1m} \circ \pi$ où $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ est le revêtement 1-connexe de S^1 . On en déduit que d'un côté $\phi_{1m}(\pi([0, 1])) = \phi_{1m}(S^1)$ est compact (en tant qu'image continue d'un compact, mais de l'autre côté, $\pi(\Phi_{1m}([0, 1])) = \pi([0, \frac{1}{m}])$ qui n'est pas compact si $m > 1$. Cette contradiction montre que ϕ_{1m} n'est pas continue. Le résultat est donc qu'il existe un morphisme de revêtements ϕ_{nm} si et seulement si $m|n$.

Énoncé Indication

4.4. Corrigé exercice. — Soit U un ouvert trivialisant r . On peut supposer U 1-connexe par hypothèse. $r^{-1}(U) = \coprod_{i \in I} V_i$ avec des V_i ouverts 1-connexes. Puisque un revêtement de base 1-connexe est trivial (théorème 11.4 du cours), les V_i sont automatiquement trivialisants pour q , et à fortiori trivialisant pour p . La fibre est discrète : $p^{-1}(z) = q^{-1}(r^{-1}(z))$ pour tout $z \in Z$.

Énoncé Indication

4.5. Corrigé exercice. — L'assertion est locale, on peut donc supposer $X = B \times F$, $X' = B \times F'$ et B connexe. On a donc $f : B \times F \rightarrow B \times F'$, $f(b, f) = b, \alpha(b, f)$ où $\alpha : B \times F \rightarrow F'$ est une application continue. F' discret, α continue et B connexe impliquent que $\alpha(b, f)$ ne dépend pas de b . Notons pour tout $b \in B$, $\alpha(b, -) =: \phi : F \rightarrow F'$. Ainsi, $f^{-1}(B \times \{f'\}) = B \times \phi^{-1}(f')$ est un revêtement trivial de $B \times \{f'\}$.

Énoncé

4.6. Corrigé exercice. — Fixons un point base $b \in B$ et des points base $x \in X$ et $x' = f(x) \in X'$ tels que $\gamma(0) = b$ et $p(x) = p'(x') = b$. γ est donc un lacet dans B qui se relève en x en un unique lacet $\tilde{\gamma}$ dans X , et en x' en un unique chemin $\tilde{\gamma}'$ dans X' . Ces applications donnent un diagramme en forme de tétraèdre dont les sommets sont $[0, 1]$, X , X' et B , et les arêtes sont γ , $\tilde{\gamma}$,

$\tilde{\gamma}'$, et f . Trois des quatre triangles sont commutatifs, montrons que le dernier triangle est commutatif, i.e. que $f \circ \tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}'$. En effet, $f \circ \tilde{\gamma}$ est un chemin dans X' qui commence en x' et qui se projette sur γ , donc par unicité du relevé, on a $f \circ \tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}'$. Maintenant, on a $f(\tilde{\gamma}(0)) = f(\tilde{\gamma}(1))$, et ceci implique donc $\tilde{\gamma}'(0) = \tilde{\gamma}'(1)$, i.e. que $\tilde{\gamma}'$ est aussi un lacet.

Classifions les revêtements connexes de la figure huit à deux feuilles : la figure huit consiste d'un croisement et de deux segments, formant les deux boucles quand ils sont joints au croisement. Un revêtement à deux feuilles de la huit a deux croisements (si on note les deux points au centre de ces deux croisements x_1 et x_2 et le point au centre du croisement de la figure huit b , alors on a que $p^{-1}(b) = \{x_1, x_2\}$ est la fibre sur b dans le revêtement en question), et il reste à joindre entre eux les huit branches des deux croisements. Si vous disposez les deux croisements dans le plan, il est clair qu'il faut joindre les branches à gauche avec celles de gauche et les branches à droite également entre elles (on veut que la partie de gauche (resp. de droite) est projeté sur la partie de gauche (resp. de droite) de la figure huit sous la projection du revêtement p). De chaque côté, il y a donc $C_4^2 = 6$ possibilités d'apparier les branches. Pour caractériser le revêtement, il faut introduire un sens de parcours sur la figure obtenue : si on note x_1 et x_2 les deux croisements, il faut que le relèvement d'un lacet de la base, par exemple du lacet α qui parcourt exactement une fois la boucle de gauche dans le sens des aiguilles d'une montre, soit unique si on spécifie x_1 comme point de départ, i.e. il doit y avoir un seul sens de parcours vers la gauche en partant de x_1 . Du point de vue topologique, on a de chaque côté deux possibilités : soit on ferme les branches en deux boucles disjoints, soit on lie les deux croisements. On a donc finalement quatre possibilités, dont une donne deux figures huit superposées : cette dernière est à écarter puisqu'elle n'est pas connexe. Il reste trois possibilités : le revêtement R_1 où les deux croisements sont bouclés à droite, le revêtement R_2 où les deux croisements sont bouclés à gauche, le revêtement R_3 où les deux croisements sont liés par quatre liens. Il reste à montrer que ces trois revêtements sont deux à deux non-isomorphes ; c'est pour cela que nous utilisons la remarque du début. En effet, nous allons reléver différents lacets faites à partir de α et β (le lacet de la figure huit qui parcourt exactement une fois la boucle de droite dans le sens mathématiquement positif) à partir de x_1 et de x_2 pour montrer que R_1 , R_2 et R_3 sont deux à deux non-isomorphes. C'est le lacet $\alpha\beta^{-1}$ (i.e. on

parcourt d'abord α et ensuite β mais dans le sens opposé (à cause du β^{-1} !)), qui distingue R_1 , R_2 de R_3 , car il se relève dans les deux premiers à partir d'aucun point de la fibre sur b en lacet, mais dans R_3 , il se relève à partir de x_1 et de x_2 en lacet. Il nous reste donc de distinguer R_1 et R_2 entre eux. Ceci se fait à l'aide du lacet $\alpha\beta\alpha$ qui se relève en lacet à partir de x_1 et de x_2 en R_1 , mais pas dans R_2 . En conclusion, nous avons trois revêtements connexes à deux feuillets deux à deux non-isomorphes de la figure huit.

Énoncé

Chapitre III : Groupe fondamental

c3

Construction du groupe fondamental, propriétés générales

12.1. Construction. — Soit (X, x_0) un *espace pointé*, c.-à-d. muni d'un point base x_0 . On note $\Omega(X, x_0)$ l'ensemble des lacets basés en x_0 (voir 11.8) : si $\gamma \in \Omega(X, x_0)$, γ est une application continue $[0, 1] \rightarrow X$ et $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$. Sur l'espace $\Omega(X, x_0)$ on définit la relation d'équivalence suivante : $\gamma \sim \gamma'$ si γ est homotope à γ' parmi les lacets basés (homotopie basée). On note l'ensemble quotient

$$\pi_1(X, x_0) = \Omega(X, x_0) / \sim .$$

Dans la suite, si γ est un lacet basé, on notera $[\gamma]$ sa classe dans le quotient.

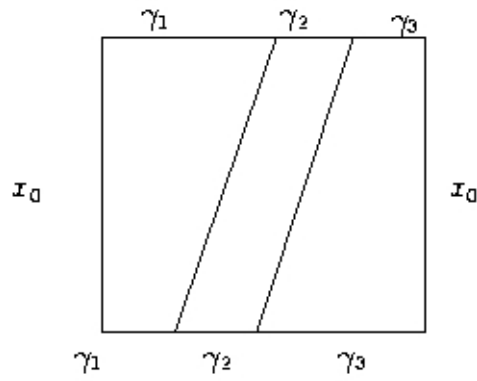
12.2. Théorème. — *Il existe une loi composition des lacets (non unique), compatible avec la relation d'équivalence d'homotopie basée. Cette loi induit sur $\pi_1(X, x_0)$ une loi de groupe; $\pi_1(X, x_0)$ est le groupe fondamental de (X, x_0) .*

Démonstration. — Loi de composition sur $\Omega(X, x_0)$:

$$(\gamma_1 * \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

On vérifie immédiatement que, si $\gamma_1 \sim \gamma'_1$ et $\gamma_2 \sim \gamma'_2$, alors $\gamma_1 * \gamma_2 \sim \gamma'_1 * \gamma'_2$. Donc la loi de composition passe au quotient. Vérifions qu'elle y définit une loi de groupe.

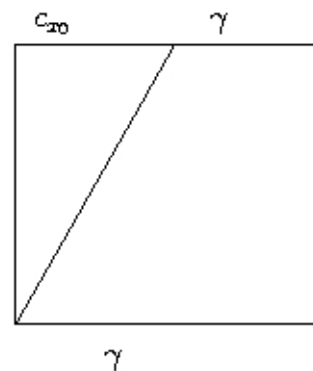
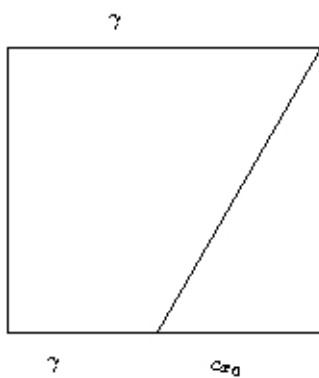
Associativité : $(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3 \sim \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)$.



12.1. Exercice. — Écrire une formule pour l'homotopie suggérée par le dessin ci-dessus.

Élément neutre : soit c_{x_0} le lacet constant en x_0 ; on a

$$\gamma * c_{x_0} \sim c_{x_0} * \gamma \sim \gamma.$$



12.2. Exercice. — Écrire une formule pour l'homotopie suggérée par ces dessins.

Inverse : soit $\gamma^{-1}(t) := \gamma(1 - t)$, le chemin γ parcouru à l'envers. On a

$$\gamma * \gamma^{-1} \sim \gamma^{-1} * \gamma \sim c_{x_0}.$$

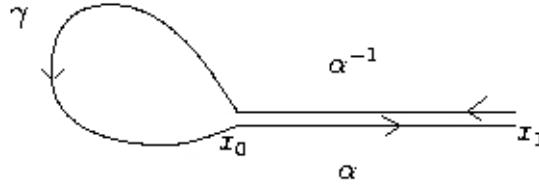
En effet, on définit Γ par

$$\Gamma(t, s) \begin{cases} = \gamma(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1-s}{2} \\ = \gamma(1-s) & \text{si } \frac{1-s}{2} \leq t \leq \frac{1+s}{2} \\ = \gamma(2-2t) & \text{si } \frac{1+s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

et on voit que Γ est une homotopie de lacets basés de $\gamma * \gamma^{-1}$ jusqu'à c_{x_0} .

Cela achève la preuve du théorème. \square

12.3. Proposition (élémentaire). — 1) Si X est un espace connexe par arcs et si α est un chemin de x_0 à x_1 , alors $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$ par l'application $[\gamma] \mapsto [\alpha^{-1} * \gamma * \alpha]$, qui est un isomorphisme de groupes.



2) Si X est connexe par arcs, $\pi_1(X, x_0) = 1 \Leftrightarrow X$ 1-connexe, cf. (11.7).

3) $\pi_1(X_1 \times X_2, (x_1, x_2)) \cong \pi_1(X_1, x_1) \times \pi_1(X_2, x_2)$

4) Si X est un groupe topologique d'élément neutre e , $\pi_1(X, e)$ est abélien.

Démonstration. — Elle est laissée en exercice. Voici une indication pour le 4).

Étant donné deux lacets γ_1 et γ_2 basés en e , on peut fabriquer le lacet *produit* $(\gamma_1 \cdot \gamma_2)(t) := \gamma_1(t) \cdot \gamma_2(t)$. Appliquer cette construction à $(c_e * \gamma_1) \cdot (\gamma_2 * c_e)$ et à $(\gamma_1 * c_e) \cdot (c_e * \gamma_2)$, où c_e est le lacet constant en e . \square

12.4. Proposition (Fonctorialité). — 1) Soit $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ une application continue d'espaces pointés : $f(x_0) = y_0$. On définit $f_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ par

$$f_{\#}([\gamma]) = [f \circ \gamma].$$

C'est un homomorphisme de groupes. Si $f = Id_X$, $f_{\#}$ est l'identité du groupe fondamental de (X, x_0) .

2) Si $f_0 \sim f_1$ (homotopie basée), alors $f_{0\#} = f_{1\#}$.

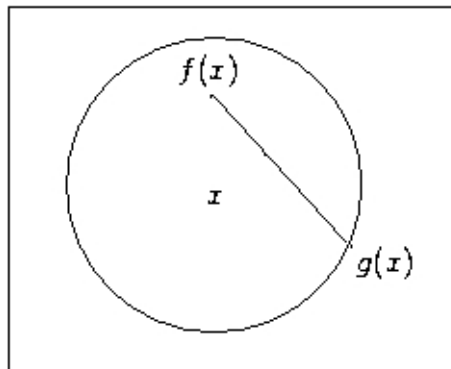
3) Soit $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ et $g : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ deux applications continues. On a $(g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#}$. En particulier si f est un homéomorphisme, alors $f_{\#}$ est un isomorphisme des groupes fondamentaux.

12.3. Exercice. — Que devient la formule d'homotopie du 2) si l'homotopie n'est pas basée ?

12.5. Exercice. — Le théorème de Brouwer pour le disque D^2 :

Toute application continue $f : D^2 \rightarrow D^2$ a un point fixe. (Ici, D^2 est le disque fermé ; montrer que ce serait faux pour le disque ouvert).

Indication : sinon, il existe une application $g : D^2 \rightarrow S^1$ continue vérifiant $g(x) = x$ pour tout $x \in S^1$, donnée sur la figure suivante.



Soit $j : S^1 \rightarrow D^2$ l'inclusion ; décrire $(j \circ g)_{\#}$ et déduire une contradiction.

12.6. Définition. — $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ est une *équivalence d'homotopie basée* s'il existe $g : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ continue telle que $g \circ f \sim Id_X$ et $f \circ g \sim Id_Y$ par des homotopies basées.

Exemple. — Soit $X = S^n$ et $Y = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, $x_0 = y_0 \in S^n$; f est l'inclusion $S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ et $g(x) = \frac{x}{\|x\|}$.

12.4. Exercice. — Démontrer que, si f est une équivalence d'homotopie basée, alors $f_{\#}$ est un isomorphisme. Démontrer que c'est encore vrai si les homotopies sont non-basées.

12.7. Théorème. — Soit X un espace 1-connexe sur lequel un groupe discret G agit continûment à gauche avec la condition (L). Soit $B =_G X$. Alors $\pi_1(B, b_0) \cong G$.

Démonstration. — Soit $p : X \rightarrow B$ la projection sur le quotient; c'est un revêtement d'après 8.5. Soit $x_0 \in p^{-1}(b_0)$; on a $p^{-1}(b_0) = Gx_0$. Soit $\gamma \in \Omega(B, b_0)$ un lacet basé en b_0 . Soit $\tilde{\gamma}$ son relèvement avec $\tilde{\gamma}(0) = x_0$. Alors il existe $g \in G$, unique, tel que $g \cdot x_0 = \tilde{\gamma}(1)$. Par relèvement des homotopies, g ne dépend que de la classe d'homotopie basée de γ . On définit $\phi : \pi_1(B, b_0) \rightarrow G$ par $\phi([\gamma]) = g$.

Affirmation 1 : ϕ est un morphisme de groupes.

$\phi([\gamma_1]) = g_1 \cdot x_0$, $\phi([\gamma_2]) = g_2 \cdot x_0$. Le chemin $g_1 \cdot \tilde{\gamma}_2$ relève γ_2 à partir de $g_1 \cdot x_0$; son extrémité est $g_1 \cdot (g_2 \cdot x_0) = (g_1 g_2) \cdot x_0$. De plus $\tilde{\gamma}_1 * (g_1 \cdot \tilde{\gamma}_2)$ relève $\gamma_1 * \gamma_2$ à partir de x_0 . Donc

$$\phi([\gamma_1][\gamma_2]) = \phi([\gamma_1 * \gamma_2]) = g_1 g_2.$$

Affirmation 2 : ϕ est une bijection.

ϕ est surjectif car X est connexe par arcs. En effet étant donné $g \in G$, il existe un chemin $\tilde{\gamma}$ joignant x_0 à $g \cdot x_0$. Si $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$, $\phi([\gamma]) = g$.

ϕ est injectif. En effet si $\phi([\gamma])$ est l'élément neutre de G , $\tilde{\gamma}$ est un lacet de X basé en x_0 et $p_{\#}([\tilde{\gamma}]) = [\gamma]$. Comme $\pi_1(X, x_0) = 1$, on a $[\gamma] = [c_{b_0}]$ dans $\pi_1(B, b_0)$. \square

12.8. Corollaire. — $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, $\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $\pi_1(P^2) \cong \mathbb{Z}_2$, $\pi_1(SO(3)) \cong \mathbb{Z}_2$.

Démonstration. — Le cercle S^1 est le quotient de \mathbb{R} par \mathbb{Z} agissant par translation.

Le tore T^2 est le quotient de $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ par $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ agissant par translation.

L'espace projectif P^2 est le quotient de la sphère par l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \{Id, -Id\}$.

En utilisant la multiplication des quaternions sur \mathbb{C}^2 , on peut voir que la sphère unité S^3 est un groupe isomorphe à $SU(2)$, le groupe des matrices complexes 2x2 de déterminant 1. Le quotient par le sous-groupe distingué $\{\pm I\}$ est un groupe isomorphe à $SO(3)$. Les détails font l'objet d'un exercice de TD. \square

12.9. Exercice. — La *bouteille de Klein*, notée K^2 , est définie comme quotient de \mathbb{R}^2 par le groupe G engendré par les deux isométries suivantes

$$\begin{aligned} S &: (x, y) \mapsto (x + 1, -y) \\ T &: (x, y) \mapsto (x, y + 1). \end{aligned}$$

Montrer que l'action de G sur \mathbb{R}^2 vérifie la condition (L). Montrer que $\pi_1(K^2)$ est non-abélien.

13. Groupe libre à deux générateurs

13.1. Construction. — On se donne un alphabet à deux lettres $A = \{a, b\}$. Un *mot réduit* est une suite finie de lettres avec exposants

$$a^{n_1} b^{m_1} \dots \text{ ou } b^{m_1} a^{n_1} \dots,$$

où $n_i, m_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et où deux lettres consécutives sont distinctes. On définit $F_2 = \{\text{mots réduits à deux lettres}\} \cup \{\text{mot vide, noté } e \text{ ou } 1\}$.

C'est un monoïde pour l'opération de juxtaposition des mots (*concaténation*), suivie de la *réduction* :

$$\dots a^n a^m \dots \Rightarrow \begin{cases} \dots a^{n+m} \dots & \text{si } n + m \neq 0 \\ \dots & \text{si } n + m = 0. \end{cases}$$

Dans ce dernier cas on a effacé du mot les deux lettres $a^n a^m$.

Exemple. — $(ab^2 a^{-1})(ab^3) = ab^5$

$(ab^2 a^{-1})(ab^{-2}) = a$

$(ab^2 a^{-1})(ab^{-2} a^{-1}) = 1.$

13.2. Proposition. — 1) Pour cette loi de composition (concaténation-réduction) F_2 est un groupe. L'inverse de a est a^{-1} ; celui de b est b^{-1} et $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

2) Soit G un groupe et $\phi : A \rightarrow G$ une application. Alors ϕ se prolonge de façon unique en un homomorphisme de groupes $\bar{\phi} : F_2 \rightarrow G$ par

$$\bar{\phi}(a^{n_1}b^{m_1} \dots) = (\phi(a))^{n_1}(\phi(b))^{m_1} \dots$$

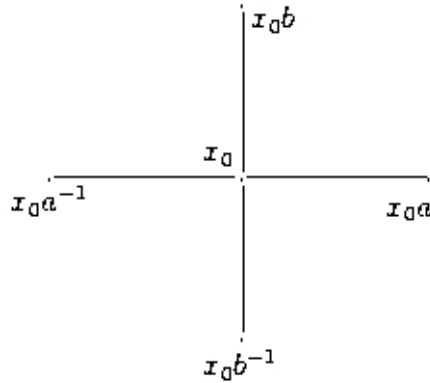
13.3. Définition. — La longueur $l(\lambda)$ d'un mot réduit λ est la somme des valeurs absolues des exposants.

Exemple. — $l(e) = 0$, $l(a) = l(a^{-1}) = l(b) = l(b^{-1}) = 1$, $l(a^{-1}ba) = 3$,
 $l(\mu\nu) \leq l(\mu) + l(\nu)$ (inégalité du triangle).

Exercice : caractériser l'égalité.

13.4. Graphe de Cayley. — Le graphe de Cayley de F_2 est l'espace topologique Γ formé d'un ensemble discret $\Gamma^{[0]}$ de sommets et d'arêtes joignant les sommets selon la règle suivante :

- $\Gamma^{[0]} = F_2$;
- on joint x_0 à x_1 par une arête (copie de $[0, 1]$) si et seulement si $x_1 = x_0a^{\pm 1}$ ou $x_1 = x_0b^{\pm 1}$.



On définit une distance sur le graphe de Cayley. D'abord pour $x, y \in \Gamma^{[0]}$ on pose

$$d(x, y) = d(e, x^{-1}y) = l(x^{-1}y).$$

C'est une distance sur $\Gamma^{[0]}$ à cause de l'inégalité de triangle :

$$l(x^{-1}z) \leq l(x^{-1}y) + l(y^{-1}z).$$

Les extrémités d'une même arête sont à distance 1. Les extrémités d'une croix sont à distance 2. Si $[x, xg]$ et $[y, yh]$ sont deux arêtes sans extrémités communes, alors parmi les quatre paires (x, y) , (x, yh) , (xg, y) et (xg, yh) , il y en a une seule à distance minimale. Disons que c'est (x, y) ; alors

$$d(xg, y) = d(x, yh) = d(x, y) + 1 \quad \text{et} \quad d(xg, yh) = d(x, y) + 2.$$

On prolonge la distance d à tout Γ comme suit : soit x et y sont deux sur deux arêtes α et β ;

- si $\alpha = \beta$, on définit $d(x, y)$ comme la distance euclidienne de x à y sur l'arête identifié à $[0, 1]$;
- si $\alpha \neq \beta$, et si x_0 et y_0 sont leurs extrémités respectives les plus proches entre elles, on pose :

$$d(x, y) = d(x, x_0) + d(x_0, y_0) + d(y_0, y)$$

13.5. Théorème. — 1) F_2 agit à gauche par isométries de Γ en vérifiant la condition (L).

2) Le quotient est la figure huit.

3) Γ est contractile.

4) $\pi_1(\text{huit}) \cong F_2$.

Démonstration. — 1) Si $g \in F_2$, $x \in \Gamma^{[0]}$ et $y \in \Gamma^{[0]}$, alors

$$d(gx, gy) = l(x^{-1}g^{-1}gy) = l(x^{-1}y) = d(x, y).$$

Si α et β est une paire d'arêtes et si x_0 et y_0 sont leurs extrémités les plus proches, gx_0 et gy_0 sont alors les extrémités les plus proches entre elles des arêtes $g\alpha$ et $g\beta$. Donc pour $x \in \alpha$ et $y \in \beta$, $d(gx, gy) = d(x, y)$.

13.1. Exercice. — Vérifier la condition (L) et 2).

3) Soit $x \in \Gamma^{[0]}$ avec $l(x) = n$. On a une suite de mots $x_0 = e, x_1, \dots, x_n = x$ avec $l(x_k) = k$; on prend les sous-mots de x à partir de la gauche : par exemple, si $x = a^{-2}b^3$, alors $x_1 = a^{-1}$, $x_2 = a^{-2}$, $x_3 = a^{-2}b$, etc.

Pour $t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, on définit $c(x, t)$ comme le point de $[x_k, x_{k+1}]$ à distance $n(t - \frac{k}{n})$ de x_k .

13.2. Exercice. — Montrer que $c(x, t)$ se prolonge continûment à $\Gamma \times [0, 1] \rightarrow \Gamma$ avec $c(x, 1) = x$ et $c(x, 0) = e$.

Donc Γ est contractile. En fait, il y a un unique plus court chemin joignant deux points, comme dans un convexe.

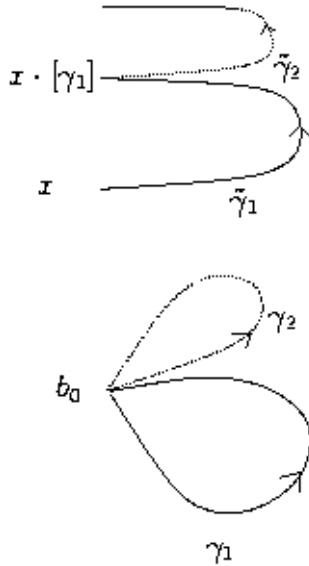
4) On applique le théorème 12.7 ci-dessus. □

14. La suite exacte des revêtements

Dans toute la suite, $p : X \rightarrow B$ est un revêtement, X et B sont connexes par arcs ; $x_0 \in X$ et $b_0 = p(x_0)$ sont des points base.

14.1. Action à droite de $\pi_1(B, b_0)$ sur la fibre base. — Pour $x \in p^{-1}(b_0)$ et $[\gamma] \in \pi_1(B, b_0)$, on définit $x \cdot [\gamma]$ comme l'extrémité du relèvement de γ à partir de x . Vérifions la formule d'associativité d'une loi d'action à droite :

$$x \cdot [\gamma_1][\gamma_2] = x \cdot [\gamma_1 * \gamma_2] = (x \cdot [\gamma_1]) \cdot [\gamma_2].$$



Pour cette action, le stabilisateur de x_0 est le sous-groupe $\mathfrak{S}(p_{\#})$. En effet, l'égalité $x_0 \cdot [\gamma] = x_0$ énonce que γ se relève en un lacet basé en x_0 , autrement dit $[\gamma]$ est dans l'image de $p_{\#}$.

Soit $q : \pi_1(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0)$ l'application définie par $[\gamma] \mapsto x_0 \cdot [\gamma]$.

- 14.2. Théorème.** — 1) $p_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)$ est injectif.
 2) L'application q donnée par l'action sur x_0 est un morphisme de $\pi_1(B, b_0)$ -ensembles à droite, c.-à-d. d'ensembles munis d'une action à droite de $\pi_1(B, b_0)$. Elle induit un isomorphisme $p^{-1}(b_0) \cong_{p_{\#}} \pi_1(X, x_0) \setminus \pi_1(B, b_0)$.
 3) La suite ci-dessous est "exacte" en convenant que le noyau de q est le stabilisateur de x_0 :

$$1 \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{p_{\#}} \pi_1(B, b_0) \xrightarrow{q} p^{-1}(b_0) \longrightarrow 1$$

Démonstration. — 1) Soit $\tilde{\gamma}$ un lacet en x_0 tel que $p \circ \tilde{\gamma} \sim c_{b_0}$ (homotopie basée). Le relèvement de cette homotopie à partir de $\tilde{\gamma}$ aboutit à un lacet dans $p^{-1}(b_0)$, qui est discret ; donc ce lacet final est constant.

2) Posons $G := \pi_1(B, b_0)$ et $H := \mathfrak{S}(p_{\#})$. On a $q(g) = x_0 \cdot g$ et

$$q(Hg) = x_0 \cdot Hg = (x_0 \cdot H) \cdot g = x_0 \cdot g$$

Donc q est constant sur les classes à droite et se factorise par $H \setminus G$. D'où le diagramme commutatif ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(B, b_0) & \xrightarrow{q} & p^{-1}(b_0) \\
 \downarrow & \nearrow \bar{q} & \\
 p_{\#}\pi_1(X, x_0) \setminus \pi_1(B, b_0) & &
 \end{array}$$

Comme X est connexe par arcs, q , et donc \bar{q} , est surjectif.

Voyons que \bar{q} est un morphisme de G -ensembles à droite :

$$\begin{aligned}
 \bar{q}(Hg \cdot g') &= q(Hg \cdot g') = x_0 \cdot Hgg' = x_0 \cdot gg' \\
 &= (x_0 \cdot g) \cdot g' = q(g) \cdot g' = \bar{q}(Hg) \cdot g'
 \end{aligned}$$

Voyons que \bar{q} est injectif. $\bar{q}(Hg_1) = \bar{q}(Hg_2) \Rightarrow \bar{q}(H) = \bar{q}(Hg_2g_1^{-1})$ (car \bar{q} est un morphisme) $\Rightarrow x_0 = x_0 \cdot g_2g_1^{-1} \Rightarrow g_2g_1^{-1} \in H$ (puisque H est le stabilisateur de x_0) $\Rightarrow Hg_1 = Hg_2$. Finalement \bar{q} est un isomorphisme.

3) L'exactitude de la suite est une réécriture de ce qui a été déjà dit. \square

14.1. Exercice. — Calculer $p_{\#}$ si $X = B = S^1$ et $p(z) = z^2$.

14.2. Exercice. — On suppose que $B = G \setminus X$ où G agit continûment à gauche sur X et $p : X \rightarrow G \setminus X$. On identifie $p^{-1}(b_0) = G \cdot x_0$ à G . Montrer qu'alors q est un morphisme de groupes. En déduire que l'image de $p_{\#}$ est un sous-groupe distingué.

FRANÇOIS LAUDENBACH & FRIEDRICH WAGEMANN

Département de mathématiques, Université de Nantes,

2 Rue de la Houssinière F-44322 Nantes Cedex 03

UNIVERSITÉ DE NANTES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
Maîtrise : Topologie Algébrique

François Laudenbach (CM) & Friedrich Wagemann (TD)

td3

Travaux dirigés de Mathématiques, Fiche 5, Topologie algébrique
2005-2006

Le Groupe Fondamental.

5.1. Exercice. — Soit X un groupe topologique avec élément neutre e . Montrer que $\pi_1(X, e)$ est un groupe abélien (Indication : montrer que le produit de $\pi_1(X, e)$ peut s'exprimer par le produit point par point de X).

Indication Corrigé

5.2. Exercice. — Soit X un espace topologique connexe par arcs, et $x, y \in X$ deux points distincts. Alors, les groupes fondamentaux $\pi_1(X, x)$ et $\pi_1(X, y)$ basés en x et en y sont isomorphes.

Sous quelles conditions deux chemins γ et γ' de x à y donnent-ils lieu au même isomorphisme $\pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, y)$?

Sous quelles conditions, a-t-on : pour tous points $x, y \in X$, toutes les classes de chemins de x à y donnent le même isomorphisme $\pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, y)$?

Corrigé

5.3. Exercice. — Calculer le groupe fondamental des espaces projectifs réels $\mathbb{R}P^n$, de la bouteille de Klein K , du ruban de Möbius M .

Indication Corrigé

5.4. Exercice. — Soient X un espace topologique et $A \xrightarrow{i} X$ un sous-espace de X . A est appelé un *rétracte* de X s'il existe une application continue $r : X \rightarrow A$ telle que $r \circ i = id_A$. Donner des exemples d'un rétracte de \mathbb{R}^n , de

$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

On appelle A un *rétracte par déformation* si en plus (des exigences pour être un rétracte) $i \circ r$ est homotope à id_x via une homotopie *relative* à A , i.e. une homotopie qui sur A est l'identité de A pour tout temps. On se servira de cette définition dans 5.6.

Supposons maintenant que A soit un rétracte de X , et soit $a \in A \subset X$. Montrer que si $i_{\#}(\pi_1(A))$ est un sous-groupe distingué de $\pi_1(X, a)$, alors

$$\pi_1(X, a) \cong i_{\#}(\pi_1(A, a)) \times \ker(r_{\#}).$$

(Indication : Montrer d'abord que $\ker(r_{\#}) \cap i_{\#}\pi_1(A, a) = \{e\}$. Montrer ensuite que les éléments de $i_{\#}(\pi_1(A, a))$ et de $\ker(r_{\#})$ commutent.)

Indication Corrigé

5.5. Exercice. — Soit A un sous-espace de X , X et $Y \neq \emptyset$ étant des espaces topologiques. Montrer que $A \times Y$ est un rétracte de $X \times Y$ si et seulement si A est un rétracte de X .

Corrigé

5.6. Exercice. — Décrire le groupe fondamental du tore $\mathbb{T} = S^1 \times S^1$. Montrer que le sous-ensemble $S^1 \times \{x_0\}$ est un rétracte de \mathbb{T} , mais qu'il n'est pas un rétracte par déformation.

(Indication : appliquer $\pi_1(-, -)$ (qui à une paire consistant d'un espace topologique X et d'un point $x \in X$ associe le groupe fondamental $\pi_1(X, x)$ basé en x) à un rétracte et à un rétracte par déformation et comparer.)

Corrigé

5.7. Exercice. — Soit $H < G$ un sous-groupe d'un groupe G agissant avec la propriété (L) sur un espace topologique X . Montrer que

$$H \backslash X \rightarrow G \backslash X$$

est un revêtement régulier si et seulement si H est un sous-groupe distingué de G .

(Indication : soit H un sous-groupe et supposons que l'ensemble des classes à droite $H \backslash G$ de G par rapport à H soit muni d'une loi de groupe $*$ compatible avec celle de G , i.e. $(x_1 * x_2) \cdot g = x_1 * (x_2 \cdot g)$ pour tout $x_1, x_2 \in H \backslash G$ et tout

$g \in G$. Montrer que alors H est distingué. Réciproquement, si H est distingué dans G , notons $A := H \backslash G$. On considère l'espace quotient $A \times_G X$ de $A \times X$ (topologie discrète sur A) par l'action diagonale (i.e. $g \cdot (a, x) := (a \cdot g^{-1}, g \cdot x)$) de G sur les deux facteurs. Montrer que A agit sur $A \times_G X$ avec (L), que $G \backslash X$ s'identifie à $A \backslash (A \times_G X)$ et que $H \backslash X$ s'identifie à $(A \times_G X)$, et que la projection $A \times_G X \rightarrow A \backslash (A \times_G X)$ définit un revêtement régulier.)

Indication Corrigé

5.8. Exercice. — Soit $f : S^1 \rightarrow S^1$ l'application $z \mapsto z^n$. Calculer son induite $f_\# : \pi_1(S^1, 0) \rightarrow \pi_1(S^1, 0)$.

Corrigé

UNIVERSITÉ DE NANTES
 DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Maîtrise : Topologie Algébrique

François Laudenbach (CM) & Friedrich Wagemann (TD)

Le groupe fondamental : indications pour les exercices

5.1. Indication exercice. — **5.1** Montrer que pour deux lacets $f, g : [0, 1] \rightarrow G$ avec $f(0) = f(1) = g(0) = g(1) = e$, l'élément neutre de G , on a $(f * g)(t) \sim (f \cdot g)(t)$ par une homotopie basée.

Énoncé Corrigé

5.3. Indication exercice. — **5.3** Il suffit d'identifier les espaces $\mathbb{R}P^n$, K et M comme espaces quotient X/G par l'action vérifiant la condition (L) d'un groupe G sur un espace 1-connexe X pour conclure $\pi_1(X/G, b) \cong G$ pour un point base b .

Énoncé Corrigé

5.4. Indication exercice. — **5.4** On pourra utiliser (et le montrer!) le lemme qui dit que si A, B sont sous-groupes distingués d'un groupe G d'intersection $A \cap B = \{e\}$, alors $ab = ba$ pour tous $a \in A$ et $b \in B$. L'application, dont il s'agit de montrer que c'est un isomorphisme, sera $f : A \times B \rightarrow G$, $(a, b) \mapsto ab$.

Énoncé Corrigé

5.7. Indication exercice. — **5.7** Cet exercice est un peu long et assez difficile. Il pourra être traité un peu plus tard (il se rapporte à la définition 21.6). Sinon, il suffit de suivre les instructions...

Énoncé Corrigé

UNIVERSITÉ DE NANTES
 DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
 Maîtrise : Topologie Algébrique

François Laudenbach (CM) & Friedrich Wagemann (TD)

Travaux dirigés de Mathématiques, Fiche 5, Topologie algébrique
 2005-2006

Le groupe fondamental : solutions des exercices.

5.1. Corrigé exercice. — L'idée est d'exprimer d'abord le produits de deux lacets dans G par le produit d'éléments de G : montrons que pour deux lacets $f, g : [0, 1] \rightarrow G$ avec $f(0) = f(1) = g(0) = g(1) = e$, l'élément neutre de G , on a $(f * g)(t) \sim (f \cdot g)(t)$ par une homotopie basée, i.e. qui fixe le point base. Par définition, on a $(f * g)(t) = f(2t)$ pour $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ et $(f * g)(t) = g(2t - 1)$ pour $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$, tandis que $(f \cdot g)(t) = f(t) \cdot g(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$. Écrivons $H(s, t) = f(a(s, t)) \cdot g(b(s, t))$ de telle façon que $a(s, t)$ et $b(s, t)$ soient égaux à t pour $s = 0$, et fassent apparaître $2t$ dans f pour $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ et $(2t - 1)$ dans g pour $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ si $s = 1$. Les applications continues $a : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $b : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ s'obtiennent à partir de ces conditions par interpolation linéaire. Il s'avère que

$$a(s, t) = \begin{cases} t + st & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ t + (1 - t)s & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

et

$$b(s, t) = \begin{cases} t - st & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ t + (t - 1)s & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

satisfont ces conditions, et sont continues (d'après exo 2.11, il suffit pour cette dernière affirmation de vérifier que les bouts de a (resp. de b) définis pour $t \leq \frac{1}{2}$ et pour $t \geq \frac{1}{2}$ sont égaux en $t = \frac{1}{2}$, ce qui est le cas). On a donc par construction $H(0, t) = f(t) \cdot g(t) = (f \cdot g)(t)$ et

$$H(1, t) = \begin{cases} f(2t) \cdot g(0) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f(1) \cdot g(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = (f * g)(t).$$

En plus, $H(s, 0) = e$ et $H(s, 1) = e$ pour tout $s \in [0, 1]$, donc H est une homotopie qui fixe le point base.

Pour en conclure que $f * g \sim g * f$ par une homotopie basée, il suffit de remarquer que $H'(s, t) = f(b(s, t)) \cdot g(a(s, t))$ nous fournit une homotopie basée entre $f \cdot g$ et $g * f$. Donc, puisque l'homotopie basée est une relation d'équivalence, $f * g$ est homotope à $g * f$ par une homotopie basée.

Énoncé Indication

5.2. Corrigé exercice. — Soit γ un chemin de x à y , alors $c_\gamma : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, y)$ défini par $c_\gamma(\alpha) = \gamma^{-1} * \alpha * \gamma$ est un isomorphisme de groupes ; en effet, nous avons noté $\gamma^{-1} : [0, 1] \rightarrow X$ le chemin inverse de y à x , et c_γ est bien défini, car $(\gamma^{-1} * \alpha * \gamma)(0) = (\gamma^{-1} * \alpha * \gamma)(1) = y$. L'inverse de c_γ est clairement $c_{\gamma^{-1}}$.

γ et γ' donnent lieu au même isomorphisme, i.e. $c_\gamma = c_{\gamma'}$, si et seulement si $\gamma^{-1} * \alpha * \gamma = (\gamma')^{-1} * \alpha * (\gamma')$ pour tout $\alpha \in \pi_1(X, x)$. Ceci veut dire que la classe (qu'on notera encore $\gamma * (\gamma')^{-1}$) du lacet $\gamma * (\gamma')^{-1}$ est dans le centre $Z(\pi_1(X, x))$ de $\pi_1(X, x)$.

Le fait que pour tous $x, y \in X$ et tous $\gamma, \gamma' : x \mapsto y$, on ait $c_\gamma = c_{\gamma'}$ est équivalent à ce que pour tous $x, y \in X$ et tous $\gamma, \gamma' : x \mapsto y$, on ait $\gamma * (\gamma')^{-1} \in Z(\pi_1(X, x))$. Mais toute classe d'un lacet $\alpha \in \pi_1(X, x)$ se décompose $\alpha = \gamma * (\gamma')^{-1}$ en découpant α en un point y arbitrairement choisi, donc $\alpha \in Z(\pi_1(X, x))$ pour tout $\alpha \in \pi_1(X, x)$, et par suite $\pi_1(X, x)$ est abélien. La condition est donc que $\pi_1(X, x)$ est abélien pour un point $x \in X$ (et donc pour tout point!).

Énoncé

5.3. Corrigé exercice. — Nous utiliserons le théorème 12.7 du cours : il faut identifier les espaces $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, K et M comme espaces quotient X/G par l'action vérifiant la condition (L) d'un groupe G sur un espace 1-connexe X pour conclure $\pi_1(X/G, b) \cong G$ pour un point base b .

L'espace projectif réel $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est par définition l'espace quotient X/\mathcal{R} de $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence

$$v \sim v' \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^* : v' = \lambda v.$$

C'est un quotient par l'action d'un groupe, le groupe multiplicatif \mathbb{R}^* , donc la projection est ouverte (cf exo 2.8 1a)). Montrons que le quotient X/\mathcal{R} est séparé en montrant que le graphe $\text{gr}(\mathcal{R})$ de la relation d'équivalence est fermée (cf exo 2.6 2a)). En effet, $\text{gr}(\mathcal{R})$ est la réunion sur tous les $v \in X$ des couples $(v, \lambda v)$ de vecteurs colinéaires à v . En restreignant le produit extérieur $\wedge : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \Lambda^2 \mathbb{R}^{n+1}$, $(v, w) \mapsto v \wedge w$ à X en $\wedge : X \times X \rightarrow \Lambda^2 \mathbb{R}^{n+1}$, on voit que $\text{gr}(\mathcal{R}) = \wedge^{-1}(0)$. En remarquant que $\wedge : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \Lambda^2 \mathbb{R}^{n+1}$ est linéaire, et donc continue entre espaces vectoriels de dimension finie, on voit donc que $\text{gr}(\mathcal{R})$ est fermé.

Afin d'identifier $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ à un quotient par une action vérifiant (L), il est plus facile de d'abord identifier $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ à S^n/\mathbb{Z}_2 , car cette dernière action vérifie automatiquement (L) puisque c'est l'action libre d'un groupe fini sur un espace séparé (il suffit de saturer les ouverts séparant les points d'une orbite). L'identification $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \cong S^n/\mathbb{Z}_2$ se fait par le diagramme

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^n/\mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\bar{i}} & \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \end{array}$$

Ici, $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ agit sur la sphère S^n par l'*involution antipodale*, i.e. par multiplication par ± 1 , $i : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ est l'inclusion, et l'application continue \bar{i} existe par la propriété universelle du quotient. La séparation du quotient S^n/\mathbb{Z}_2 se déduit directement de exos 2.6 2b) et 2.8 1b), ou de l'existence de l'injection continue \bar{i} . \bar{i} est donc une bijection continue de compact sur séparé, et par suite un homéomorphisme (exo 2.4 2)). En conclusion, nous avons montré que $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), b) \cong \mathbb{Z}_2$ pour $n \geq 2$, puisque S^n est 1-connexe dans ce cas (cf proposition 11.3 du cours).

Le cas $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est un cas spécial : soit $\psi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ défini par $\psi(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ où $(x, y) \in S^1 \subset \mathbb{R}^2$. $x^2 + y^2 = 1$ implique $(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = 1$, donc $\psi(S^1) \subset S^1$. Étant donné $(x, y) \in S^1$, $a = \frac{y}{\sqrt{2(1-x)}}$ et $b = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{2}}$ vérifient $(a^2 - b^2, 2ab) = (x, y)$, ainsi $\psi(S^1) = S^1$. ψ est constante sur les classes d'équivalence de la relation et passe au quotient en $\bar{\psi} : S^1/\mathbb{Z}_2 \rightarrow S^1$. On vérifie que $\bar{\psi}$ est injective, donc une bijection continue de compact sur

séparé et par suite un homéomorphisme (exo 2.4 2)). En conclusion, le groupe fondamental de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est $\mathbb{Z} = \pi_1(S^1, b)$.

En ce qui concerne le ruban de Möbius M et la bouteille de Klein K (cf exos 3.5 et 3.6), on les a déjà identifié à des quotients X/G par une action vérifiant (L) (cf 3.5 3) et 3.6 3)). On en déduit que $\pi_1(M, b) = \mathbb{Z}$, le groupe cyclique engendré par σ , et que $\pi_1(K, b) = G$, le sous-groupe engendré par σ et τ dans le groupe $O(2)$ des isométries du plan (cf 3.5).

Énoncé Indication

5.4. Corrigé exercice. — L'ensemble $\{0\}$ est un rétracte de \mathbb{R}^n : l'application $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \{0\}$ envoie tout point sur 0, elle est trivialement continue. C'est même un rétracte par déformation, car l'application constante en 0 est homotope à l'identité ; une homotopie $H : \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est donnée par $H(x, t) = tx$.

La sphère $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ est un rétracte, même un rétracte par déformation, de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$: nous proposons comme rétraction $r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1}$ l'application $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$, et pour l'homotopie $H : (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times [0, 1] \rightarrow (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ la combinaison convexe $H(x, t) = tx + (1-t)\frac{x}{\|x\|}$.

Montrons finalement la formule $\pi_1(X, a) \cong i_{\#}(\pi_1(A, a)) \times \text{Ker}(r_{\#})$, et pour cela, montrons d'abord que $i_{\#}(\pi_1(A, a)) \cap \text{Ker}(r_{\#}) = \{e\}$, où e est l'élément neutre de $\pi_1(X, a) =: G$. Simplifions les notations en $i_{\#}(\pi_1(A, a)) =: A$ et $\text{Ker}(r_{\#}) =: B$. En effet, si $x \in A \cap B$, alors $r_{\#}(x) = e$ et il existe $y \in G$ avec $x = i_{\#}(y)$. Ainsi $y = r_{\#}(i_{\#}(y)) = e$ et aussi $x = e$, où nous avons utilisé $r_{\#} \circ i_{\#} = \text{id}_{\pi_1(A, a)}$. Utilisons maintenant un petit lemme algébrique qui dit que si A, B sont sous-groupes distingués d'un groupe G d'intersection $A \cap B = \{e\}$, alors $ab = ba$ pour tous $a \in A$ et $b \in B$. En effet, pour $a \in A$ et $b \in B$, il existent par hypothèse $a' \in A$ et $b' \in B$ avec $ab = ba' = b'a$, et par suite $aba^{-1}b^{-1} = b'b^{-1} = ba'a^{-1}b^{-1} \in A$, i.e. $b'b^{-1} \in A \cap B = \{e\}$. Donc $ab = ba$. On définit alors un homomorphisme de groupes

$$f : A \times B \rightarrow G, \quad (a, b) \mapsto ab.$$

f est un homomorphisme puisque a et b commutent, et f est injectif par $A \cap B = \emptyset$. Il reste à montrer que f est surjectif. Or, $(i_{\#}(r_{\#}(g)), (i_{\#}(r_{\#}(g)))^{-1}g)$ est un antécédant de $g \in G$. D'où l'isomorphisme voulue.

Énoncé Indication

5.5. Corrigé exercice. — Si $i : A \xrightarrow{\leftarrow} X : r$ est un rétracte, on a $r \circ i = \text{id}_A$ et $r(a) = a$ pour tout $a \in A$. On en déduit des applications continues $i \times \text{id}_Y : A \times Y \xrightarrow{\leftarrow} X \times Y : r \times \text{id}_Y$ (cf exo 2.2). Elles vérifient $(r \times \text{id}_Y) \circ (i \times \text{id}_Y) = \text{id}_A \times \text{id}_Y = \text{id}_{A \times Y}$ et $(r \times \text{id}_Y)(a, y) = (a, y)$ pour tous $a \in A$ et $y \in Y$. Ainsi $A \times Y$ est un rétracte de $X \times Y$. Soit donc réciproquement $i : A \times Y \xrightarrow{\leftarrow} X \times Y : r$ un rétracte de $X \times Y$. Puisque $Y \neq \emptyset$, il existe $y \in Y$. L'application $I : X \rightarrow X \times \{y\}$ est continue (cf exo 2.2). Ainsi $R : X \rightarrow X \times \{y\} \rightarrow X \times Y \rightarrow A \times Y \rightarrow A$ qui est la composée $R = \text{proj}_A \circ r \circ \text{incl} \circ I$, est continue ($\text{incl} : X \times \{y\} \rightarrow X \times Y$ est l'inclusion). On voit que R décrit le rétracte A de X .

Énoncé

5.6. Corrigé exercice. — Le corollaire 12.8 du cours affirme que $\pi_1(\mathbb{T}^2, b) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. On peut se représenter le tore \mathbb{T}^2 comme surface dans \mathbb{R}^3 (muni de son repère usuel $(0; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$) obtenue en tournant un cercle C strictement contenu dans la partie de \mathbb{R}^3 décrite par $x > 0$, $y = 0$, et $z > 0$, autour de l'axe des z . En choisissant un point base $b = (b_1, b_2, b_3) \in C$, le groupe fondamental de \mathbb{T}^2 est engendré par le lacet α basé en b qui fait le tour de C , et un lacet β qui fait le tour d'un cercle obtenu en intersectant \mathbb{T}^2 avec le plan affine parallèle au plan (x, y) passant par b_3 . On vérifie facilement que $\alpha * \beta = \beta * \alpha$, et un isomorphisme $\pi_1(\mathbb{T}^2, b) = \langle \alpha, \beta \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ est obtenu par $\alpha \mapsto (1, 0)$ et $\beta \mapsto (0, 1)$. Une autre interprétation est celle sous-jacente au théorème 12.7 du cours; dans cette description, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ est le groupe des translations du plan engendré par $(x, y) \mapsto (x + 1, y)$ et $(x, y) \mapsto (x, y + 1)$.

Un rétracte par déformations est un sous-espace topologique $A \subset X$ donné par l'inclusion $i : A \rightarrow X$ et une rétraction $r : X \rightarrow A$ avec $r_{\#} \circ i_{\#} = \text{id}_{\pi_1(X, a)}$ et $i_{\#} \circ r_{\#} \sim \text{id}_{\pi_1(A, a)}$ (pour un point $a \in A$). Il est clair que un rétracte par déformation A et l'espace topologique ambiant X ont même groupe fondamental, puisque $i_{\#}$ et $r_{\#}$ fournissent des homomorphismes de groupes entre $\pi_1(X, a)$ et $\pi_1(A, a)$, l'un inverse de l'autre. Ainsi, $S^1 \times \{x_0\} \subset \mathbb{T}^2$ n'est pas un rétracte par déformations de \mathbb{T}^2 , puisque $\pi_1(S^1 \times \{x_0\}, (b, x_0)) \cong \pi_1(S^1, b) \cong \mathbb{Z}$, pendant que $\pi_1(\mathbb{T}^2, (x, y)) \cong \mathbb{Z}^2$. Montrons que $S^1 \times \{x_0\} \subset \mathbb{T}^2$ est quand même un rétracte. En effet, si on décrit un point $w \in \mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ par $w = (g, h)$, alors l'application $r : \mathbb{T}^2 \rightarrow S^1 \times \{x_0\}$ donnée par $w = (g, h) \mapsto (g, x_0)$ est continue (cf exo 2.2), donc $S^1 \times \{x_0\} \subset \mathbb{T}^2$ est un rétracte.

Énoncé

5.7. Corrigé exercice. — Supposons donc que l'ensemble $H \backslash G$ des classes à droite par rapport à H est muni d'un loi de groupe compatible avec l'action de G ($(x_1 * x_2) \cdot g = x_1 * (x_2 \cdot g)$ pour tous $x_1, x_2 \in H \backslash G$ et tout $g \in G$). On a $(x * y) \cdot g = x * (y \cdot g)$, et donc $\text{Stab}(x * y) = \text{Stab}(y)$, puisque $*$ est une lois de groupe. De même, $\text{Stab}(y * x) = \text{Stab}(x)$. Donc, si e désigne l'élément neutre de $H \backslash G$ par rapport à la loi $*$, on a $\text{Stab}(e) = \text{Stab}(x)$ pour tout $x \in H \backslash G$. En particulier, tous les stabilisateurs coïncident. Par ailleurs, si $p : G \rightarrow H \backslash G$ désigne la projection (qui n'est pas forcément un homomorphisme de groupes!), on a $\text{Stab}(p(e_G)) = \{g \in G \mid H \cdot g = H\} = H$ où e_G est le neutre de G , et donc $p(e_G) = H \in H \backslash G$. De même, on a $\text{Stab}(Hg) = \{g' \in G \mid Hg \cdot g' = Hg\} = g^{-1}Hg$. Puisque tous les stabilisateurs coïncident, on a $H = g^{-1}Hg$ pour tout $g \in G$, et H est distingué.

Soit réciproquement H distingué dans G . Nous mettons en évidence un revêtement régulier à l'aide de la *construction de Borel* : soit $A := H \backslash G$ l'ensemble des classes à droite. D'un autre côté, A est un groupe (quotient) par hypothèse. Montrons que A agit sur $A \times_G X$ avec la condition (L). Ici, $A \times_G X$ est le quotient $\pi : A \times X \rightarrow A \times_G X$ de $A \times X$ sous l'*action diagonale* $g \cdot (a, x) = (ag^{-1}, gx)$ de G sur $A \times X$ ($g \in G$, $a \in A$ et $x \in X$). Ainsi la projection $A \times_G X \rightarrow_G \backslash X$ est un revêtement régulier de fibre A par le théorème 8.5 du cours. A agit sur $A \times_G X$ par multiplication à gauche : $a \cdot (b, x) = (ab, x)$. C'est cette action à *gauche* qui passe au quotient, car le quotient par rapport à l'action diagonale fait intervenir l'action à *droite* : $a \cdot (b, x) = (ab, x) = a \cdot (bg^{-1}, gx) = (abg^{-1}, gx)$.

Pour montrer la condition (L), soit $(a, x) \in A \times_G X$, et soit U un voisinage ouvert de $x \in X$ vérifiant la condition (L) pour X en x . Alors $\pi(\{a\} \times U)$ est un ouvert vérifiant (L). En effet, soit $a = Hg \in A$ et $y \in U$. Si l'intersection de l' A -orbite de (Hg, y) avec $\pi(\{a\} \times U)$ contient un élément $b \cdot (Hg, y) = (Hg, u)$ où $b = Hh$, alors $(Hhg, y) = (Hgg^{-1}hg, y) =: (Hgh', y) = (Hgh', (h')^{-1}h'y) = (Hg, h'y) \stackrel{!}{=} (Hg, u)$ où nous avons noté $h' = g^{-1}hg$, et on en déduit $u = h'y$. Mais le fait que U vérifie (L) implique que $h' = e$ le neutre, et donc $h = e$. Par suite $b = Hh$ est le neutre de A , et nous avons montré que $\pi(\{a\} \times U)$ vérifie (L). Remarquer que $\pi(\{a\} \times U)$ est ouvert par 2.8 1a).

Il reste à identifier la base de la construction de Borel $A \backslash (A \times_G X)$ avec la base $G \backslash X$ du revêtement que nous voulons, et l'espace total de la construction de Borel $A \times_G X$ avec l'espace total $H \backslash X$ de telle façon que ces homéomorphismes commutent avec les projections pour donner un isomorphisme de revêtements. On définit alors

$$\psi : A \backslash (A \times_G X) \xrightarrow{\cong} G \backslash X : \phi, \quad (Hg, x) \mapsto \psi(Hg, x) = gx, \quad x \mapsto \phi(x) = (H, x).$$

On vérifie que ϕ et ψ sont bien définies, et que leurs composées sont l'identité. ϕ est l'application existant par propriété universelle du quotient pour $X \rightarrow A \backslash (A \times_G X)$ induite par l'application continue $X \rightarrow A \times X, x \mapsto (H, X)$, donc continue. ψ est l'application existant par propriété universelle du quotient pour $g : A \times X \rightarrow G \backslash X$, composée de proj_2 et de la projection. g passe d'abord en $\bar{g} : A \times_G X \rightarrow G \backslash X$, et ensuite en ψ . Donc ψ est continue, et nous avons montré le premier homéomorphisme. L'homéomorphisme $A \times_G X \approx_H \backslash X$ se construit de la même façon : on considère ici les applications $A \times X \rightarrow_H \backslash X$ donnée par $(Hg, x) \mapsto gx$, et $X \rightarrow A \times_G X$ donnée par $x \mapsto (H, x)$. Les vérifications évidentes montrant que ces deux applications sont bien définies, inverse l'une de l'autre et continues par propriété universelle sont laissées au lecteur. En plus, il est clair sur les formules explicites que ces homéomorphismes commutent avec les projections, et donnent donc un isomorphisme de revêtements.

Énoncé Indication

5.8. Corrigé exercice. — Comparons avec l'exemple 10.3 du cours : $\gamma(t)$ correspond à la puissance n -ème du générateur de $\pi_1(S^1, 0) \cong \mathbb{Z}$, i.e. $\gamma(t)$ est un représentant de la classe d'homotopie $f_{\sharp}(1)$. Il est clair que $\gamma(t)$ correspond à $n \in \mathbb{Z}$ sous l'isomorphisme de groupes

$$\pi_1(S^1, 0) \cong \mathbb{Z}, \quad (t \mapsto (\cos(2\pi it), \sin(2\pi it))) \leftrightarrow 1.$$

Ainsi $f_{\sharp} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ s'identifie à la multiplication par n .

Énoncé

Chapitre IV : Groupe défini par générateurs et relations

Théorèmes de Van Kampen

c4

Groupe défini par générateurs et relations

15.1. Groupe libre sur un alphabet. — On considère un ensemble $A = \{g_i, i \in I\}$ que l'on appellera *alphabet*. Un *mot réduit* est soit le mot vide, soit une suite finie de lettres de A munies d'exposants dans \mathbb{Z}^* telle que deux lettres consécutives soient distinctes (voir 13.1 pour le cas d'un alphabet à deux lettres). Par *concaténation* et *réduction* on définit une loi de groupe sur l'ensemble des mots réduits ; l'élément neutre e ou 1 est le mot vide. Le groupe libre engendré par A est

$$F(A) = \{\text{mots réduits écrits avec les lettres de } A\}.$$

15.2. Proposition. — Si G est un groupe et si $\alpha : A \rightarrow G$ une application, alors α se prolonge de façon unique en un morphisme de groupes $\alpha : F(A) \rightarrow G$.

15.3. Définitions. — 1) Si ce morphisme est surjectif, on dit que G est *engendré* par $\alpha(A)$ et que les éléments de $\alpha(A)$ sont des *générateurs* de G .

2) Étant donné un système de générateurs pour G , une *relation* est un élément de $\text{Ker}(\alpha)$. Comme $\text{Ker}(\alpha)$ est un sous-groupe invariant (c.-à-d. distingué) de $F(A)$, si $r \in \text{Ker}(\alpha)$ et $m \in F(A)$, $m^{-1}rm$ est une autre relation.

3) On dit que G est *défini par les générateurs* $\{g_i, i \in I\}$ et les relations $\{r_j, j \in J\}$ si G est isomorphe au quotient $F(A)/R$ où R est le plus petit sous-groupe invariant contenant les r_j . On écrit $R = \langle r_j, j \in J \rangle$ et $G = \langle g_i, i \in I ; r_j, j \in J \rangle$.

4) On dit que G est *de type fini* s'il a un système fini de générateurs (I fini). On dit que G est *de présentation finie* s'il est défini par un nombre fini de générateurs et de relations.

15.4. Exemple. — $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ est défini par $\langle a, b ; aba^{-1}b^{-1} \rangle$.

Démonstration. — Soit $A = \{a, b\}$ un alphabet à deux lettres. Soit $\alpha : F(A) \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ défini par $\alpha(a) = (1, 0)$ et $\alpha(b) = (0, 1)$. Alors $\alpha(m) = (p, q)$ où

- p = somme algébrique des exposants des lettres a dans m
- q = somme algébrique des exposants des lettres b dans m .

Par exemple, $\alpha(aba^{-1}ba^2b) = (2, 3)$ (ne pas confondre avec la longueur du mot qui est ici 7).

Soit $r = aba^{-1}b^{-1}$. Évidemment $r \in \text{Ker}(\alpha)$. Donc $\text{Ker}(\alpha) \supset \langle r \rangle$. Il s'agit de voir que $\text{Ker}(\alpha) = \langle r \rangle$.

Affirmation : $m = \rho a^p b^q$ avec $\rho \in \langle r \rangle$, c.-à-d. que ρ est produit fini de conjugués de $aba^{-1}b^{-1}$.

On la prouve par récurrence sur la longueur de m à partir des remarques suivantes :

- $ba = r^{-1}ab$
- $gr^k = (gr^k g^{-1})g$.

Si on applique ce résultat à $m \in \text{Ker}(\alpha)$, on trouve que $m = \rho \in \langle r \rangle$. □

15.5. Exercice (Le groupe alterné A_4). — C'est le sous-groupe du groupe symétrique S_4 qui est le noyau du morphisme signature. Il a 12 éléments.

Soit $a = (1423) = (1)(423)$; on a $a^3 = 1$.

Soit $b = (12)(34)$; on a $b^2 = 1$ et $(ab)^3 = 1$ car ab fixe 3.

Un élément d'ordre 3 de A_4 agit sur $\{1, 2, 3, 4\}$ en fixant un point et en permutant cycliquement les trois autres. Donc il y a quatre sous-groupes d'ordre 3; il y a trois éléments d'ordre 2 : b , $a^{-1}ba$ et $a^{-2}ba^2$. Donc $\alpha : F(\{a, b\}) \rightarrow A_4$ défini par $\alpha(a) = a$ et $\alpha(b) = b$ est surjectif. Ce morphisme se factorise par

$$G := F_2 / \langle a^3, b^2, (ab)^3 \rangle.$$

Montrer que $G \cong A_4$.

Indication. Dans G , $ba^2 = abab$. Donc on peut supprimer tous les exposants 2, sauf pour a^2 et pour les éléments commençant par a^2b . On en déduit une liste finie de mots représentant tous les éléments de G . D'après cette liste $\#(G) < 24$. Or $\#(G) \in 12\mathbb{N}$ puisqu'un quotient de G est d'ordre 12. Donc $\#(G) = 12$ et, comme α est surjectif, α est injectif et $G \cong A_4$.

16. Produit libre de deux groupes

16.1. Définition. — Si G et G' sont deux groupes d'éléments neutres respectifs e et e' , on définit $G * G'$ comme l'ensemble des mots finis ou vide avec des lettres dans $(G \setminus e) \cup (G' \setminus e')$, deux lettres consécutives n'étant pas dans le même facteur.

On définit un produit par concaténation + réduction

$$(\dots g_1)(g_2 \dots) = \dots (g_1 g_2) \dots$$

où on fait le produit $g_1 g_2$ si les deux lettres appartiennent à G (resp. à G'). Si $g_2 = g_1^{-1}$, on efface $g_1 g_2$.

Remarque. — G est un sous-groupe de $G * G'$, mais il n'est *jamais* invariant si $G' \neq 1$.

16.2. Exemples. — 1) $F_2 \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

2) $D_\infty \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$

16.3. Propriété universelle. — Si l'on a $\phi_i : G_i \rightarrow G$, $i = 1, 2$, deux morphismes de groupes, il existe un unique morphisme $\phi : G_1 * G_2 \rightarrow G$ tel que $\phi|_{G_i} = \phi_i$. On note aussi $\phi = \phi_1 * \phi_2$.

16.1. Exercice. — Si $G = H * \mathbb{Z}$ et si a est un générateur de \mathbb{Z} , on a

$$G / \langle a \rangle \cong H$$

où $\langle a \rangle$ désigne le plus petit sous-groupe distingué contenant a .

17. Premier théorème de Van Kampen

17.1. Théorème. — Soit $X = X_1 \cup X_2$, X_1 et X_2 ouverts dans X . Soit $x_0 \in X_1 \cap X_2$. On suppose $X_1 \cap X_2$ 1-connexe.

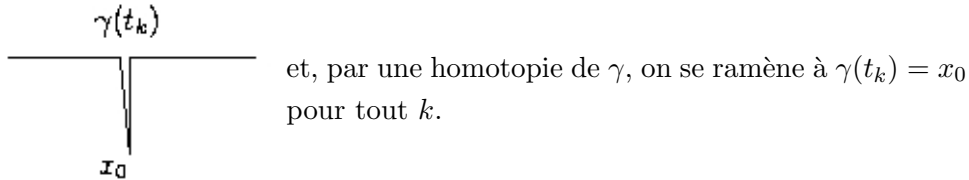
Alors

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X_1, x_0) * \pi_1(X_2, x_0).$$

Remarque. — Le cercle S^1 est recouvert par deux ouverts contractiles et n'est pas 1-connexe. Expliquer !

Démonstration. — Soit $G_j = \pi_1(X_j, x_0)$ et $i_j : X_j \hookrightarrow X$. Soit $\phi = i_{1\#} * i_{2\#}$. On veut voir que ϕ est un isomorphisme.

1) ϕ est surjectif. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ un lacet basé en x_0 . Par le lemme ε de Lebesgue (4.2), il existe une subdivision $0, \dots, t_k, \dots, 1$ de $[0, 1]$ plus fine que le recouvrement par $\{\gamma^{-1}(X_1), \gamma^{-1}(X_2)\}$. Autrement dit $\gamma([t_k, t_{k+1}]) \subset X_j$ pour un certain $j \in \{1, 2\}$. Si deux intervalles consécutifs vont dans le même X_j on efface l'extrémité commune de la subdivision. Alors $\gamma(t_k) \in X_1 \cap X_2$ pour tout k . On joint $\gamma(t_k)$ à x_0 dans $X_1 \cap X_2$



Alors $\gamma|_{[t_k, t_{k+1}]}$ est un lacet de X_j , basé en x_0 . Sa classe d'homotopie donne une lettre pour un mot de $G_1 * G_2$.

2) ϕ est injectif. Soit m un mot, non nécessairement réduit, de $G_1 * G_2$ représentant un élément du noyau de ϕ ; chaque lettre est la classe d'homotopie d'un lacet de X_1 ou X_2 basé en x_0 ; donc m est représenté par un lacet γ de X qui, par hypothèse, est homotope au lacet constant c_{x_0} . Il faut voir que m se réduit dans le mot trivial.

L'homotopie est une application $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ avec $\Gamma(t, 0) = \gamma(t)$, $\Gamma(0, s) = \Gamma(1, s) = \Gamma(t, 1) = x_0$. Par le lemme ϵ de Lebesgue (4.2), on a un quadrillage du carré plus fin que $\{\Gamma^{-1}(X_1), \Gamma^{-1}(X_2)\}$. Chaque sommet du quadrillage, ainsi que chaque arête, a une couleur selon que son image est dans X_1 ou dans X_2 ; s'il va dans $X_1 \cap X_2$ il est bicolore.

On ne perd pas de généralité en supposant que chaque sommet s est envoyé sur x_0 , comme l'indique la construction suivante :

- pour cela, on joint $\Gamma(s)$ à x_0 par un chemin α dans X_1 ou X_2 ou $X_1 \cap X_2$ selon sa couleur ;

- on retire de $[0, 1] \times [0, 1]$ un petit disque $D(s)$ centré en s ;
- on fait une homotopie de Γ à $\tilde{\Gamma}$ de sorte que $\tilde{\Gamma}$ envoie le bord de $D(s)$ au point $\Gamma(s)$;
- on étend $\tilde{\Gamma}$ à $D(s)$ en envoyant chaque rayon du disque dans X par α .

Appelons de nouveau Γ cette homotopie. On a alors une suite de lacets $\gamma_0 = \gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_k, \gamma_{k+1}, \dots, c_{x_0}$, où chacun est formé par la restriction de Γ à une chaîne d'arêtes du quadrillage joignant $\{0\} \times [0, 1]$ à $\{1\} \times [0, 1]$ et où γ_{k+1} diffère (en général) de γ_k comme suit :



La restriction de Γ à une arête de γ_k définit un lacet de (X_j, x_0) pour un certain j et sa classe d'homotopie est une lettre de G_j . Si une arête est bicolore, Γ l'envoie dans $(X_1 \cap X_2, x_0)$ et donc sa classe d'homotopie est triviale. Ainsi à γ_k correspond un mot de $G_1 * G_2$. À cause du petit carré, $[\delta_k] = [\delta_{k+1}]$ dans G_1 ou 2 . Donc γ_k et γ_{k+1} définissent le même élément de $G_1 * G_2$. Finalement γ et c_{x_0} définissent le même élément de $G_1 * G_2$. \square

17.2. Corollaire. — Soit $X = X_1 \vee X_2$ (union sur un point x_0). On suppose, pour $j = 1, 2$, que x_0 a un voisinage ouvert V_j dans X_j contractile par une contraction constante sur x_0 .

Alors

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X_1, x_0) * \pi_1(X_2, x_0).$$

Démonstration. — Une base d'ouverts de $X_1 \vee X_2$ est formée des ouverts de $X_1 \setminus \{x_0\}$, des ouverts de $X_2 \setminus \{x_0\}$ et des réunions d'un ouvert de X_1 contenant x_0 et d'un ouvert de X_2 contenant aussi x_0 . Soit $X'_1 := X_1 \cup V_2$ et $X'_2 := X_2 \cup V_1$; ce sont deux ouverts de X qui le recouvrent. De plus grâce à la contraction de V_j , on voit que l'inclusion $X_j \rightarrow X'_j$ est une équivalence d'homotopie ; elle induit donc un isomorphisme $\pi_1(X_j, x_0) \cong \pi_1(X'_j, x_0)$. L'intersection $X'_1 \cap X'_2 = V_1 \cup V_2$ est contractile, donc 1-connexe. Le théorème de Van Kampen (17.1) donne alors la conclusion. \square

- 17.3. Exemples.** — 1) $\pi_1(\text{huit}) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.
 2) $\pi_1(S^1 \vee P^2) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$.

18. Second théorème de Van Kampen

18.1. Théorème. — 1) Soit $Y = D^2 \cup_f X$ où $f : S^1 \rightarrow X$ est continue. Soit x_0 un point de base de X dans $f(S^1)$. Alors

$$\pi_1(Y, x_0) \cong \pi_1(X, x_0) / \langle [f] \rangle$$

où $\langle [f] \rangle$ désigne le plus petit sous-groupe de $\pi_1(X, x_0)$ contenant la classe du lacet $[f]$.

2) Soit $n > 2$ et $Z = D^n \cup_f X$ où $f : S^{n-1} \rightarrow X$ est continue. Alors

$$\pi_1(Z, x_0) \cong \pi_1(X, x_0).$$

Démonstration. — 1) L'inclusion de X dans Y induit un morphisme $i_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, x_0)$. Comme le lacet f est homotope à zéro, $i_{\#}$ se factorise par le quotient, donnant un morphisme

$$\phi : \pi_1(X, x_0) / \langle [f] \rangle \rightarrow \pi_1(Y, x_0).$$

Pour la surjectivité de ϕ , on observe que l'inclusion de X dans $Y' := Y \setminus \{f(0)\}$ est une équivalence d'homotopie, car c'est vrai pour l'inclusion du cercle dans le disque privé de son centre. Or il est facile de voir que tout lacet de Y est approchable par (donc homotope à) un lacet qui évite le point $f(0)$.

Pour l'injectivité de ϕ , on raisonne comme dans le premier théorème de Van Kampen. Chaque petit carré du quadrillage va soit dans Y' soit dans D^2 . Chaque lacet γ_k est un lacet de Y' et, pour passer de γ_k à γ_{k+1} on fait soit une homotopie dans Y' , ce qui ne change rien à la classe d'homotopie, soit on change $[\gamma_k]$ par un conjugué d'une puissance de $[f]$. Finalement tout élément du noyau de ϕ est un produit de conjugués de $[f]$. Pour plus de détails on consultera un ouvrage de référence.

2) Cette fois-ci on peut appliquer directement le premier théorème de Van Kampen. En effet Z est recouvert par deux ouverts, $Z' := Z \setminus \{f(0)\}$ et le disque ouvert $\text{int } D^n$, et leur intersection, homéomorphe à $S^{n-1} \times]0, 1[$ est 1-connexe. Donc $\pi_1(Z, x_0) \cong \pi_1(X, x_0) * \pi_1(D^n)$. Mais le produit libre par le groupe trivial $\pi_1(D^n)$ ne change pas le groupe. \square

18.1. Exercice. — Soit $X = S^1$, $f : S^1 \rightarrow S^1$ définie par $f(z) = z^2$; $x_0 = 1 \in \mathbb{C}$. Montrer $[f] = 2$ dans $\pi_1(S^1, x_0)$. En déduire

$$\pi_1(D^2 \cup_f S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}_2.$$

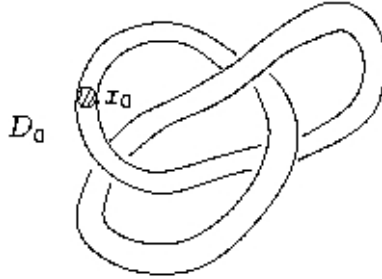
Retrouver ainsi le groupe fondamental de P^2 .

18.2. Application aux nœuds. — Soit C un nœud dans \mathbb{R}^3 , c'est-à-dire l'image d'une application, de classe \mathcal{C}^1 , $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, sans points de rebroussement ($\gamma'(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$), 1-périodique et sans points doubles : $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \Leftrightarrow t_1 - t_2 \in \mathbb{Z}$.

On démontre facilement avec le théorème d'inversion locale qu'il existe un voisinage, dit *tubulaire*, $T = C \times D^2$, où D^2 est le disque fermé (*cf.* figure).

Soit :

- $X = \mathbb{R}^3 \setminus \text{int}(T)$, $D_0 = \{pt\} \times D^2$,
- $Y = D_0 \cup X$, $x_0 \in X \cap D_0$,
- $G = \pi_1(X, x_0)$,
- $m \in G$ la classe du "méridien", c'est-à-dire du lacet tracé par le bord de D_0 (avec une orientation choisie arbitrairement).



On a

$$C \times D^2 \cong S^1 \times D^2 \cong \underbrace{([0, 1] \times D^2)}_{\cong D^3} \cup (\{0\} \times D^2 \cup S^1 \times S^1).$$

Donc $\mathbb{R}^3 \cong D^3 \cup Y$ et, d'après le 2) de 18.1, $\pi_1(Y, x_0) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3) = 1$. Mais, d'après le 1) de 18.1, $\pi_1(Y, x_0) \cong G / \langle m \rangle$; donc $G / \langle m \rangle = 1$.

Finalement G est formé des produits de conjugués d'un seul élément. On a donc établi le corollaire suivant :

18.3. Corollaire. — *L'abélianisé G_{ab} de $\pi_1(X, x_0)$ est isomorphe à un groupe cyclique.*

On rappelle que l'abélianisé G_{ab} d'un groupe G est le quotient $G/[G, G]$ où $[G, G] = \langle ghg^{-1}h^{-1}, g \in G, h \in G \rangle$ et que tout morphisme de G vers un groupe abélien se factorise par G_{ab} .

FRANÇOIS LAUDENBACH & FRIEDRICH WAGEMANN
Département de mathématiques, Université de Nantes,
2 Rue de la Houssinière F-44322 Nantes Cedex 03

UNIVERSITÉ DE NANTES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
Maîtrise : Topologie Algébrique
François Laudenbach (CM) & Friedrich Wagemann (TD)

td4

Travaux dirigés de Mathématiques, Fiche 6, Topologie algébrique
2005-2006

Le Groupe Fondamental II.

6.1. Exercice. — Calculer par les théorèmes de van Kampen le groupe fondamental des espaces suivants :

- $X = C((-2, 0), 1) \cup [(-1, 0), (1, 0)] \cup C((2, 0), 1) \subset \mathbb{R}^2$, $C(a, r) \subset \mathbb{R}^2$ étant le cercle de rayon r autour de $a \in \mathbb{R}^2$,
- $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\}$ avec $P \neq Q \in \mathbb{R}^2$,
- $X = S^1 \cup [P, Q]$ avec $P, Q \in S^1$,
- $X = S^2$
- $X = S^2 \cup [P, Q]$ avec $P, Q \in S^2$.

Indication Corrigé

6.2. Exercice. — Utiliser les théorèmes de van Kampen pour déterminer (parfois de nouveau) le groupe fondamental des espaces topologiques rencontrés en cours ou en TD (on commencera par T^2 , ensuite K , ensuite S^n , $n \geq 3$. Qu'est-ce qui ne marche plus pour S^1 et S^2 ? Comment pourrait-on faire pour calculer le groupe fondamental de M par van Kampen? Et celui de $\mathbb{R}P^2$ alors?)

Corrigé

6.3. Exercice. — Soit G un groupe topologique connexe par arcs, e son élément neutre. Soit $p : X \rightarrow G$ un revêtement connexe et localement connexe par arcs de G et $x_0 \in p^{-1}(e)$.

Montrer qu'il existe sur X une unique structure de groupe topologique admettant x_0 pour élément neutre et tel que p soit un homomorphisme de groupes topologiques.

Indication Corrigé

6.4. Exercice. — Soit $g : \mathbb{R}P^n \rightarrow S^1$ une application continue.

- 1) Montrer que g se relève en une application $\bar{g} : \mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}$.
- 2) Montrer que g est homotope à une application constante.

Indication Corrigé

6.5. Exercice. — Soit $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application continue ($n \geq 2$). Montrer qu'il existe $x \in S^n$ tel que $f(x) = f(-x)$ (Ceci est le *théorème de Borsuk-Ulam*).

(Indication : il y a (au moins) deux possibilités : une passe par l'assertion équivalente

$$\nexists f : S^n \rightarrow S^1$$

avec $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in S^n$, l'autre n'utilise que le relèvement d'applications.)

Indication Corrigé

6.6. Exercice. — a) Montrer que les deux groupes G_1 et G_2 qui correspondent aux présentations 1) et 2) sont isomorphes :

- 1) Par deux générateurs a et b et la relation $baba^{-1}$.
- 2) Par deux générateurs a et c et la relation a^2c^2 .

Remarque : ces deux présentations sont des présentations du groupe fondamental de la bouteille de Klein et correspondent à deux manières différentes de le calculer.

b) Montrer que les deux groupes G_3 et G_4 qui correspondent aux présentations 3) et 4) ci-dessous sont isomorphes :

- 3) Deux générateurs a et b et la relation a^3b^{-2} .
- 4) Deux générateurs x et y et la relation $xyxy^{-1}x^{-1}y^{-1}$.

Indication Corrigé

6.7. Exercice. — Reprendre les revêtements connexes de la figure huit à deux feuillets : comment calcule-t-on le groupe fondamental d'un graphe ? Quels sont donc les groupes fondamentaux des revêtements en question ?

Indication Corrigé

UNIVERSITÉ DE NANTES
 DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Maîtrise : Topologie Algébrique

François Laudenbach (CM) & Friedrich Wagemann (TD)

Le groupe fondamental II : indications pour les exercices

6.1. Indication exercice. — **6.1** Si vous ne voyez pas comment appliquer les théorèmes de Van Kampen directement, on peut aussi essayer de définir des équivalences d'homotopie pour se ramener à des espaces mieux traitables ou déjà traités.

Il y a tellement de façon différentes de résoudre cet exercice et le suivant que je vous laisse trouver votre solution.

Énoncé Corrigé

6.3. Indication exercice. — **6.3** Dans cet exercice, on peut procéder de deux façon différentes : soit en relevant uniquement des chemins (par exemple, pour définir le produit sur X de deux éléments x et y , on pourra relever à partir de x_0 un chemin qui part de e et qui aboutit à $p(x)p(y)$). Soit en relevant des applications (pour permettre cette possibilité, l'exercice se trouve seulement ici). En effet, on pourra relever l'application continue $X \times X \rightarrow G$ donnée par $(x, y) \mapsto p(x)p(y)$.

Énoncé Corrigé

6.4. Indication exercice. — **6.4** 1) Combien d'éléments d'ordre 2 y a-t-il dans \mathbb{Z} ?

Énoncé Corrigé

6.5. Indication exercice. — **6.5** Passer au quotient par rapport à l'action de $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$! Combien d'éléments d'ordre 2 y a-t-il dans \mathbb{Z} ?

Énoncé Corrigé

6.6. Indication exercice. — **6.6** Cet exercice est assez combinatoire. Dans la partie a), l'élément a reste fixe. Il faut trouver l'image de b . Pour cela, il faut essayer de transformer l'une des deux relations dans l'autre, sachant que ce n'est que le sous-groupe distingué engendré par la relation qui joue un rôle, donc on raisonne à conjugaison près.

6.6 b) est assez difficile, sans autre indication. Essayez donc $a \mapsto xy$ et trouvez une image de b qui convient.

Énoncé Corrigé

6.7. Indication exercice. — **6.7** Comment appliquer Van Kampen I dans le cas d'un graphe ?

Énoncé Corrigé

UNIVERSITÉ DE NANTES
 DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Maîtrise : Topologie Algébrique

François Laudenbach (CM) & Friedrich Wagemann (TD)

Travaux dirigés de Mathématiques, Fiche 6, Topologie algébrique
 2005-2006

Le groupe fondamental II : solutions des exercices.

6.1. Corrigé exercice. — 1) L'espace $X = C((-2, 0), 1) \cup [(-1, 0), (1, 0)] \cup C((2, 0), 1) \subset \mathbb{R}^2$, $C(a, r) \subset \mathbb{R}^2$ étant le cercle de rayon r autour de $a \in \mathbb{R}^2$ s'appelle aussi *les lunettes*. Je vois au moins deux méthodes : par le premier théorème de Van Kampen (théorème 17.1 du cours). On choisit $U = C((-2, 0), 1) \cup [(-1, 0), (\frac{1}{2}, 0)[$ et $V =](-\frac{1}{2}, 0), (1, 0)] \cup C((2, 0), 1)$. U et V sont ouverts, $X = U \cup V$ et $U \cap V =](-\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, 0)[$ est contractile. $C((-2, 0), 1)$ homotopiquement équivalent à U (même un rétracte par déformation (cf exo 5.4), et ils ont donc groupes fondamentaux isomorphes (cf exo 5.6). De même, $C((2, 0), 1)$ est un rétracte par déformation de V . En conclusion, par le théorème de Van Kampen, $\pi_1(X, x_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Une autre méthode est de montrer que les lunettes sont homotopiquement équivalentes à la figure huit en contractant le segment qui lie les deux cercles sur un point, et d'utiliser l'exemple 17.3 1) du cours.

Énoncé Indication

6.1 2) Montrons que l'espace X en question est homotopiquement équivalent aux lunettes L , i.e. à l'espace X de l'exercice 6.1 1). Après homéomorphisme (le choix d'un repère orthonormé met P en $(-2, 0)$, rotation et dilatation mettent Q en $(2, 0)$), on peut supposer $P = (-2, 0)$ et $Q = (2, 0)$. Ensuite, on définit une rétraction $r : \mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\} \rightarrow L$ en utilisant exo 2.11 comme suit : dans $\mathbb{R}_{x \geq 2}^2 \setminus D((2, 0), 1)$ (où $D((2, 0), 1)$ signifie le disque autour de $(2, 0) \in \mathbb{R}^2$ de rayon 1), on contracte radialement sur $C((2, 0), 1)$, i.e. $r(x, y) = (a, b)$ où (a, b) est l'intersection de la droite passant par (x, y) et $(2, 0)$ avec le

cercle $C((2, 0), 1)$. Dans $\mathbb{R}_{0 \leq x \leq 2}^2 \setminus \overset{\circ}{D}((2, 0), 1)$, on contracte verticalement, i.e. $r(x, y) = (a, b)$ où (a, b) est l'intersection de la droite parallèle à l'axe des y passant par (x, y) avec le cercle $C((2, 0), 1)$ ou avec le segment $[(0, 0), (1, 0)]$. Dans la cercle $C((2, 0), 1)$, i.e. pour les $(2, 0) \neq (x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x^2 + y^2 < 1$ et $1 \leq x \leq 3$, on contracte aussi radialement sur le cercle, i.e. $r(x, y) = (a, b)$ si (a, b) est l'intersection de la droite passant par (x, y) et $(2, 0)$ avec le cercle $C((2, 0), 1)$. Du côté des $x \leq 0$, on applique la même consigne : en conclusion, on a construit une application continue $r : \mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\} \rightarrow L$. En promenant le point (x, y) sur la droite verticale ou radiale jusqu'à sa position d'origine, on construit facilement une homotopie entre r et l'identité qui est l'application constante point par point sur L . D'où le fait que L est rétracte par déformation de $\mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\}$.

Une autre possibilité est de raisonner par Van Kampen I (théorème 17.1 du cours) : on recouvre $\mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\}$ par son intersection U avec le demi-espace des $x < \epsilon$, et son intersection V avec le demi-espace $x > -\epsilon$ pour un $\epsilon > 0$ assez petit. U et V sont ouverts, leurs intersection est 1-connexe (homéomorphe à \mathbb{R}^2), et U et V sont tous les deux homotopiquement équivalents à S^1 (encore puisque S^1 est rétracte par déformation, par exemple). On déduit par le théorème que $\pi_1(X, x_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ pour un point base $x_0 \in U \cap V$.

Énoncé Indication

6.1 3) Soit $X = S^1 \cup [P, Q]$. $S^1 \setminus \{P, Q\}$ est la réunion disjointe de deux arcs ouverts, notés A_1 et A_2 . Notons A'_1 l'arc fermé qui est l'intersection de A_1 avec l'extérieur de deux petites boules ouvertes autour de P et Q , et A'_2 l'intersection de A_2 avec l'extérieur des mêmes deux petites boules ouvertes autour de P et Q . Notons ensuite $U := X \setminus A'_1$ et $V := X \setminus A'_2$ deux ouverts recouvrant X . L'intersection de U et V consiste du segment $[P, Q]$ dans \mathbb{R}^2 ensemble avec l'intersection de S^1 avec les deux boules autour de P et Q . Ainsi il est clair que $U \cap V$ est contractile. De plus, il est clair que U et V sont homotopiquement équivalents à S^1 . On déduit alors de Van Kampen I (théorème 17.1 du cours) que $\pi_1(X, x_0) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ où x_0 est par exemple sur $[P, Q]$.

Une autre possibilité est de montrer que X est homotopiquement équivalent à la figure huit ; il suffit de contracter le segment $[P, Q]$ sur un point.

Énoncé Indication

6.1 4) On peut raisonner par Van Kampen II (théorème 18.1 du cours) : $S^2 = D^2 \cup_f D^2$, la réunion de deux disques D^2 où $f : S^1 = \partial D^2 \rightarrow S^1$ est l'identité. L'homéomorphisme entre S^2 et l'espace $D^2 \cup_f D^2$ se démontre à l'aide de la proposition 6.4 du cours : la réunion disjointe $D^2 \cup D^2$ admet une application continue ϕ vers S^2 en incluant le premier disque comme l'hémisphère sud, le deuxième comme l'hémisphère nord. On passe à l'identification $D^2 \cup_f D^2$ avec $f = \text{id}_{S^1}$. La proposition nous montre que $D^2 \cup_f D^2$ est compact. $\phi : D^2 \cup D^2 \rightarrow S^2$ se factorise en une bijection continue qui est par exo 2.3 3) un homéomorphisme.

Van Kampen II affirme donc que $\pi_1(S^2, x_0) \cong \pi_1(D^2, x_0) / \langle [f] \rangle$ où x_0 est un point sur l'équateur de S^2 . Puisque $\pi_1(D^2, x_0) = \{1\}$ (puisque D^2 est contractile), on en déduit $\pi_1(S^2, x_0) \cong \{1\}$ (cf prop. 11.3 du cours).

Énoncé Indication

6.1 5) On décrit $X = D^2 \cup_f Y$ avec $Y = H \cup [P, Q]$ où H est une hémisphère de S^2 , et $f : S^1 \rightarrow S^1$ est l'identité comme dans 6.1 4). Y est homotopiquement équivalent à S^1 : en effet, à homéomorphisme près, on peut supposer que P et Q soit diamétralement opposés. Ensuite, on regarde un demi-cercle du bord de Y (qui consiste d'un cercle et d'un segment diamétral) comme une corde à sauter qu'on contracte sur l'autre demi-cercle en parcourant l'hémisphère. Le résultat est la réunion d'un demi-cercle de P à Q avec le segment $[P, Q]$; cette réunion est clairement homéomorphe à un cercle. Van Kampen II (théorème 18.1 du cours) affirme donc que $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, x_0) / \langle [f] \rangle$. Il reste donc à identifier la classe de f comme élément de $\pi_1(Y, x_0) \cong \mathbb{Z}$. $[f]$ est la classe du lacet qui fait un tour autour du cercle qui joint les deux hémisphères de S^2 . Montrons que $[f] = 0$: en effet, le lacet f se contracte dans Y ; il suffit de pousser le lacet sur le cercle bord de l'hémisphère dans l'hémisphère, et de le contracter dans l'hémisphère sur son point base. Remarquer que puisque $f(S^1) \subset D^2 \subset Y$, le segment $[P, Q]$ ne joue aucun rôle dans ceci, et $[f] = 0$ provient de la contractibilité de D^2 . En conclusion, $\pi_1(X, x_0) \cong \mathbb{Z}$.

Énoncé Indication

6.2. Corrigé exercice. — Le tore \mathbb{T}^2 peut se voir comme quotient du carré $[0, 1]^2$ en identifiant les bords. Plus précisément, on forme dans un premier temps $[0, 1]^2 / f$ où $f : [0, 1] \times \{0\} \rightarrow [0, 1]^2$ est l'application $(t, 0) \mapsto (t, 1)$. Cet espace est clairement un cylindre C . Dans un deuxième temps, on forme

C/g où $g : \{0\} \times S^1 \rightarrow C$ est l'application $(0, t) \rightarrow (1, t)$. Proposition 6.4 du cours affirme que C et C/g sont compacts. Exo 2.3 3) peut être employé pour montrer l'homéomorphie avec d'autres descriptions du tore \mathbb{T}^2 . Une variante de ceci s'obtient en regardant $\mathbb{T}^2 = D^2 \cup_f (S^1 \vee S^1)$ où D^2 est regardé en tant que carré $[0, 1]^2$, et les morceaux du bord $\{0\} \times [0, 1]$ et $\{1\} \times [0, 1]$ sont envoyés par f sur le premier S^1 , pendant que le reste du bord $[0, 1] \times \{0\}$ et $[0, 1] \times \{1\}$ est envoyé par f sur le deuxième facteur S^1 (i.e. les quatre coins du carré sont envoyés sur le croisement des deux cercles dans la figure huit). Proposition 6.4 montre toujours que le quotient est compact. Le second théorème de Van Kampen (théorème 18.1 du cours) montre donc que $\pi_1(\mathbb{T}^2, x_0)$ est le quotient du groupe $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ par le sous-groupe distingué engendré par $\langle [f] \rangle$. Si on note α le lacet dans \mathbb{T}^2 qui fait un tour du cercle image de $[0, 1] \times \{0\}$ et $[0, 1] \times \{1\}$ sous f , et β celui qui fait un tour du cercle image de $\{0\} \times [0, 1]$ et $\{1\} \times [0, 1]$, alors la classe de f est la classe de $\alpha * \beta * \alpha^{-1} * \beta^{-1}$, et α et β peuvent être pris comme générateurs de $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Par suite, $\langle [f] \rangle$ est clairement le sous-groupe des commutateurs de $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, donc $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} / \langle [f] \rangle$ est l'abélianisé de $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, donc un groupe abélien libre en deux générateurs. Il en résulte que $\pi_1(D^2 \cup_f (S^1 \vee S^1), x_0) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Énoncé

De la même façon, nous allons décrire la bouteille de Klein $K : K = [0, 1]^2 \cup_f (S^1 \vee S^1)$ où $f : \partial[0, 1]^2 \rightarrow S^1 \vee S^1$ est donnée par les identifications, i.e. $(t, 0)$ et $(t, 1)$ sont envoyés sur $e^{2\pi it}$ comme élément du premier facteur S^1 pour tout $t \in [0, 1]$, et $(0, t)$ et $(1, t - 1)$ sont envoyés sur $e^{2\pi it}$ comme élément du deuxième facteur S^1 pour tout $t \in [0, 1]$. Le second théorème de Van Kampen (théorème 18.1 du cours) montre donc que $\pi_1(K, x_0) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} / \langle [f] \rangle$, et $\langle [f] \rangle$ est maintenant le sous-groupe distingué engendré par le lacet $\alpha * \beta^{-1} * \alpha^{-1} * \beta^{-1}$. Il est facile à montrer que $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} / \langle [f] \rangle$ est isomorphe au groupe G de l'exo 3.4.

Énoncé

Le groupe fondamental de S^n , $n \geq 3$ se calcule facilement par Van Kampen I par le recouvrement par les deux hémisphères, débordant un peu afin que l'intersection soit non-vide. L'intersection est homotopiquement équivalent à S^{n-1} , d'où une procédure pour montrer $\pi_1(S^n, x_0) = \{1\}$ pour tout $n \geq 2$ par récurrence à partir de $\pi_1(S^2, x_0) = \{1\}$. Pour S^2 , l'intersection des deux hémisphères est homotopiquement équivalent à S^1 , donc on ne peut pas

appliquer Van Kampen I, mais on a déjà vu comment on applique Van Kampen II (exo 6.1 4)).

Énoncé

Pour S^1 , on représente $C = D^2 \cup_f X$ où X est un cylindre C auquel on a enlevé un petit disque. Le cylindre est homotopiquement équivalent à S^1 , et f “bouche” le trou, i.e. identifie $S^1 \subset D^2$ avec le bord du trou afin d’avoir $C = D^2 \cup_f X$. X admet $S^1 \vee S^1$ comme rétracte par déformation, donc $\pi_1(X, x_0) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. $[f]$ s’identifie à la classe du lacet α qui fait un tour autour du trou, et qui est par ailleurs un générateur de $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. On en conclut $\pi_1(C, x_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} / \langle [f] \rangle \cong \mathbb{Z}$. En effet, le plus petit sous-groupe distingué contenant α contient α et $\beta * \alpha * \beta^{-1}$, donc le commutateur $\beta * \alpha * \beta^{-1} * \alpha^{-1}$. On en déduit que le quotient est abélien, et donc un quotient de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Or, $\langle [f] \rangle$ contient le sous-groupe engendré par α , donc le quotient s’identifie au second facteur, engendré par β . Par suite $\pi_1(S^1, x_0) = \mathbb{Z}$. Bien sûr, on a triché au moment où on a déjà supposé connu le groupe fondamental du cylindre - je pense qu’on ne peut pas raisonnablement calculer le groupe fondamental de S^1 à partir des deux théorèmes de Van Kampen vu dans le cours. Ce qui précède montre comment présenter S^1 comme attachement d’un disque à un espace. Le cas du ruban de Möbius est analogue ; il suffit de lui enlever un petit disque D^2 , et de le recoller à l’aide d’un f pour le mettre sous la forme à laquelle s’applique le théorème de Van Kampen II.

Énoncé

Pour le plan projectif $\mathbb{R}P^2$, on se souvient de l’exercice 3.5 2) : là, on montre que $\mathbb{R}P^2 = D^2 \cup_f M$. L’application $f : S^1 \rightarrow M$ qui envoie le bord du disque sur le bord du ruban de Möbius a comme image le cercle bord de M ; il correspond à deux fois le générateur de $\pi_1(M, x_0) = \mathbb{Z}$. Ainsi $[f] = 2 \in \mathbb{Z}$, et par Van Kampen II, $\pi_1(\mathbb{R}P^2, x_0) \cong \mathbb{Z} / \langle 2 \rangle = \mathbb{Z}_2$.

Énoncé

6.3. Corrigé exercice. — Soit $X \times X \rightarrow G$ l’application continue $(x, y) \mapsto p(x)p(y)$ où $p(x)p(y)$ désigne la multiplication de $p(x)$ avec lui-même dans le groupe G . On relève ϕ à partir de x_0 . Ceci est possible, car $\phi_{\#}([\gamma_1], [\gamma_2]) = [p(\gamma_1)p(\gamma_2)] = [p(\gamma_1) * p(\gamma_2)] = p_{\#}([\gamma_1 * \gamma_2])$ implique que $\text{Im}(\phi) \subset \text{Im}(p_{\#})$ et le théorème de relèvement 19.1 du cours permet de conclure. Nous avons utilisé ici exo 5.1. Le relevé $\tilde{\phi}$ de ϕ à partir de x_0 est

par définition la multiplication du groupe X avec x_0 comme neutre. Étant donné x et y dans X , le produit xy ainsi défini est bien défini par unicité du relèvement. Il se calcule concrètement comme suit : soit γ un chemin dans $X \times X$ de (x_0, x_0) à (x, y) . La composée $\mu \circ (p \times p) \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow G$ est un chemin de $e \in G$ à $p(x)p(y)$, où $\mu : G \times G \rightarrow G$ désigne la multiplication dans G . Le relévé $\tilde{\gamma}$ à partir de x_0 aboutit à $\tilde{\gamma}(1) = xy$ par définition. Cette construction ne dépend pas du choix de γ .

Montrons que x_0 est un neutre pour cette multiplication : soit $x \in X$ et γ un chemin de (x_0, x_0) à (x_0, x) . Par définition $xx_0 = (\mu \circ \widetilde{(p \times p)} \circ \gamma)(1)$. Or, par indépendance du choix de γ , on peut prendre $\gamma = (c_{x_0}, \alpha)$ où α est un chemin de x_0 à x et c_{x_0} est le chemin constant en x_0 . Ainsi

$$xx_0 = (\mu \circ \widetilde{(p \times p)} \circ (c_{x_0}, \alpha))(1) = (c_e \widetilde{p(\alpha)})(1) = p(\tilde{\alpha})(1).$$

Par unicité du relèvement, $p(\tilde{\alpha})(1) = \alpha(1) = x$. De la même façon on montre $x_0x = x$ pour tout $x \in X$.

Montrons l'associativité du produit, i.e. $x_1(x_2x_3) = (x_1x_2)x_3$ pour tous $x_1, x_2, x_3 \in X$. Soient α_i pour $i = 1, 2, 3$ des chemins de x_0 à x_i . Par indépendance du produit du choix de γ , on prendra comme chemin à (x_2, x_3) et à (x_1, x_2x_3) les chemins (α_2, α_3) et $(\alpha_1, \mu \circ \widetilde{(p \times p)} \circ (\alpha_2, \alpha_3))$ respectivement. De même pour le côté droite du produit. Il s'agit donc de comparer

$$\mu \circ (p \times p) \circ (\alpha_1, \mu \circ \widetilde{(p \times p)} \circ (\alpha_2, \alpha_3))$$

et

$$\mu \circ (p \times p) \circ (\mu \circ \widetilde{(p \times p)} \circ (\alpha_1, \alpha_2), \alpha_3).$$

On vérifie facilement que le premier chemin est égal à $p(\alpha_1)(p(\alpha_2)p(\alpha_3))$ et le deuxième à $(p(\alpha_1)p(\alpha_2))p(\alpha_3)$, donc l'associativité dans le groupe G montre qu'il sont égaux. Par unicité du relèvement, leurs relevés sont donc égaux, et par suite leurs points d'aboutissement. Mais ceci veut dire que $x_1(x_2x_3) = (x_1x_2)x_3$.

On laisse la vérification de l'existence d'inverses au lecteur. Le produit est continue (par relèvement d'applications continues) et unique (par unicité du relèvement à partir d'un point fixé). Par construction, p est un homomorphisme de groupes.

Énoncé Indication

6.4. Corrigé exercice. — 1) Par le théorème de relèvement des applications (théorème 19.1 du cours), une condition nécessaire et suffisante pour que g se relève est que $g_{\#}(\pi_1(\mathbb{R}P^2, x_0)) \subset p_{\#}(\pi_1(\mathbb{R}, y_0))$ avec $p(y_0) = g(x_0)$, i.e. $g_{\#}(\mathbb{Z}_2) \subset \{0\}$, i.e. $\text{Im}(g_{\#}) = \{0\}$. Or, $g_{\#}(1)$ où $1 \in \mathbb{Z}_2$ est le générateur de \mathbb{Z}_2 , est un élément d'ordre au plus 2 dans $\pi_1(S^1, g(x_0)) = \mathbb{Z}$, mais tous les éléments de \mathbb{Z} différents du neutre ont ordre ∞ , donc $g_{\#}(1) = 0$, et $\text{Im}(g_{\#}) = \{0\}$ ce qui montre l'existence du relèvement. Énoncé Indication

6.4 2) \mathbb{R} est contractile, i.e. il existe une homotopie $H : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ entre l'application $\text{id}_{\mathbb{R}}$ et l'application constante $c_{g(x_0)}$, qui ne bouge pas $g(x_0)$. Ainsi l'application $\text{id}_{\mathbb{R}} \circ \bar{g} = \bar{g}$ est homotope via $H \circ (\text{id}_{[0,1]} \times \bar{g})$ à l'application constante $c_{g(x_0)} \circ \bar{g}$.

Énoncé Indication

6.5. Corrigé exercice. — Supposons l'existence d'une application continue $f : S^n \rightarrow S^1$ avec $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in S^n$. Alors regardons le diagramme de passage au quotient par rapport à l'involution antipodale

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{f} & S^1 \\ \downarrow \pi^1 & & \downarrow \pi^2 \\ \mathbb{R}P^n & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathbb{R}P^1 = S^1 \end{array}$$

L'application \bar{f} existe grâce à l'hypothèse par la propriété universelle du quotient. Pour des raisons algébriques ($\bar{f}_{\#}$ est un homomorphisme de groupes de \mathbb{Z}_2 vers \mathbb{Z} , cf exo 6.4), $\bar{f}_{\#} = 0$. Par ailleurs, soit γ un chemin dans S^n du point base x_0 à son antipodal $-x_0$. On sait que (cf la preuve du théorème 12.7 du cours) $\pi_1 \circ \gamma$ engendre le groupe fondamental $\pi_1(\mathbb{R}P^n, \pi^1(x_0)) = \mathbb{Z}_2$. D'un autre côté, $f \circ \gamma$ est un chemin de $f(x_0)$ à $f(-x_0) = -f(x_0)$ dans S^1 , i.e. un chemin qui fait un demi-tour du cercle. Il est envoyé sous π^2 sur un générateur de $\pi_1(S^1, f(x_0))$, ce qui contredit la commutativité du diagramme, puisque $\bar{f}_{\#} = 0$.

Montrons aussi que l'assertion est équivalente à celle proposé dans l'énoncé de l'exercice : étant donné $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^2$, supposons que $f(x) \neq f(-x)$ pour tout $x \in S^n$. Alors $g(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}$ est une application continue $g : S^n \rightarrow S^1$ avec $g(-x) = -g(x)$. Par ce qui précède, un tel g ne peut exister, ce qui

montre l'existence de $x \in S^n$ avec $f(x) = f(-x)$. Supposons réciproquement que pour toute application $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^2$, il existe $x \in S^n$ avec $f(x) = f(-x)$. Alors l'existence d'une application $g : S^n \rightarrow S^1$ avec $g(-x) = -g(x)$ pour tout $x \in S^n$ est impossible. D'où l'équivalence.

Une autre approche est la suivante : supposons l'existence d'une application continue $f : S^n \rightarrow S^1$ \mathbb{Z}_2 -équivariante (i.e. $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in S^n$). f se relève dans le revêtement universel

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{R} \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow \\ S^n & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

en une application continue $\tilde{f} : S^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\exp(2\pi i \tilde{f}(x)) = f(x)$ pour tout $x \in S^n$. Or, $f(-x) = -f(x)$ implique $\exp(2\pi i \tilde{f}(-x)) = -\exp(2\pi i \tilde{f}(x))$, ou encore $\exp(2\pi i(\tilde{f}(-x) - \tilde{f}(x))) = -1$. Ainsi $\tilde{f}(-x) - \tilde{f}(x) \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ pour tout $x \in S^n$. L'application continue $x \mapsto \tilde{f}(-x) - \tilde{f}(x)$ à valeurs discrètes sur le connexe S^n est donc constante, notons la $\tilde{f}(-x) - \tilde{f}(x) = C$. En remplaçant x par $-x$, on obtient également $\tilde{f}(x) - \tilde{f}(-x) = C$. Addition de ces deux égalités donne $C = 0$, ce qui contredit $C \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$.

Énoncé Indication

6.6. Corrigé exercice. — a) Soient $G_1 = \langle a, b \mid baba^{-1} \rangle$ et $G_2 = \langle a, c \mid a^2c^2 \rangle$. On veut montrer que $G_1 \cong G_2$. Définissons des homomorphismes de groupes $f : F(a, b) \rightarrow F(a, c)$ et $g : F(a, c) \rightarrow F(a, b)$ par $f(a) = a$, $f(b) = ca$ et $g(a) = a$, $g(c) = ba^{-1}$ (ces prescriptions suffisent pour définir des homomorphismes uniques par la propriété universelle du groupe libre sur un alphabet). f et g sont des isomorphismes l'un inverse de l'autre : en effet, $g \circ f(a) = a$, $f \circ g(a) = a$, $g \circ f(b) = g(ca) = ba^{-1}a = b$ et $f \circ g(c) = f(ba^{-1}) = caa^{-1} = c$. On a $c^{-1}f(baba^{-1})c = c^{-1}caaca^{-1}c = a^2c^2$ et $(ba^{-1})g(a^2c^2)(ba^{-1})^{-1} = ba^{-1}a^2(ba^{-1})^2(ba^{-1})^{-1} = baba^{-1}$, donc le sous-groupe distingué de $F(a, b)$ engendré par $baba^{-1}$ et celle de $F(a, c)$ engendré par a^2c^2 se correspondent sous les isomorphismes f et g . D'où un isomorphisme

$$G_1 = F(a, b) / \langle baba^{-1} \rangle \cong F(a, c) / \langle a^2c^2 \rangle = G_2.$$

La présentation avec la relation $baba^{-1}$ correspond à la présentation de la bouteille de Klein comme carré avec identifications, tandis que celle avec la relation a^2c^2 correspond à la présentation de la bouteille de Klein comme somme connexe de deux plans projectifs (cf le livre de W. Massey, Algebraic Topology, An Introduction. p. 9, p. 15).

Énoncé Indication

6.6 b) Soient $G_3 = \langle a, b \mid a^3b^{-2} \rangle$ et $G_4 = \langle x, y \mid xyxy^{-1}x^{-1}y^{-1} \rangle$. On raisonne comme dans a). On a des isomorphismes de groupes libres $f : F(a, b) \rightarrow F(x, y)$ et $g : F(x, y) \rightarrow F(a, b)$ définis par $f(a) = xy$, $f(b) = yxy$, et $g(x) = a^2b^{-1}$, $g(y) = ba^{-1}$. Il est facile de vérifier que f et g sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre, et qu'ils descendent en des isomorphismes $G_3 \cong G_4$ (i.e. que $f(a^3b^{-2}) = xyxy^{-1}x^{-1}y^{-1}$, et que $g(xyxy^{-1}x^{-1}y^{-1}) = a^3b^{-2}$). Ces deux groupes sont en fait des groupes fondamentaux du complément d'un noeud torique dans \mathbb{R}^3 (cf 18.2 dans le cours et le livre de W. Massey, Algebraic Topology, An Introduction. p. 136-141).

Énoncé Indication

6.7. Corrigé exercice. — Étant donné un graphe, on regarde le sous-graphe maximal qui est un arbre, i.e. qui ne contient pas de boucle. Un arbre est contractile. Ce sous-arbre maximal contient nécessairement tous les sommets du graphe, mais il faut écarter les arêtes qui formeraient des boucles. La maximalité s'exprime donc par le fait que dès qu'on rajoute une arête du graphe, on crée une boucle. Le groupe fondamental du graphe est un groupe libre dont les générateurs correspondent aux arêtes qu'on doit rajouter à l'arbre maximal afin de retrouver le graphe du départ. En effet, c'est le théorème de Van Kampen I (théorème 17.1 du cours), car le sous-arbre maximal est contractile - les arêtes rajoutées deviennent des lacets en contractant le sous-arbre maximal.

Rappelons maintenant les trois revêtements à deux feuillets deux à deux non-isomorphes de la figure huit : R_1 où les deux croisements sont bouclés à droite, R_2 où ils sont bouclés à gauche, et R_3 où les deux croisements sont liés par quatre liens. Pour R_1 , le sous-arbre maximal comprend les deux croisements et un des deux liens qui les lient, donc le groupe fondamental $G_1 := \pi_1(R_1, x_0)$ de R_1 est un sous-groupe (libre, par le théorème de Schreier 21.1) a trois générateurs du groupe $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Ils peuvent s'exprimer par les lacets α et β qui

engendrent le groupe fondamental $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ de la figure huit. Soit x_0 le croisement en bas. On rajoute des flèches aux arêtes de R_1 afin d'avoir unicité du relèvement des chemins (cf exo ??). Quand on relève α (qui parcourt le cercle du gauche de la figure huit exactement une fois) en x_0 pour exprimer le générateur qui correspond par Van Kampen I au lien de gauche entre les deux croisements, alors on arrive à x_1 , le croisement du haut, et ensuite on redescend vers x_0 par l'autre lien. Ce générateur correspond donc à α^2 . Quand on relève β en x_0 pour exprimer le générateur qui correspond à la boucle de droite en bas, alors on relève β en x_0 , et on parcourt la boucle de droite et retourne sur x_0 . Ce générateur correspond donc à β . Finalement, pour exprimer le générateur qui correspond à la boucle du haut, il faut d'abord relever α pour monter de x_0 à x_1 , ensuite on peut parcourir la boucle (cela correspond à relever β), et finalement on redescend par α^{-1} pour ne pas créer d'autre boucle. Ce générateur correspond donc à $\alpha * \beta * \alpha^{-1}$. En conclusion, on a $G_1 = \langle \alpha^2, \beta, \alpha * \beta * \alpha^{-1} \rangle \subset \langle \alpha, \beta \rangle = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

Le même type de raisonnement montre que G_2 (i.e. le groupe fondamental de R_2) est $G_2 = \langle \alpha, \beta * \alpha * \beta^{-1}, \beta^2 \rangle$, et que G_3 , le groupe fondamental de R_3 est $G_3 = \langle \alpha^2, \beta^2, \alpha * \beta \rangle$. Remarquer qu'il ne pas gênant d'avoir un sous-groupe librement engendré par trois éléments d'un groupe libre engendré par deux éléments.

Énoncé Indication

Chapitre V : Classification des revêtements

c5

Le théorème de relèvement

19.1. Théorème. — Soit $p : (X, x_0) \rightarrow (B, b_0)$ un revêtement avec points-base. Soit Y un espace connexe par arcs et localement connexe par arcs, et $f : (Y, y_0) \rightarrow (B, b_0)$ une application continue.

Il existe $\tilde{f} : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ continue telle que $p \circ \tilde{f} = f$ (on dit que \tilde{f} relève f) si et seulement si $\text{Im}(f_{\#}) \subset \text{Im}(p_{\#})$. De plus le relèvement est unique.

Démonstration. — “ \Rightarrow ” C’est évident car $f_{\#} = p_{\#} \circ \tilde{f}_{\#}$.

“ \Leftarrow ” Soit $\alpha : [0, 1] \rightarrow Y$ un arc de y_0 à y_1 ; $\beta = f \circ \alpha$ est un arc de b_0 à $f(y_1)$ dans B . D’après le théorème 10.2 il admet un unique relèvement $\tilde{\beta} : [0, 1] \rightarrow X$ à partir de x_0 . Si \tilde{f} existe, $\tilde{f} \circ \alpha$ est aussi un relèvement de β à partir de x_0 ; donc on doit avoir $\tilde{f} \circ \alpha = \tilde{\beta}$ et en particulier $\tilde{f}(y_1) = \tilde{\beta}(1)$. Ainsi on a trouvé une “formule” pour \tilde{f} . Il reste à voir que \tilde{f} est bien défini, indépendamment du choix de α et que \tilde{f} est continu.

\tilde{f} est bien défini. Si α' est un autre arc de y_0 à y_1 , on a $\beta' = f' \circ \alpha'$ de b_0 à $f(y_1)$ et le lacet $\beta * \beta'^{-1}$ vérifie $[\beta * \beta'^{-1}] \in \text{Im}(f_{\#})$. Par hypothèse, $[\beta * \beta'^{-1}] \in \text{Im}(p_{\#})$ et donc $\beta * \beta'^{-1}$ se relève en un lacet γ de X basé en x_0 . On a $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2$ où γ_1 relève β et γ_2 relève β'^{-1} . Donc γ_2^{-1} est le relèvement $\tilde{\beta}'$ de β' à partir de x_0 . Comme $\gamma_2(0) = \gamma_1(1)$, on a $\gamma_2^{-1}(1) = \gamma_1(1)$, d’où $\tilde{\beta}'(1) = \tilde{\beta}(1)$. Donc $\tilde{f}(y_1)$ est bien défini.

Continuité de \tilde{f} . Soit W un voisinage ouvert de $x_1 = \tilde{f}(y_1)$ dans X . Si W est assez petit, $V = p(W)$ est un ouvert trivialisant de p et $p|_W$ est un homéomorphisme de W sur V . Par continuité de f , il existe U , voisinage ouvert de y_1 dans Y , tel que $f(U) \subset V$. Comme Y est localement connexe, on peut prendre U connexe par arcs. Pour tout $y \in U$ il existe un chemin γ de y_1 à y et on peut joindre y_0 à y par $\alpha * \gamma$. Donc $\tilde{f}(y)$ s’obtient en relevant $f \circ \gamma$ (arc dans B de $f(y_1)$ à $f(y)$) à partir de $\tilde{f}(y_1)$. C’est un arc de W puisque $f \circ \gamma$ est un arc de V et que $p : W \rightarrow V$ est un homéomorphisme. Finalement $\tilde{f}(y) \in W$ et $\tilde{f}^{-1}(W)$ contient U ; c’est donc un voisinage ouvert de y_1 . \square

19.2. Corollaire. — Si Y est localement connexe par arcs et 1-connexe, alors toute application continue $f : (Y, y_0) \rightarrow (B, b_0)$ se relève dans tout revêtement (X, x_0) de (B, b_0) .

Remarquer qu'ici x_0 est arbitraire dans $p^{-1}(b_0)$; donc $\tilde{f}(y_0)$ est également arbitraire dans $p^{-1}(b_0)$.

19.1. Exercice. — Fabriquer un revêtement connexe du huit à trois feuillets et une application $f : S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1$ admettant un seul relèvement (et non pas trois).

19.3. Exercice (Théorème de Borsuk-Ulam). — Pour $n \geq 2$, il n'existe pas d'application continue $F : S^n \rightarrow S^1$ telle que $F(-x) = -F(x)$.

Indication. — Soit P^n l'espace projectif de dimension n ; il est le quotient de la n -sphère par l'involution antipodale. Si F existe, on a $f : P^n \rightarrow S^1$ et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{F} & S^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ P^n & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

où les flèches verticales sont des revêtements à deux feuillets. On a $\pi_1(P^n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. Utiliser alors que $f_{\#} = 0$ et conclure. \square

19.4. Corollaire. — Si $n \geq 2$ et $g : S^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ continue vérifie $g(-x) = -g(x)$, alors il existe x_0 tel que $g(x_0) = 0$.

20. Revêtement 1-connexe ou universel

Terminologie : quand on dit que X est localement "P", cela signifie que, pour tout $x \in X$, tout voisinage de x contient un voisinage ouvert de x ayant la propriété P.

20.1. Théorème. — Soit X un espace topologique connexe par arcs et localement 1-connexe. Alors il existe un revêtement $p : \tilde{X} \rightarrow X$ où \tilde{X} est 1-connexe.

Démonstration. — Soit $x_0 \in X$ un point base. On définit l'espace \tilde{X} suivant :

$\tilde{X} := \{(x, [\alpha]) \mid x \in X \text{ et } [\alpha] = \text{classe d'homotopie à extrémités fixées d'un arc } \alpha \text{ de } x_0 \text{ à } x_1\}$.

Topologie sur \tilde{X} . Soit $U(x)$ un voisinage ouvert de x dans X 1-connexe. Pour tout $x' \in U(x)$, x' est muni d'un arc α' de x_0 à x' dont la classe d'homotopie à extrémités fixes $[\alpha']$ est bien déterminée : $\alpha' = \alpha * \gamma$ où γ joint x à x' dans $U(x)$. On définit

$\tilde{U}(x, [\alpha]) = \{(x', [\alpha']) \mid x' \in U(x) \text{ et } \alpha' = \alpha * \gamma \text{ avec } \gamma \text{ un chemin dans } U(x)\}$.

On dit que $\tilde{U} \subset \tilde{X}$ est un *ouvert* si, pour tout $(x, [\alpha]) \in \tilde{U}$, il existe un $\tilde{U}(x, [\alpha]) \subset \tilde{U}$. Autrement dit, les $\tilde{U}(x, [\alpha])$ forment une base d'ouverts de la topologie de \tilde{X} .

Vérification des axiomes d'une topologie :

- 1) Une réunion d'ouverts est un ouvert. (évident)
- 2) L'intersection de deux ouverts est un ouvert : soit $(x', [\alpha]) \in \tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2$. Donc il existe $\tilde{U}_1(x, [\alpha]) \subset \tilde{U}_1$ et $\tilde{U}_2(x, [\alpha]) \subset \tilde{U}_2$. Dans X , $U_1(x) \cap U_2(x)$ contient un voisinage ouvert 1-connexe $U(x)$ de x . Alors

$$\tilde{U}(x, [\alpha]) \subset \tilde{U}_1(x, [\alpha]) \cup \tilde{U}_2(x, [\alpha]) \subset \tilde{U}_1 \cup \tilde{U}_2.$$

La projection $\tilde{X} \rightarrow X$. Soit $p : \tilde{X} \rightarrow X$, $(x, [\alpha]) \mapsto x$. Elle est continue et est un homéomorphisme local car $p : \tilde{U}(x, [\alpha]) \rightarrow U(x)$ est un homéomorphisme.

Revêtement. La fibre-base $p^{-1}(x_0)$ est en bijection naturelle avec $\{[\alpha]\} \cong \pi_1(X, x_0)$. Montrons que $U(x)$ est un ouvert trivialisant. On a :

$p^{-1}(U(x)) = \{(x', [\alpha]) \mid x' \in U(x) \text{ et } [\alpha'] = \text{classe de chemin de } x_0 \text{ à } x'\}$.

On définit

$$p^{-1}(U(x)) \rightarrow p^{-1}(x), \quad (x', [\alpha']) \mapsto (x, [\alpha' * \gamma])$$

où γ joint x' à x dans $U(x)$. On vérifie que cette application donne une trivialisatation locale.

\tilde{X} est connexe par arcs. Soit $(x, [\alpha]) \in \tilde{X}$. Le chemin $(\alpha(t), [\alpha|_{[0,t]})$ est un chemin de $\tilde{x}_0 := (x_0, [c_{x_0}])$ à $(x, [\alpha])$.

\tilde{X} est 1-connexe. On utilise la suite exacte de revêtement (14.2)

$$1 \rightarrow \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \rightarrow p^{-1}(x_0) \rightarrow 1$$

et $p^{-1}(x_0) = \pi_1(X, x_0)$. Donc $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \{1\}$. \square

20.2. Remarque. — $\pi_1(X, x_0)$ agit à gauche sur \tilde{X} par

$$[\gamma] \cdot (x, [\alpha]) = (x, [\gamma * \alpha]).$$

20.1. Exercice. — Vérifier la condition (L) et que $X \cong \pi_1(X, x_0) \backslash \tilde{X}$.

20.3. Théorème (“Unicité” du revêtement universel)

Soit (X, x_0) localement connexe par arcs, $p_1 : (X_1, x_1) \rightarrow (X, x_0)$ et $p_2 : (X_2, x_2) \rightarrow (X, x_0)$ deux revêtements 1-connexes. Alors il existe un unique homéomorphisme $h : (X_1, x_1) \rightarrow (X_2, x_2)$ tel que $p_2 \circ h = p_1$.

Démonstration. — On applique le théorème de relèvement 19.1 à l’application p_1 et au revêtement p_2 . Donc il existe $\tilde{p}_1 : (X_1, x_1) \rightarrow (X_2, x_2)$, unique, telle que $p_2 \circ \tilde{p}_1 = p_1$. En permutant les rôles, il existe $\tilde{p}_2 : (X_2, x_2) \rightarrow (X_1, x_1)$ telle que $p_1 \circ \tilde{p}_2 = p_2$. La composée $\tilde{p}_2 \circ \tilde{p}_1 : (X_1, x_1) \rightarrow (X_1, x_1)$ relève l’identité de X . Par unicité du relèvement (à point base fixé), on a $\tilde{p}_2 \circ \tilde{p}_1 = Id_{X_1}$. De même $\tilde{p}_1 \circ \tilde{p}_2 = Id_{X_2}$. Donc \tilde{p}_1 est le h cherché. \square

20.4. Théorème (Classification des revêtements)

On suppose B connexe par arcs et localement 1-connexe.

- 1) Pour tout sous-groupe $H \subset \pi_1(B, b_0)$, il existe un revêtement $p : (X, x_0) \rightarrow (B, b_0)$ tel que $p_{\#}(\pi_1(X, x_0)) = H$.
- 2) Si $p' : (X', x'_0) \rightarrow (B, b_0)$ est un autre revêtement tel que $p'_{\#}(\pi_1(X', x'_0)) = H$, il existe un unique homéomorphisme $h : (X, x_0) \rightarrow (X', x'_0)$ tel que $p' \circ h = p$.

Démonstration. — 1) Soit $r : (\tilde{B}, \tilde{b}_0) \rightarrow (B, b_0)$ un revêtement 1-connexe. On sait que $G := \pi_1(B, b_0)$ agit à gauche sur \tilde{B} . On fait agir le sous-groupe H sur \tilde{B} par l’action induite. Soit $X =_H \tilde{B}$, $q : \tilde{B} \rightarrow X$ la projection, et $x_0 = q(\tilde{b}_0)$. Comme G , l’action de H vérifie la condition (L). Donc q est un revêtement et $\pi_1(X, x_0) \cong H$ (12.7).

L’application r étant constante sur les orbites de H se factorise par $q : r = p \circ q$. Alors p est un revêtement. En effet, si V est un ouvert trivialisant de

$r, p^{-1}(V) \cong H \backslash r^{-1}(V) \cong (H \backslash p^{-1}(b)) \times V$. Par construction la fibre-base $p^{-1}(b_0) = H \backslash G$. La suite exacte de revêtement pour p donne

$$1 \rightarrow \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{p_{\#}} G \rightarrow H \backslash G \rightarrow 1$$

Donc $\text{Im}(p_{\#}) = H$.

2) On fait la même démonstration que pour le revêtement universel en utilisant le théorème de relèvement 19.1. \square

21. Applications

A. – Le théorème de Schreier

21.1. Théorème. — *Tout sous-groupe d'un groupe libre est libre.*

Esquisse de la démonstration. — Soit $G = F(A)$ le groupe libre sur un alphabet A , fini ou infini. On a $G = \pi_1(X, x_0)$ où $X = \bigvee_{i \in A} S_i^1$, bouquet de cercles indexés par A .

Soit $H \subset G$ un sous-groupe. Soit $p : (X', x'_0) \rightarrow (X, x_0)$ le revêtement associé à H . C'est un graphe (union de sommets et d'arêtes). Le théorème est donc une conséquence directe du résultat suivant. \square

21.2. Proposition. — *Tout graphe Γ a un groupe fondamental libre.*

Démonstration de la proposition. — Il existe un arbre maximal T (par Zorn). Celui-ci passe par tous les sommets. Soit A l'ensemble des arêtes de Γ qui ne sont pas dans T . Par Van Kampen, $\pi_1(\Gamma) \cong F(A)$.

21.1. Exercice. — Mettre les détails pour un graphe dénombrable. \square

B. – Automorphismes de revêtements

21.3. Définition. — Un *automorphisme* de revêtement $p : X \rightarrow B$ est un homéomorphisme $h : X \rightarrow X$ tel que $p \circ h = p$.

21.4. Théorème. — *Soit $p : (X, x_0) \rightarrow (B, b_0)$ un revêtement avec points-base. Soit $H = p_{\#}(\pi_1(X, x_0))$ et $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$. On suppose que X et B sont*

connexes par arcs et que B (donc X) est localement 1-connexe. Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :

- 1) $\gamma^{-1}H\gamma = H$ (on dit que γ normalise H dans $G := \pi_1(B, b_0)$).
- 2) Il existe un unique automorphisme de revêtement h tel que $h(x_0) = x_0 \cdot \gamma$ pour l'action naturelle à droite de $\pi_1(B, b_0)$ sur $p^{-1}(b_0)$.

Démonstration. — “2) \Rightarrow 1)” On laisse en exercice de démontrer la formule de changement de point-base :

$$p_{\#}(\pi_1(X, x_0 \cdot \gamma)) = \gamma^{-1}H\gamma.$$

Par hypothèse $p_{\#} = p_{\#} \circ h_{\#}$ avec $h(x_0) = x_0 \cdot \gamma$. Donc $p_{\#}(\pi_1(X, x_0 \cdot \gamma)) = p_{\#}(\pi_1(X, x_0))$. D'où $\gamma^{-1}H\gamma = H$.

“1) \Rightarrow 2)” Le revêtement pointé $p : (X, x_0 \cdot \gamma) \rightarrow (B, b_0)$ est associé à $\gamma^{-1}H\gamma = H$ (c'est-à-dire $H = p_{\#}(\pi_1(X, x_0 \cdot \gamma))$). Le revêtement $p : (X, x_0) \rightarrow (B, b_0)$ en est un autre. Par unicité (20.4) ils sont isomorphes comme revêtements pointés. \square

21.5. Théorème. — Soit $p : X \rightarrow B$ un revêtement d'espaces localement connexes par arcs avec X connexe par arcs et B localement 1-connexe. Alors

$$\text{Aut}(p) \cong N/H,$$

où $H = p_{\#}(\pi_1(X, x_0))$ et où N est le normalisateur de H dans $\pi_1(X, x_0)$ c.-à-d. $N = \{\gamma \in \pi_1(X, x_0) \mid \gamma^{-1}H\gamma = H\}$.

Démonstration. — On définit $N \xrightarrow{\phi} \text{Aut}(p)$ par $\gamma \mapsto h$ où h est l'unique automorphisme du revêtement p tel que $h(x_0) = x_0 \cdot \gamma$. L'application ϕ est un morphisme de groupes : soit $\gamma_1 \mapsto h_1$ et $\gamma_2 \mapsto h_2$; alors $h_1(h_2(x_0)) = h_1(x_0 \cdot \gamma_2) = (x_0 \cdot \gamma_1) \cdot \gamma_2$. Expliquons la dernière égalité. En effet, si $\tilde{\gamma}_2$ est un chemin de x_0 à $x_0 \cdot \gamma_2$ tel que $[p \circ \tilde{\gamma}_2] = \gamma_2$, alors $h_1 \circ \tilde{\gamma}_2$ est un relèvement du même lacet à partir de $x_0 \cdot \gamma_1$. Finalement

$$h_1 \circ h_2(x_0) = x_0 \cdot (\gamma_1 \gamma_2),$$

ce qui prouve que ϕ est bien un morphisme de groupes. Le morphisme ϕ est surjectif d'après le théorème 21.5. Le noyau de ϕ est H car $x_0 \cdot \gamma = x_0$ implique que γ est élément de H . \square

21.6. Définition. — On dit que le revêtement $p : X \rightarrow B$ est *régulier* ou *galoisien* si $\text{Aut}(p)$ agit transitivement sur chaque fibre. Si B est connexe par arcs, il suffit que cette condition soit satisfaite sur la fibre-base.

Exemple. — C'est le cas si $B = H \backslash X$ où H agit à gauche sur X en vérifiant la condition (L) (8.5).

21.7. Corollaire. — Avec les hypothèses topologiques du théorème 21.5, le revêtement est galoisien si et seulement si H est distingué dans $\pi_1(B, b_0)$. Dans ce cas $\text{Aut}(p) \cong \pi_1(B, b_0)/H$ et B est homéomorphe à $\text{Aut}(p) \backslash X$.

La démonstration de ce corollaire est laissée en exercice.

FRANÇOIS LAUDENBACH & FRIEDRICH WAGEMANN
Département de mathématiques, Université de Nantes,
2 Rue de la Houssinière F-44322 Nantes Cedex 03

UNIVERSITÉ DE NANTES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
Maîtrise : Topologie Algébrique
François Laudenbach (CM) & Friedrich Wagemann (TD)

td5

Travaux dirigés de Mathématiques, Fiche 7, Topologie algébrique
2005-2006

Classification des revêtements, revêtement universel.

7.1. Exercice. — Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement connexe et localement 1-connexe. On suppose que toutes les fibres de p ont deux éléments. Montrer que p est galoisien.

Indication Corrigé

7.2. Exercice. — Expliciter les revêtements universels pour les sphères S^n , les espaces projectifs $\mathbb{R}P^n$, les tores \mathbb{T}^n , le ruban de Möbius et la bouteille de Klein.

Indication Corrigé

7.3. Exercice. — Soit X un espace topologique connexe, localement contractile, et x un point de X . Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement connexe à trois feuillettes de X . On suppose que ce revêtement n'est pas galoisien.

1) Combien d'automorphismes ce revêtement possède-t-il ?

2) Montrer que le groupe fondamental $\pi_1(X, x)$ n'est pas commutatif.

Indication Corrigé

7.4. Exercice. — Soit G un groupe et $m \in G$. Notons $\langle m \rangle$ le sous-groupe normal engendré par m et G_{ab} l'abélianisé de G .

Montrer que $G/\langle m \rangle = 0$ implique que G_{ab} est cyclique.

Indication Corrigé

7.5. Exercice. — Reprendre les revêtements connexes à deux feuilletés de la figure huit ; par des moyens topologiques, on a montré qu'il y a exactement trois tels revêtements, et on a calculé les groupes fondamentaux associés. Pour quel problème de classification purement algébrique sont-ils la solution ? Donner une preuve purement algébrique de la dite classification topologique.

Indication Corrigé

7.6. Exercice. — Soit X un espace topologique connexe par arcs et localement 1-connexe, notons x_0 un point de base. Soit \tilde{X} le revêtement universel de X . Montrer que $\pi_1(X, x_0)$ agit avec la propriété (L) sur \tilde{X} , et montrer que le quotient est homéomorphe à X .

Indication Corrigé

7.7. Exercice. — Soit $p : (X, x_0) \rightarrow (B, b_0)$ un revêtement connexe par arcs et localement 1-connexe avec X 1-connexe. Expliciter une action à gauche de $\pi_1(B, b_0)$ sur X par automorphismes de revêtement vérifiant la condition (L). [Indication : s'inspirer de l'action de l'exercice 7.6]

Corrigé

7.8. Exercice. — Soient $p : (Z, z_0) \rightarrow (X, x_0)$ et $q : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ deux revêtements d'espaces connexes et localement 1-connexes tels qu'on ait $G(Z) \subset G(Y) \subset \pi_1(X, x_0)$ pour les groupes caractérisant correspondantes (on rappelle que le groupe caractérisant $G(Z)$ d'un revêtement $p : (Z, z_0) \rightarrow (X, x_0)$ est le sous-groupe $p_{\#}(\pi_1(Z, z_0)) \subset \pi_1(X, x_0)$).

Montrer qu'il existe un revêtement $f : (Z, z_0) \rightarrow (Y, y_0)$ tel que $q \circ f = p$.

(Indication : Montrer d'abord qu'il existe un revêtement $p' : (Y', y'_0) \rightarrow (Y, y_0)$ avec $G(Y') = q_{\#}^{-1}(G(Z))$. Ensuite, on pourra relever des applications afin de montrer que $(Y', y'_0) \approx (Z, z_0)$.)

Corrigé

7.9. Exercice. — Soit X un revêtement galoisien connexe et localement connexe par arcs. Montrer que tout endomorphisme de X est un automorphisme.

Indication Corrigé

UNIVERSITÉ DE NANTES
 DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
 Maîtrise : Topologie Algébrique

François Laudenbach (CM) & Friedrich Wagemann (TD)

Classification des revêtements, revêtement universel : indications pour les exercices

7.1. Indication exercice. — **7.1** Quelle est la propriété spéciale d'un sous-groupe d'indice 2 ?

Énoncé Corrigé

7.2. Indication exercice. — **7.2** Chercher dans les exercices déjà faits !

Énoncé Corrigé

7.3. Indication exercice. — **7.3** 1) Considerer les trois groupes qui interviennent dans le problème, et se rappeler que l'indice est multiplicatif.

Énoncé Corrigé

7.4. Indication exercice. — **7.4** Écrire l'élément général du groupe $\langle m \rangle$.

Énoncé Corrigé

7.5. Indication exercice. — **7.5** Pour répondre à la première question, il suffit de se rappeler la relation entre le nombre de feuillets et l'indice.

Énoncé Corrigé

7.6. Indication exercice. — **7.6** C'est l'ouvert $\tilde{U}(x, [\alpha])$ qui va satisfaire la propriété (L). C'est la projection $p : \tilde{X} \rightarrow X$ qui induit l'homéomorphisme.

Énoncé Corrigé

7.9. Indication exercice. — **7.9** On peut procéder en regardant les endomorphismes en tant que relevés d'applications.

Énoncé Corrigé

UNIVERSITÉ DE NANTES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Maîtrise : Topologie Algébrique

François Laudenbach (CM) & Friedrich Wagemann (TD)

Travaux dirigés de Mathématiques, Fiche 7, Topologie algébrique
2005-2006

Classification des revêtements, revêtement universel : solutions des exercices.

7.1. Corrigé exercice. — L'indice de $p_{\#}\pi_1(E, x_0)$ est 2. Mais un sous-groupe H d'indice 2 d'un groupe G est automatiquement distingué : en effet, si $G = gH \cup H$ et $Hg \subset H$, alors $g \in H$ - une contradiction. Ainsi $Hg = gH$, i.e. H est distingué, et $p : E \rightarrow X$ est galoisien.

Énoncé Indication

7.2. Corrigé exercice. — Le revêtement universel pour la sphère S^n avec $n \geq 2$ est l'identité $\text{id}_{S^n} : S^n \rightarrow S^n$, puisque S^n est 1-connexe dans ces cas (cf prop. 11.3). Le revêtement universel de S^1 est donné par l'exponentielle $\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto 2\pi it$. Le revêtement universel des espaces projectifs réels $\mathbb{R}P^n, n \geq 2$, est donné par l'involution antipodale $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n, x \mapsto [\pm x]$. Le revêtement universel du tore \mathbb{T}^2 (et plus généralement des tores $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$) est donné par le quotient $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ (resp. $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$). Le revêtement universel du ruban de Möbius M (non-compact) est construit dans 3.5 3) : $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ est donné par le passage au quotient par rapport au groupe engendré par σ . Le revêtement universel de la bouteille de Klein K est donné dans l'exo 3.4 : $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow K$ est le passage au quotient par rapport au groupe G engendré par σ et τ .

Énoncé Indication

7.3. Corrigé exercice. — 1) Notons G le groupe fondamental de X en un point base, et H son sous-groupe qui est l'image sous $p_{\#}$ du groupe fondamental de E . Notons encore N le normalisateur de H dans G . Par hypothèse, l'indice $[G : H]$ de H dans G est égal à 3 (cf théorème 14.2 du cours). Par la multiplicativité des indices, on a $3 = [G : H] = [G : N][N : H]$. Ils se présentent donc deux cas : soit $[G : N] = 1$ et $[N : H] = 3$; dans ce cas, $G = N$ et H est par suite distingué (ceci implique aussi que le revêtement correspondant est galoisien). Ce cas est exclu par les hypothèses. Donc on reste avec l'autre cas qui est $[G : N] = 3$ et $[N : H] = 1$. On en déduit $N = H$, et par la classification des automorphismes d'un revêtement (cf théorème 21.5 du cours), on a $\text{Aut}(X) = N/H = \{1\}$. Le seul automorphisme que X possède est donc l'identité. Énoncé Indication

7.3 2) Si le groupe fondamental de X était commutatif, alors tout sous-groupe serait distingué. Par ce qui précède, ce n'est pas le cas : H n'est pas distingué.

Énoncé Indication

7.4. Corrigé exercice. — Soit $G = \bigcup_{i \in I} g_i \langle m \rangle$ la décomposition en classes à gauche de G par rapport au sous-groupe distingué $\langle m \rangle$ engendré par m . $G / \langle m \rangle = 0$ implique $G = \langle m \rangle$. Par définition,

$$\langle m \rangle = \{h_1 m^{n_1} h_1^{-1} h_2 m^{n_2} h_2^{-1} \dots h_r m^{n_r} h_r^{-1} \mid r \in \mathbb{N}, h_i \in G, n_i \in \mathbb{Z}\}.$$

G_{ab} est l'abélianisé de G , i.e. $G_{\text{ab}} = G / [G, G]$ où $[G, G]$ est le sous-groupe des commutateurs de G , i.e. le sous-groupe engendré par les $aba^{-1}b^{-1}$ pour $a, b \in G$. On a clairement $\langle m \rangle_{\text{ab}} = \{m^{n_1 + \dots + n_r} \mid r \in \mathbb{N}, n_i \in \mathbb{Z}\}$, ainsi $G_{\text{ab}} = \langle m \rangle_{\text{ab}}$ est cyclique, et l'ordre de $\langle m \rangle_{\text{ab}}$ dépend de l'ordre de m .

Cet exercice joue un rôle dans la situation 18.2 du cours où m est le méridien.

Énoncé Indication

7.5. Corrigé exercice. — On a vu dans exo 6.7 que les groupes fondamentaux des revêtements R_1, R_2 et R_3 qui sont à isomorphisme près tous les revêtements connexes à deux feuillettes de la figure huit, sont $G_1 = \langle a, bab^{-1}, b^2 \rangle$, $G_2 = \langle b, aba^{-1}, a^2 \rangle$ et $G_3 = \langle b^2, ab, a^2 \rangle$ en tant que sous-groupes du groupe libre $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ en les deux générateurs a et b . Le problème de classification purement algébrique dont ils sont la solution est le suivant : classifier les sous-groupes

d'indice deux de $F(a, b) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Puisque tous les sous-groupes d'indice deux sont distingués (cf exo 7.1), on peut l'énoncer aussi : classifier les sous-groupes distingués d'indice deux de $F(a, b) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

Montrons donc que les seuls sous-groupes d'indice deux de $F(a, b) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ sont G_1 , G_2 et G_3 . Soit donc G un sous-groupe d'indice deux de $F(a, b)$. Soit $a \notin G$, soit $b \notin G$, sinon $G = F(a, b)$. Sans perte de généralité, on peut supposer $a \notin G$. On a $F(a, b) = G \cup aG$, la décomposition en classes à gauche de $F(a, b)$ par rapport à G . Supposons $b \in G$. Dans ce cas $aba^{-1} \in G$, car G est distingué. Si $a^2 = ag$ pour un $g \in G$, alors $a = g \in G$ contradiction, d'où $G_2 \subset G$. Puisque tous les deux sont d'indice deux, on a $G_2 = G$. En échangeant a et b , on obtient de la même façon $G_1 = G$.

Supposons donc $b \notin G$. Alors, on a toujours $a^2, b^2 \in G$ comme plus haut. Si $ab \in aG$, alors $b \in G$ contradiction, donc $ab \in G$, et $G = G_3$. Il reste donc à montrer (de façon algébrique) que G_1 , G_2 et G_3 sont d'indice deux.

Montrons $F(a, b) = G_1 \cup bG_1$. Un mot $m \in F(a, b)$ s'écrit $m = a^{s_1}b^{t_1} \dots a^{s_i}b^{t_i}$. Si t_1 est impair, alors $b^{t_1}a^{s_2} = b^{t_1-1}ba^{s_2} = b^{t_1-1}(bab^{-1})^{s_2}b$, et l'élément $bab^{-1} \in G_1$. Donc soit $\sum_i t_i$ est pair, alors $m \in G_1$, soit $\sum_i t_i$ est impair, alors $m \in bG_1$. Le même raisonnement marche pour G_2 (en échangeant a et b). Montrons finalement $F(a, b) = G_3 \cup aG_3$. Un mot $m \in F(a, b)$ s'écrit $m = a^{s_1}b^{t_1} \dots a^{s_i}b^{t_i}$. Remarquons déjà que $ab \in G_3$ implique $ba \in G_3$. En effet, $ab \in G_3$ implique $b^{-1}a^{-1} \in G_3$, implique $b^2b^{-1}a^{-1}a^2 \in G_3$, et donc $ba \in G_3$. Soit m donné et $\sum_i(t_i + s_i)$ pair, alors on procède de la manière suivante : on multiplie m à droite par un nombre pair de copies de b . Il reste 1 ou b . Dans le premier cas, on multiplie par un nombre pair de copies de a , dans le deuxième on multiplie d'abord par $(ab)^{-1}$. Cette procédure ramène le mot m à 1, car sinon la somme des exposants serait impaire. Dans ce dernier cas, il reste après la procédure un élément a . Ainsi, soit $mg^{-1} = 1$ ou $mg^{-1} = a$ pour un certain $g \in G_3$. D'où $m = g \in G_3$, ou $m = ag \in aG_3$ suivant que la somme $\sum_i(t_i + s_i)$ est paire ou impaire.

On peut aussi voir que G_1 , G_2 , et G_3 sont d'indice deux en passant au quotient $\pi_i : F(a, b) \rightarrow F(a, b) / G_i$, $i = 1, 2, 3$, et en montrant d'abord (ce qui est quasi-évident) que G_i est distingué. Ensuite, l'image $\pi_i(m)$ s'identifie facilement suivant les puissances des a 's et b 's, puisque π_i est un homomorphisme de groupes.

Énoncé Indication

7.6. Corrigé exercice. — $\pi_1(X, x_0)$ agit sur

$$\tilde{X} = \{(x, [\alpha]) \mid x \in X, \alpha : [0, 1] \rightarrow X, \alpha(0) = x_0, \alpha(1) = x\}$$

par $[\gamma] \cdot (x, [\alpha]) = (x, [\gamma * \alpha])$. Nous affirmons que l'ouvert

$$\tilde{U}(x, [\alpha]) = \{(x', [\alpha']) \mid x' \in U(x), \alpha' = \alpha * \gamma\}$$

où $U(x)$ est un voisinage ouvert 1-connexe de x dans X , et γ un chemin dans $U(x)$, est un ouvert convenant à la condition (L) pour cette action de $\pi_1(X, x_0)$ sur \tilde{X} .

En effet,

$$[\gamma] \cdot \tilde{U}(x, [\alpha]) \cap \tilde{U}(x, [\alpha]) = \{(x', [\alpha']) \mid x' \in U(x), [\alpha * \rho] = [\gamma * \alpha * \rho']\}$$

où ρ et ρ' sont deux chemins dans $U(x)$. Or, $\alpha * \rho \sim \gamma * \alpha * \rho'$ implique $\alpha \sim \gamma * \alpha * \rho' * \rho$, et $\rho' * \rho$ est un lacet dans $U(x)$ qui est 1-connexe, donc on déduit $\alpha \sim \gamma * \alpha$, ce qui implique $\gamma \sim c_{x_0}$, le chemin constant en x_0 . Ceci montre que $\tilde{U}(x, [\alpha])$ convient pour assurer la condition (L).

Montrons que $X \approx \pi_1(X, x_0) \backslash \tilde{X}$, l'homéomorphisme étant induit par la projection $p : \tilde{X} \rightarrow X$. p est constante sur les classes d'équivalence, donc factorise en $\bar{p} : \pi_1(X, x_0) \backslash \tilde{X} \rightarrow X$ continue. \bar{p} est injective, puisque $p(x, [\alpha]) = p(x', [\alpha'])$ implique $x = x'$ et par suite $\alpha * \alpha' \in \pi_1(X, x_0)$. \bar{p} est surjectif, puisque p est surjectif. \bar{p} est ouverte : soit $U \subset \pi_1(X, x_0) \backslash \tilde{X}$ ouvert, i.e. $\pi^{-1}(U) \subset \tilde{X}$ est ouvert. Mais $\pi \circ \pi^{-1}(U) = U$, et on peut donc prendre $U = \pi(U')$ pour tester l'ouverture de $\bar{p} : \bar{p}(U) = \bar{p}(\pi(U')) = p(U') \subset X$ ouvert, car le homéomorphisme local p est une application ouverte. En conclusion, \bar{p} est un homéomorphisme.

Énoncé Indication

7.7. Corrigé exercice. — On s'inspire donc de l'action de $\pi_1(X, x_0)$ sur \tilde{X} de l'exercice précédent : Supposons d'abord $p(x) = b_0$. $\pi_1(B, b_0)$ agit sur $x \in X$ par $[\gamma] \cdot x = x'$, où $x' = \tilde{\gamma}(1)$ est l'aboutissement du relevé $\tilde{\gamma}$ de γ en $p : X \rightarrow B$ à partir de x_0 . Si $x \notin \widetilde{p^{-1}(b_0)}$, il faut choisir un chemin α de x à x_0 , et on définit alors $x' = (\alpha * \tilde{\gamma} * (\widetilde{p \circ \alpha}))(1)$ où $(\widetilde{p \circ \alpha})$ est le relevé de $p \circ \alpha$ à partir de $\tilde{\gamma}(1)$. Cette prescription ne dépend pas du chemin α choisi, car dans un espace 1-connexe, tous les chemins d'un point fixé à un autre point

fixé sont homotopes. $\alpha \sim \alpha'$ implique $(p \circ \alpha) \sim (p \circ \alpha')$, et donc leurs relevés $\widetilde{(p \circ \alpha)}$ et $\widetilde{(p \circ \alpha')}$ à partir de $\tilde{\gamma}(1)$ aboutissent au même point.

Montrons que c'est une action : $x' = (\alpha * \tilde{\gamma} * \widetilde{(p \circ \alpha)})(1)$, et $x'' = (\beta * \tilde{\gamma}' * \widetilde{(p \circ \beta)})(1)$ où β est un chemin de x' à x_0 , et $[\gamma], [\gamma'] \in \pi_1(B, b_0)$. Alors $x'' = (\alpha * (\gamma * \gamma') * \widetilde{(p \circ \alpha)})(1)$, où $\widetilde{(p \circ \alpha)}$ est ici le relevé à partir de $\widetilde{(\gamma * \gamma')}(1)$.

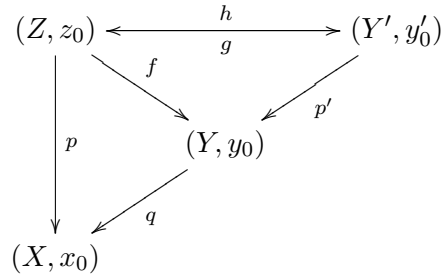
En effet, on peut prendre comme β simplement $\left(\widetilde{(p \circ \alpha)}\right)^{-1}$ où le relevé se fait à partir de $\tilde{\gamma}(1)$. C'est clair que c'est une action par endomorphismes de revêtement, et donc par automorphismes de revêtement. Finalement, il suffit de vérifier la condition (L) pour le cas $p(x) = b_0$, et pour celui-là, un ouvert trivialisant $p : X \rightarrow B$ satisfait la condition (L), car si un lacet γ envoie $x \in p^{-1}(U)$ sur un point dans la même composante connexe, ce point est nécessairement x lui-même, et par suite γ est homotope à zéro.

Une autre possibilité est d'utiliser l'exercice 7.6, puisque par unicité, le revêtement $p : (X, x_0) \rightarrow (B, b_0)$ est induite par le revêtement universel, et l'action est la restriction de l'action déjà construite.

Énoncé

7.8. Corrigé exercice. — Le groupe caractérisant $G(Z)$ d'un revêtement $p : (Z, z_0) \rightarrow (X, x_0)$ caractérise la propriété de relèvement de chemins dans le sens qu'il caractérise quels chemins entre deux points fixés auront le même point d'aboutissement quand relevés à partir d'un même point. Ceci équivaut à spécifier quels lacets seront relevés en lacets (et ceux-là sont exactement les lacets de $p_{\#}\pi_1(Z, z_0) = G(Z)$).

Par le théorème de classification (théorème 20.4 du cours), il existe un unique revêtement $p' : (Y', y'_0) \rightarrow (Y, y_0)$ avec $G(Y') = q_{\#}^{-1}(G(Z))$, car $q_{\#}^{-1}(G(Z))$ est un sous-groupe de $\pi_1(Y, y_0)$. Par relèvement d'applications suivant théorème 10.2 (où les hypothèses sont satisfaites grâce à $G(Z) \subset G(Y) \subset \pi_1(X, x_0)$ et au choix de $G(Y')$), on construit des applications $f : (Z, z_0) \rightarrow (Y, y_0)$, $g : (Y', y'_0) \rightarrow (Z, z_0)$ et $h : (Z, z_0) \rightarrow (Y', y'_0)$ dans le diagramme suivant :



On a $g \circ h = \text{id}_Z$, car $g \circ h$ relève $p : p \circ g \circ h = q \circ p' \circ h = q \circ f = p$. De même, on a $h \circ g = \text{id}_{Y'}$, puisque $h \circ g$ relève $p' : p' \circ h \circ g = p'$ provient de $f \circ g = p'$, et ceci est vrai, car $f \circ g$ et p' sont tous les deux des relèvements de $q \circ p' : q \circ p' = q \circ p'$ et $q \circ f \circ g = p \circ g = q \circ p'$. On en déduit que g et h sont des isomorphismes de revêtements l'un inverse de l'autre.

Énoncé

7.9. Corrigé exercice. — Soit $\phi \in \text{Aut}(X)$ un endomorphisme de X . Si $\phi = \text{id}_X$, c'est clair. Sinon, il existe $x_0 \in X$ avec $\phi(x_0) = x_1 \in X$. L'endomorphisme $\phi : (X, x_0) \rightarrow (X, x_1)$ est un relèvement de $p : (X, x_0) \rightarrow (B, b_0)$ en $p : (X, x_1) \rightarrow (B, b_0)$. L'existence de ϕ implique (par le théorème 10.2 de relèvement des applications) que

$$p_{\#}\pi_1(X, x_0) \subset p_{\#}\pi_1(X, x_1) = p_{\#}\pi_1(X, g \cdot x_0) = \gamma^{-1}p_{\#}\pi_1(X, x_0)\gamma$$

où γ est un lacet dans B qui se relève en l'action de g . Puisque $\pi_1(X, x_0)$ est distingué (X galoisien!), la condition pour pouvoir relever ϕ^{-1} est également satisfaite.

Énoncé Indication

Chapitre VI : Pavages du plan euclidien

c6

Isométries du plan

22.1. Topologie du groupe des isométries. — Le plan affine \mathbb{R}^2 est muni de la distance euclidienne

$$d(A, B) = \|B - A\| = \langle B - A, B - A \rangle^{1/2}.$$

On s'intéresse au groupe $ISO^+(\mathbb{R}^2)$ des *isométries directes* (ou conservant l'orientation), sous-groupe du groupe affine $Aff(\mathbb{R}^2)$. On rappelle qu'une *transformation affine* s'écrit dans la base canonique

$$(x, y) \mapsto (ax + by + \alpha, cx + dy + \beta)$$

avec $ad - bc \neq 0$; c'est donc un ouvert de \mathbb{R}^6 . On a une topologie induite sur $ISO^+(\mathbb{R}^2)$.

Par ailleurs, on a une suite exacte de groupes

$$1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow ISO^+(\mathbb{R}^2) \xrightarrow{D} SO(2) \rightarrow 1,$$

où D est la différentielle et où \mathbb{R}^2 étant le sous-groupe des translations.

22.1. Exercice. — Tout élément de $ISO^+(\mathbb{R}^2)$ est soit une translation, soit une rotation autour d'un point.

Le choix d'une origine dans le plan permet de considérer $SO(2)$ comme un sous-groupe de $ISO^+(\mathbb{R}^2)$, à savoir le sous-groupe des rotations autour de 0 et tout $g \in ISO^+(\mathbb{R}^2)$ s'écrit de façon unique $g = \tau \circ \rho$, où ρ est la rotation autour de 0 de matrice Dg et où $\tau = g \circ \rho^{-1}$ est une isométrie à différentielle nulle, donc une translation. Comme $g \mapsto Dg$ est continu, on a établi la proposition suivante.

22.2. Proposition. — *Le groupe $ISO^+(\mathbb{R}^2)$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^2 \times SO(2)$. En particulier, une suite $g_n = \tau_n \circ \rho_n$ tend vers $g = \tau \circ \rho$ si et seulement si $\tau_n \rightarrow \tau$ et $\rho_n \rightarrow \rho$.*

22.3. Lemme. — Si G est un sous-groupe discret de $Iso^+(\mathbb{R}^2)$, alors G est fermé dans $Iso^+(\mathbb{R}^2)$.

Démonstration. — Soit $g_n = \tau_n \circ \rho_n$ une suite dans G de limite $g = \tau \circ \rho$. La suite $(g_n)_n$ est une suite de Cauchy dans \mathbb{R}^2 et la suite $(\rho_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $SO(2) \cong S^1$;

$$g_m^{-1}g_n = (\rho_m^{-1}(\tau_m^{-1}\tau_n)\rho_m) (\rho_m^{-1}\rho_n).$$

Le premier grand facteur du membre de droite est une translation de norme $\|\tau_m^{-1}\tau_n\|$, donc arbitrairement petite, et le second facteur est une rotation autour de 0 d'angle arbitrairement petit. Comme G est discret, Id est isolé dans G . Donc, pour n et m assez grand, $g_m^{-1}g_n = Id$; la suite $(g_n)_n$ est stationnaire et la limite est dans G .

□

22.4. Proposition. — Soit $G \subset Iso^+(\mathbb{R}^2)$ un sous-groupe. Le sous-groupe G est discret si et seulement si G agit proprement sur \mathbb{R}^2 , c.-à-d. que, pour tout compact K de \mathbb{R}^2 , il n'existe qu'un nombre fini de $g \in G$ tels que $gK \cap K \neq \emptyset$.

Démonstration. —

“ \Rightarrow ” Sinon il existe $g_n = \tau_n \circ \rho_n \in G$ deux à deux distincts et $x_n \in K$ tels que $g_n(x_n) \in K$. Quitte à extraire une sous-suite, on a $x_n \rightarrow a$, $g_n(x_n) \rightarrow b$ et $\rho_n \rightarrow R \in SO(2)$. On a $\tau_n = g_n(x_n) - \rho_n(x_n) \rightarrow b - Ra$. Donc la suite $(g_n)_n$ converge dans $Iso^+(\mathbb{R}^2)$. D'après le lemme précédent, G est fermé et la limite g est dans G et donc g n'est pas isolé dans G . Contradiction.

“ \Leftarrow ” Il s'agit de voir que tout $g \in G$ est isolé pour la topologie induite par $Iso^+(\mathbb{R}^2)$ sur G . En fait, comme la multiplication à gauche par g est un homéomorphisme, il suffit de le voir pour Id . Si Id n'est pas isolé, il existe $g_n \rightarrow Id$, $g_n \neq Id$, $g_n \in G$. Alors, étant donné un disque fermé $D(0, R)$ centré en 0, $g_n(D(0, R)) \cap D(0, R) \neq \emptyset$ pour tout n assez grand et l'action de G n'est pas propre. □

Dans la suite on cherche à caractériser les sous-groupes discrets de $Iso^+(\mathbb{R}^2)$. Les groupes sous-jacents sont appelés les *groupes de pavage* (direct) du plan euclidien ; il n'y en a qu'un nombre fini, en fait cinq, mais ce n'est pas ce fait

qui retiendra notre attention.

23. Domaine de Dirichlet

Dans tout ce paragraphe G est un sous-groupe discret de $Iso^+(\mathbb{R}^2)$.

23.1. Lemme. — *L'ensemble des points du plan dont le stabilisateur est non-trivial est discret.*

Démonstration. — Soit $a \in \mathbb{R}^2$. L'orbite Ga est discrète par la proposition 22.4 ; en effet, si $D(a, r)$ est un disque compact centré en a , $gD(a, r) \cap D(a, r)$ est vide pour tout $g \in G$ sauf un nombre fini et, quitte à diminuer le rayon r , on a $B(a, r) \cap Ga = \{a\}$.

Si $b \in D(a, r/2)$, on a $\text{Stab}(b) \subset \text{Stab}(a)$. En effet, sinon on aurait deux points distincts de l'orbite de a dans $D(b, r/2)$; or, par inégalité du triangle, ce disque est contenu dans $D(a, r)$, lequel contiendrait donc deux points distincts de Ga , contredisant le choix de r .

Si $b \neq a$, $g \in \text{Stab}(b)$ implique donc $g \cdot b = b$ et $g \cdot a = a$ et, comme g préserve l'orientation, $g = Id_{\mathbb{R}^2}$. \square

23.2. Définition. — Dans la suite, on choisit $a \in \mathbb{R}^2$ tel que $\text{Stab}(a) = \{Id_{\mathbb{R}^2}\}$. On définit le *domaine de Dirichlet* associé à a par la formule :

$$\Delta := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, a) \leq d(x, g \cdot a) \text{ pour tout } g \in G\}.$$

C'est un convexe du plan.

23.3. Lemme (et définition). — *Le domaine Δ est un domaine fondamental pour l'action de G , c'est-à-dire :*

- 1) $g(\text{int}\Delta) \cap \text{int}\Delta \neq \emptyset \Rightarrow g = Id$.
- 2) $G \cdot \Delta = \mathbb{R}^2$.

Démonstration. — 1) Soit $x \in g\Delta \cap \Delta$, $g \neq Id$.

$$\left. \begin{array}{l} d(x, a) \leq d(x, g'a) \text{ pour tout } g' \in G \\ d(x, ga) \leq d(x, g'a) \text{ pour tout } g' \in G \end{array} \right\} \Rightarrow d(x, a) = d(x, ga)$$

On en déduit que x appartient à la frontière de Δ .

2) Soit $x \in \mathbb{R}^2$ et g_0a le point de l'orbite de a le plus proche de x . Alors $d(g_0^{-1}x, a) \leq d(g_0^{-1}x, ga)$ pour tout $g \in G$. Donc $x \in g_0\Delta$. \square

23.4. Hypothèse. — Pour la suite on fait l'hypothèse que Δ est compact. En particulier $G \backslash \mathbb{R}^2$ est compact.

23.5. Proposition. — On pose

$$S := \{g \in G \mid g \neq Id, g\Delta \cap \Delta \neq \emptyset\}.$$

- 1) Le domaine Δ est un domaine polygonal avec un nombre fini de côtés.
 2) L'ensemble S est fini et $\Delta \cup \left(\bigcup_{g \in S} g\Delta \right)$ est un voisinage de Δ ; en particulier S est non vide.

Démonstration. — 1) Soit δ le diamètre de Δ . Si $d(a, ga) \geq 2\delta$, ce qui est le cas pour tous les g sauf un nombre fini, Δ ne rencontre pas la médiatrice de $[a, ga]$. Donc Δ est l'intersection de seulement un nombre fini de demi-plans fermés d'inéquation $d(x, a) \leq d(x, ga)$.

2) La finitude de S est évidente. Soit x dans la frontière de Δ . Supposons que les $g\Delta$, $g \in S$, ne couvrent pas un voisinage de x . Alors $x = \lim y_n$ avec $y_n \notin \bigcup_{g \in S} g\Delta$. Mais $y_n = g_n x_n$ avec $x_n \in \Delta$, $g_n \notin S$. Comme seulement un nombre fini de $g\Delta$ rencontrent un voisinage compact de x , on peut prendre une sous-suite et se ramener au cas où g_n est indépendant de n : $g_n = g \neq Id$. par compacité de Δ , quitte à prendre une suite extraite, $x_n \rightarrow x' \in \Delta$. Donc $y_n \rightarrow gx'$; d'où $gx' = x$. Alors $x \in \Delta \cap g\Delta$ et donc g appartient à S . Finalement $y_n \in g\Delta$ pour un certain $g \in S$; contradiction. \square

23.6. Proposition. — 1) Si $g \in S$ et si $g\Delta \cap \Delta$ n'est pas réduit à un point, alors $g\Delta \cap \Delta$ est une arête de la frontière de Δ .

2) Soit $S_1 := \{g \in S \mid g\Delta \cap \Delta \text{ est une arête}\}$. L'application $\Phi : g \mapsto L_g := g\Delta \cap \Delta$ est une bijection de S_1 sur l'ensemble des arêtes de Δ . En particulier, chaque arête L_g a une arête "jumelle" $L_{g^{-1}}$ et $L_{g^{-1}} = g^{-1}(L_g)$.

Démonstration. — 1) Comme Δ est convexe, si $g\Delta \cap \Delta$ contient deux points, il contient le segment qui les joint; donc cette intersection est contenue dans une arête A de la frontière de Δ (on rappelle que $g\Delta$ et Δ ont des intérieurs disjoints d'après le lemme 23.3. De plus A est contenue dans la médiatrice de

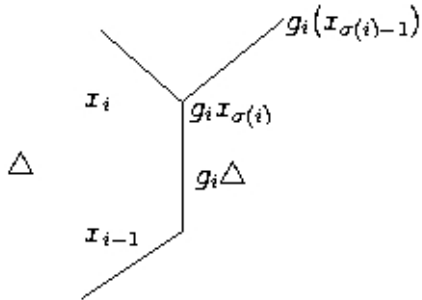
a et de ga . Si un autre $g'\Delta$ rencontre Δ le long d'un intervalle de A , A est aussi dans la médiatrice de a et $g'a$. Cela force $g'a = ga$. Donc $g\Delta \cap \Delta = A$.
 2) La bijection Φ : une arête A du bord de Δ appartient exactement à deux domaines Δ et $g\Delta$; donc elle s'écrit de façon unique $A = \Delta \cap g\Delta$. De plus

$$g(\delta \cap g^{-1}\Delta) = \Delta \cap g\Delta.$$

□

Attention : on peut avoir $L_{g^{-1}} = L_g$; c'est le cas si $g^2 = Id$.

23.7. Cycle de sommets. — On numérote les sommets de Δ circulairement dans le sens trigonométrique, x_1, x_2 , etc. L'isométrie g_i est l'unique élément de S_1 tel que $g_i\Delta \cap \Delta = [x_{i-1}, x_i]$.



Le sommet x_i est l'image par g_i d'un certain sommet, et on note donc $g_i^{-1}x_i =: x_{\sigma(i)}$.

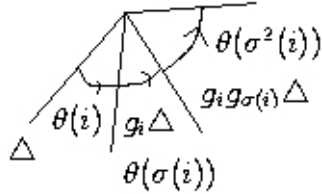
L'application σ ainsi obtenue est une permutation des sommets et le cycle de x_i est $x_i, x_{\sigma(i)}, x_{\sigma^2(i)}, \dots, x_{\sigma^{r_i-1}(i)}$ où r_i est l'ordre du cycle.

23.8. Proposition. — Soit $\theta(i)$ l'angle intérieur de Δ en x_i . On a :

$$\theta(i) + \theta(\sigma(i)) + \dots + \theta(\sigma^{r_i-1}(i)) = \frac{2\pi}{n_i},$$

où n_i est un entier.

Démonstration. — On regarde la suite des polygones autour de x_i : $\Delta, g_i\Delta, g_i g_{\sigma(i)}\Delta$, etc. À cause du non-chevauchement,



il y a un premier moment où on a rempli exactement un voisinage de x_i . Pour cela, on a parcouru le cycle de x_i un nombre entier n_i de fois.

Sinon, on aurait $g \in G$ et k entier non divisible par r_i tel que $g\Delta = \Delta$ (donc $g = Id$) et $g(x_{\sigma^k(i)}) = x_i$ (donc $g \neq Id$). \square

23.9. Proposition (– exercice). — G agit librement si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- 1) L'involution des arêtes est sans point fixe : $L_g \neq L_{g^{-1}}$,
- 2) $n_i = 1$ pour tout i .

24. Le théorème de Poincaré

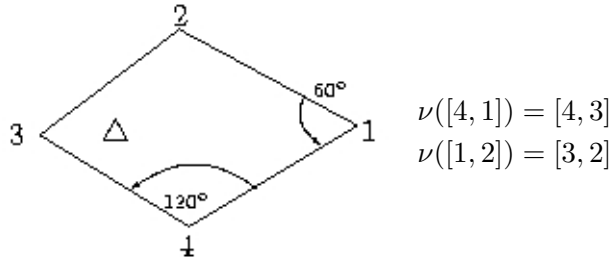
Soit Δ un polygone convexe compact. Soit ν une involution sur l'ensemble de ses arêtes, respectant les longueurs. Soit g_i l'isométrie telle que

$$g_i^{-1}([x_{i-1}, x_i]) = \nu([x_{i-1}, x_i]).$$

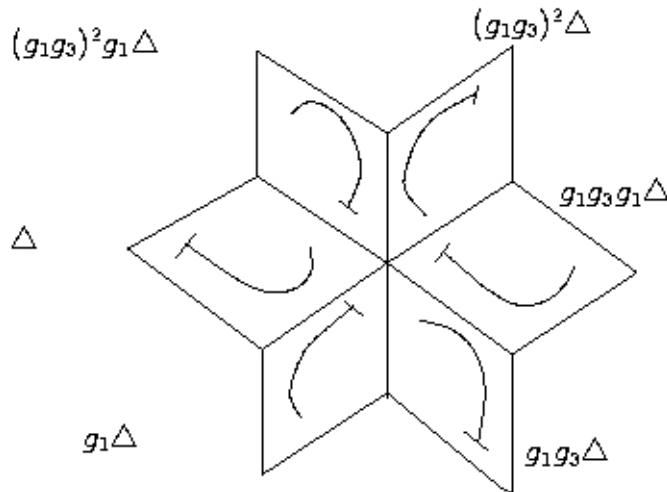
Il résulte de ces choix une permutation des sommets et donc des cycles de sommets.

24.1. Théorème (Poincaré). — Soit G le sous-groupe de $Iso^+(\mathbb{R}^2)$ engendré par les g_j . Si la condition d'angle aux sommets de chaque cycle est satisfaite (voir prop. 23.8), alors G est un sous-groupe discret et Δ est un domaine fondamental pour l'action.

Exemple. —



$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma(1) = 3, & \sigma(3) = 1, & \sigma(4) = 4, & \sigma(2) = 2 \\ n_1 = 3, & n_3 = 3, & n_2 = 3, & n_4 = 3. \end{cases}$$



La “plume” sert à visualiser le mouvement.

Remarquer :

$$(g_1g_3)^2g_1\Delta = g_2\Delta.$$

Présentation de G :

– Générateurs : g_1, g_2 ; $g_4 = g_1^{-1}$ et $g_3 = g_2^{-1}$.

– Relations : $(g_1g_2^{-1})^3 = Id$, $g_1^3 = Id$ et $g_2^3 = Id$.

Pourquoi n’y a-t-il pas d’autres relations ?

Réponse : le graphe de Cayley de G (voir 13.4) est le graphe planaire dont les sommets sont les centres des $g\Delta$ et dont les arêtes sont les segments joignant ces centres. Les circuits du graphe de Cayley donnent les relations. À conjugaison près, pour avoir un système complet de relations, il suffit de regarder les tours des sommets de Δ .

Aperçu de la démonstration du théorème de Poincaré. — Soit $S \subset G$ la partie finie

$$S := \{Id\} \cup \bigcup_i \underbrace{\{g_i, g_i g_{\sigma(i)}, \dots, (g_i g_{\sigma(i)} \dots g_{\sigma^{r_i n_i - 2}(i)})\}}_{r_i n_i - 1 \text{ éléments}}$$

Propriétés de S :

- 0) $Id \in S$ et $g \in S \Rightarrow g^{-1} \in S$; par exemple, $g_i^{-1} = g_{\sigma(i)+1}$.
- 1) Si $g \in S$, $g\Delta \cap \Delta \neq \emptyset$.
- 2) $S\Delta$ est un voisinage de Δ .
- 3) Pour $g \in S$, si $g\Delta \cap \Delta = [x_i, x_{i+1}]$, alors

$$\begin{aligned} g &= g_{i+1} \\ &= g_i g_{\sigma(i)} \dots g_{\sigma^{r_i n_i - 2}(i)}. \end{aligned}$$

- 4) Pour $g \in S$, si $g\Delta \cap \Delta = \{x_i\}$, alors g est un élément de la liste commençant par g_i , sauf le premier et le dernier.
- 5) Pour $g, g' \in S$, si $\Delta \cap g\Delta \cap g'\Delta \neq \emptyset$, alors $g^{-1}g' \in S$.

Soit maintenant V un petit voisinage ouvert connexe de Δ dans le plan vérifiant les mêmes propriétés 1) à 5). Alors il vérifie :

- 6) Il existe $r > 0$ tel que, pour tout $a \in V$, le disque $B(a, r)$, centré en a et de rayon r est contenu dans un gV avec $g \in S$ (en effet, il suffit de constater que tout $a \in V$ est dans un $g\Delta$).

Affirmation. Dans ces conditions on a :

- A) $G \cdot V = \mathbb{R}^2$,
- B) $gV \cap V \neq \emptyset \Rightarrow g \in S$,
- C) L'action est propre, c.-à-d. que, pour tout compact K , $gK \cap K$ est non vide pour seulement un nombre fini de $g \in G$.

Démonstration. — On introduit sur $G \times V$ la relation \mathcal{R} définie par

$$(g, x)\mathcal{R}(h, y) \Leftrightarrow \begin{cases} 1) & gx = hy \text{ et} \\ 2) & h = gs, s \in S \end{cases}$$

Autrement dit, on recolle les $\{g\} \times V$ comme l'indique le graphe de Cayley. Un calcul utilisant 5) permet d'établir que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.

Soit $x, y, z \in \Delta$, $(g, x) \sim (h, y) \sim (k, z)$. Alors $x = sy$ et $y = s'z$ avec $s, s' \in S$. Donc $y \in \Delta \cap s^{-1}\Delta \cap s'\Delta$ et d'après 5), $ss' \in S$ et $x = (ss')z$.

On note le quotient $X := (G \times V)/\mathcal{R}$ et la projection sur le quotient $q : G \times V \rightarrow X$. On a :

$$q^{-1}(q(g, x)) = \{(gs^{-1}, sx) \mid s \in S \text{ et } sx \in V\}.$$

De cette formule, on déduit que q est ouverte. L'application $p : G \times V \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(g, x) \mapsto gx$, passe au quotient :

$$\begin{array}{ccc} G \times V & & \\ \downarrow q & \searrow p & \\ X & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

L'espace X est connexe, comme on peut le voir par le graphe de Cayley.

Preuve de A) : f est surjective, c.-à-d. $G \cdot V = \mathbb{R}^2$.

On sait que $G \cdot V$ est ouvert. Soit $z \in \overline{G \cdot V}$. Il existe $a \in V$ et $g \in G$ tels que $d(z, ga) < r$, où r est le rayon de la propriété 6) ci-dessus. On a $B(a, r) \subset sV$ d'après 6), donc $B(ga, r) \subset gsV$. Donc $z \in G \cdot V$. Ainsi $\overline{G \cdot V} = G \cdot V$ et comme \mathbb{R}^2 est connexe, $G \cdot V = \mathbb{R}^2$.

□

24.2. Lemme. — *f est un revêtement.*

Démonstration. — Soit $x \in \mathbb{R}^2$. On va prouver que $B(x, \frac{r}{2})$ est un ouvert trivialisant. Soit $N = \{g \in G \mid gV \supset B(x, \frac{r}{2})\}$. La partie N n'est pas vide comme le montre la preuve de A). Pour $g \in N$, on définit $\tilde{\sigma}_g : B(x, \frac{r}{2}) \rightarrow G \times V$ par $\tilde{\sigma}_g(z) = (g, g^{-1}z)$ et on pose $\sigma_g := q \circ \tilde{\sigma}_g$.

- On vérifie que $f \circ \sigma_g = Id_{B(x, \frac{r}{2})}$ et que l'image de σ_g est ouvert de X .
- Si $\text{Im}(\sigma_{g_1}) \cap \text{Im}(\sigma_{g_2}) \neq \emptyset$, alors il existe $z \in B(x, \frac{r}{2})$ tel que $(g_1, g_1^{-1}z) \sim (g_2, g_2^{-1}z)$, donc $g_2 = g_1s$ et $\sigma_{g_1} = \sigma_{g_2}$.
- Il reste à voir que les images de ces sections couvrent $f^{-1}(B(x, \frac{r}{2}))$. Soit $(g, a) \in G \times V$ tel que $ga \in B(x, \frac{r}{2})$. Soit $s \in S$ tel que $sV \supset B(x, r)$. En particulier, $s^{-1}a \in V$. Alors $B(ga, r) \subset gsV$. Donc $B(x, \frac{r}{2}) \subset gsV$, c.-à-d. $gs \in N$ et $\sigma_{g_1}(ga) = q(gs, s^{-1}a) = q(g, a)$.

□

Preuve de B). — Comme \mathbb{R}^2 est 1-connexe et que X est connexe, l'application de revêtement f est un homéomorphisme (voir théorème 11.4). Donc $gV \cap V$

n'est non-vidé que si $q(\{g\} \times V) \cap q(\{Id\} \times V)$ n'est pas vide. Cela implique $g \in S$ par construction de \mathcal{R} . \square

Preuve de C). — Soit $x, y \in \mathbb{R}^2$, $x \in gV$, $y \in hV$. Si $\gamma gV \cap hV \neq \emptyset$ avec $\gamma \in G$, d'après B), $h^{-1}\gamma g \in S$. Comme S est fini, il n'y a qu'un nombre fini de γ possible. On voit facilement que cette dernière propriété est équivalente à la propriété de l'action (recouvrir le compact K considéré par un nombre fini d'ouverts gV). \square

Commentaire. — L'idée générale de cette preuve est que l'espace X qui a été introduit est un espace *pavé* abstrait. Comme il revêt le plan, il est homéomorphe au plan, qui se trouve donc pavé lui-même.

FRANÇOIS LAUDENBACH & FRIEDRICH WAGEMANN
Département de mathématiques, Université de Nantes,
2 Rue de la Houssinière F-44322 Nantes Cedex 03

UNIVERSITÉ DE NANTES
 DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Maîtrise : Topologie Algébrique

François Laudenbach (CM) & Friedrich Wagemann (TD)

td6

Travaux dirigés de Mathématiques, Fiche 8, Topologie algébrique
 2005-2006

Groupes discrets et actions propres.

8.1. Exercice. — On rappelle qu'une application $f : X \rightarrow Y$ est appelée *propre* si pour tout compact $K \subset Y$, $f^{-1}(K)$ est un compact de X . Dans la suite, tous les espaces topologiques X, Y, Z et G seront supposés localement compacts.

1) Montrer que si X et Y sont localement compacts, cette propriété équivaut à la propriété que f se prolonge en une application continue $\bar{f} : \bar{X} = X \cup \{\infty\} \rightarrow \bar{Y} = Y \cup \{\infty\}$, où \bar{X} est le compactifié par un point de X .

2) Montrer (toujours sous l'hypothèse que X et Y sont localement compacts) que f est propre si et seulement si f est une application fermée et $f^{-1}(y)$ est compact pour tout $y \in Y$.

Dans le reste de la feuille d'exercices, on va supposer X, Y, Z et G localement compacts.

Indication Corrigé

8.2. Exercice. — Soit $G \subset Iso^+(\mathbb{R}^2)$ un groupe d'isométries directes de \mathbb{R}^2 . Montrer que si G est discret (ceci est le cas si et seulement si G agit proprement sur \mathbb{R}^2 d'après le cours), alors l'application

$$\theta : G \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \quad (g, x) \mapsto (x, gx)$$

est propre.

Indication Corrigé

8.3. Exercice. — 1) Montrer que si $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ sont deux applications continues, alors si $g \circ f$ est propre et f surjectif, alors g est propre.

2) Si $f : X \rightarrow Y$ est continue injective, montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) f propre.

(b) f fermée.

(c) f est un homéomorphisme sur un sous-espace fermé de Y .

3) $f : X \rightarrow Y$ continue propre. Montrer que, pour tout sous-espace $B \subset Y$, la restriction $f_B = f|_B : f^{-1}(B) \rightarrow B$ est propre.

Corrigé

8.4. Exercice. — Supposons que le groupe topologique G agit sur X de sorte que l'application θ introduite en 8.2 soit propre. Utiliser 8.3 pour montrer que

1) l'application $\omega : G \rightarrow X, g \mapsto gx$ est propre.

2) le stabilisateur G_x est compact pour tout $x \in X$.

3) l'induite $\bar{\omega} : G/G_x \rightarrow Gx$ est un homéomorphisme (Gx étant l'orbite de $x \in X$).

4) Gx est fermée dans X .

Corrigé

8.5. Exercice. — Supposons que le groupe topologique G agit sur l'espace topologique X librement. Considérons l'application

$$\phi : \{(x, gx) \mid x \in X, g \in G\} \rightarrow G, (x, gx) \mapsto g.$$

1) Pourquoi est-elle bien-définie? Montrer que ϕ est continue si et seulement si θ est un homéomorphisme sur son image.

2) Montrer à l'aide de 8.3 l'équivalence des assertions suivantes :

(a) L'action est propre (i.e. θ est propre).

(b) L'image $\text{Im}(\theta)$ est fermée et ϕ est continue.

Corrigé

UNIVERSITÉ DE NANTES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Maîtrise : Topologie Algébrique

François Laudenbach (CM) & Friedrich Wagemann (TD)

Groupes discrets et actions propres : indications pour les exercices.

8.1. Indication exercice. — **8.1** 1) \bar{X} est le compactifié par un point de X , i.e. comme ensembles $\bar{X} = X \cup \{\infty\}$, et on définit les voisinages de ∞ en tant que complémentaires de compacts dans X . On prolonge f par $f(\infty) = \infty$.

8.1 2) S'inspirer (pour la direction non-triviale) de l'exercice 2.2 3), le cas compact.

Énoncé Corrigé

8.2. Indication exercice. — **8.2** Montrer que $A := \{(g, x) \in G \times \mathbb{R}^2 \mid (x, gx) \in K\}$ est fermé (par exemple à l'aide de suites) et borné (en utilisant que les orbites sont discrètes).

Énoncé Corrigé

UNIVERSITÉ DE NANTES
 DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Maîtrise : Topologie Algébrique

François Laudenbach (CM) & Friedrich Wagemann (TD)

Travaux dirigés de Mathématiques, Fiche 8, Topologie algébrique
 2005-2006

Groupes discrets et actions propres : solutions des
 exercices.

8.1. Corrigé exercice. — 1) \bar{X} est le compactifié par un point de X , i.e. comme ensembles $\bar{X} = X \cup \{\infty\}$, et on définit les voisinages de ∞ en tant que complémentaires de compacts dans X . On définit alors $f : \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$ en prolongeant f par $f(\infty) = \infty$. On a $f^{-1}(Y \setminus K) = X \setminus f^{-1}(K)$ pour tout compact $K \subset Y$. Donc on voit que f est propre si et seulement si \bar{f} est continue (X est homéomorphe à $\bar{X} \setminus \{\infty\}$, donc un fermé $F \subset X$ est un fermé de $\bar{X} \setminus \{\infty\}$, et $F \cup \{\infty\}$ est un fermé de \bar{X}).

Énoncé Indication

8.1 2) Si f est propre, \bar{f} est continue par exo 8.1 1). Pour un fermé $F \subset X$, on note $\bar{F} = F \cup \{\infty\}$ le fermé correspondant de \bar{X} . Par suite, \bar{F} est compact et $\bar{f}(\bar{F}) \subset \bar{Y}$ est compact, en particulier fermé. Ainsi $f(F) = \bar{F} \setminus \{\infty\} \subset \bar{Y} \setminus \{\infty\} = Y$ est fermé. Le reste est clair.

Si réciproquement $K \subset Y$ est un compact, alors recouvrons $f^{-1}(K) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ par des ouverts U_i . Pour tout $y \in K$, il existe $I_y \subset I$ sous-ensemble fini tel que $f^{-1}(y) \subset \bigcup_{i \in I_y} U_i =: U_y$. Notons $V_y := Y \setminus f(X \setminus U_y)$. V_y est ouvert, puisque f est fermée. Pour $y \in V_y$, $f^{-1}(V_y) \subset U_y$, et par compacité de K , il existe y_1, \dots, y_r avec $K \subset \bigcup_{i=1}^r V_{y_i}$. On en déduit que $f^{-1}(K) \subset \bigcup_{i=1}^r U_{y_i}$.

Énoncé Indication

8.2. Corrigé exercice. — Soit $K \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ un compact. Il faut montrer, sous l'hypothèse que G est discret, que l'ensemble $A := \{(g, x) \in G \times$

$\mathbb{R}^2 \mid (x, gx) \in K$ est compact, i.e. que A est fermé et borné. L'orbite Gx d'un élément $x \in \mathbb{R}^2$ est discrète : en effet, pour un point fixé $x \in \mathbb{R}^2$ soit

$$\delta := \delta(x) = \inf_{g \in G} d(x, gx).$$

On a $\delta > 0$, car $\delta = 0$ contredirait le fait que G est discret. Ainsi une boule de rayon $0 < \epsilon < \delta$ est un voisinage d'un point de l'orbite dont l'intersection avec l'orbite ne contient que le point en question. Ensuite l'intersection d'une orbite avec le compact $\text{proj}_2 K$ est fini, et il n'y a que un nombre fini de $(x, gx) \in A$ pour x fixé. Ainsi A est contenu dans une réunion finie de compacts, et donc borné. Il reste à montrer que A est fermé : soit donc $(g_n, x_n) \rightarrow (g, x) \in G \times \mathbb{R}^2$ une suite avec $(g_n, x_n) \in A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. $g_n \rightarrow g$ veut dire que (g_n) devient stationnaire, car G est discret. $(x_n, g_n x_n) \in K$ compact implique que $x_n \rightarrow x \in \text{proj}_1 K$ et par suite $g_n x_n = g x_n \rightarrow g x \in \text{proj}_2 K$ pour $n \geq N \in \mathbb{N}$. En conclusion, $A \subset G \times \mathbb{R}^2$ est fermé.

Énoncé Indication

8.3. Corrigé exercice. — 1) Soit $K \subset Z$ un compact. On sait par hypothèse que $f^{-1}(g^{-1}(K))$ est compact. On en déduit que $f(f^{-1}(g^{-1}(K)))$ est compact en tant qu'image d'un compact sous une application continue. Or, $f(f^{-1}(g^{-1}(K))) = g^{-1}(K)$, car f est surjectif. D'où l'assertion.

Énoncé

8.3 2) On a déjà vu dans 8.1 2) que “propre” implique “fermée” sur un espace localement compact. Soit maintenant f fermée, alors f est une bijection continue fermée sur son image, donc un homéomorphisme : en effet, f est ouverte, car si $U \subset X$ et un ouvert de complémentaire F fermé, $f(U) = f(X \setminus F) = f(X) \setminus f(F)$ est le complémentaire d'un fermé donc ouvert. Soit finalement f un homéomorphisme sur $f(X) \subset Y$ fermé dans Y , et $K \subset Y$ un compact. Donc $K \cap f(K)$ est compact, et $f^{-1}(K) = f^{-1}(K \cap f(K))$ est un compact, car f est un homéomorphisme.

Énoncé

8.3 3) On montrera $f|_B$ fermée et $(f|_B)^{-1}(b)$ compact pour tout $b \in B$ (cf exo 8.1 2)). Soit donc $F \subset f^{-1}(B)$ un fermé, i.e. $F = f^{-1}(B) \cap A$ pour un fermé $A \subset X$. Alors $f|_B(F) = f(f^{-1}(B) \cap A) = B \cap f(A)$ (attention : malgré que en général $f(A) \cap f(B) \supset f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B) \neq f(A \cap B)$, ici on a

égalité!). De f fermée, on déduit donc que $f|_B(F)$ est fermé, et par suite que $f|_B$ est fermée. $(f|_B)^{-1}(b)$ compact pour tout $b \in B$ est clair.

Énoncé

8.4. Corrigé exercice. — 1) Soit $x \in X$ un point fixé. $\theta^{-1}(\{x\} \times X) = G \times \{x\}$. Par 8.3 3), la restriction $\theta : G \times \{x\} \rightarrow \{x\} \times X$ est donc propre, et cette dernière s'identifie à ω en identifiant $G \times \{x\}$ avec G et $\{x\} \times X$ avec X .

Énoncé

8.4 2) On déduit de la question précédente que le stabilisateur $G_x = \omega^{-1}(x)$ est compact.

Énoncé

8.4 3) $\omega : G \rightarrow X$ est propre, et ω factorise par la projection $\pi : G \rightarrow G/G_x$, i.e. $\omega = \bar{\omega} \circ \pi$. $\bar{\omega}$ est propre par 8.3 1), et une bijection continue par construction. En conclusion (cf 8.3 2)), $\bar{\omega}$ est un homéomorphisme. Énoncé

8.4 4) Par 8.3 2), $\bar{\omega} : G/G_x \rightarrow X$ est un homéomorphisme sur le sous-espace fermé $Gx \subset X$.

Énoncé

8.5. Corrigé exercice. — 1) L'ensemble $\{(x, gx) \mid x \in X, g \in G\}$ est l'image de θ . L'action est libre, donc θ est injective et ϕ est bien définie. L'application continue

$$\theta' : G \times X \rightarrow \text{Im}(\theta), \quad (g, x) \mapsto (x, gx)$$

a comme inverse ensembliste

$$\psi' : \text{Im}(\theta) \rightarrow G \times X, \quad (x, y) \mapsto (\phi(x, y), x).$$

ψ' est continue si et seulement si ϕ l'est, d'où l'assertion.

Énoncé

8.5 2) Si l'action est propre, θ est un homéomorphisme sur un sous-espace fermé de X (exo 8.3 2)), ainsi θ' est un homéomorphisme, i.e. ϕ est continue, et $\text{Im}(\theta)$ est fermé. Si réciproquement ϕ est continue et $\text{Im}(\theta)$ est fermé, θ' est un homéomorphisme. θ est donc un homéomorphisme sur un sous-espace qui est par hypothèse fermé, et exo 8.3 2) implique que θ est propre.

Énoncé

Chapitre VII : Introduction à la géométrie hyperbolique en dimension 2

c7

La sphère de Riemann

25.1. Définition. — La *sphère de Riemann*, ou la *droite projective complexe*, $\mathbb{S} = P^1(\mathbb{C})$ est l'ensemble des \mathbb{C} -droites vectorielles de \mathbb{C}^2 , ou encore l'ensemble des $[z_1, z_2]$, où $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. La notation $[z_1, z_2]$ désigne les *coordonnées homogènes* d'un point de l'espace projectif. On a $[z_1, z_2] = [\lambda z_1, \lambda z_2]$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Si $z_2 = 0$, $[z_1 : 0]$ est la droite $\mathbb{C} \times \{0\} \subset \mathbb{C}^2$; c'est le *point à l'infini* de la sphère de Riemann :

$$\infty = [1 : 0].$$

Une droite complexe est repérée par un vecteur unitaire à multiplication près par $e^{i\theta}$. Donc $P^1(\mathbb{C}) = S^1 \backslash S^3$, où S^1 agit sur S^3 par

$$e^{i\theta} \cdot (z_1, z_2) = (e^{i\theta} z_1, e^{i\theta} z_2).$$

On munit $P^1(\mathbb{C})$ de la topologie quotient.

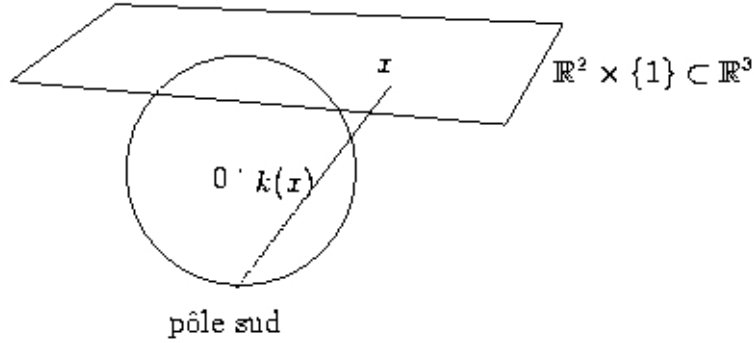
25.1. Exercice. — Montrer que $P^1(\mathbb{C})$ est compact. Comme S^3 est compact, il suffit de voir que le quotient est séparé.

25.2. Théorème. — La *sphère de Riemann* \mathbb{S} est homéomorphe à la sphère S^2 .

Démonstration. — On a $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$. L'application $(z_1, z_2) \mapsto \frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{C}$ est bien définie sur $S^3 \setminus \{z_2 = 0\}$ et passe au quotient en $h : P^1(\mathbb{C}) \setminus \{[1 : 0]\} \rightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. L'application h est continue et bijective. On construit h^{-1} comme suit : pour $z \in \mathbb{C}$, il existe un unique $t \in \mathbb{R}^+$ tel que $(tz, t) \in S^3$; on prend

$$t = \left(\frac{1}{1 + |z|^2} \right)^{1/2}.$$

C'est une fonction continue de z . Alors $h^{-1}(z) = [z : 1]$ est fonction continue de z . Donc h est un homéomorphisme. De même on a un homéomorphisme $k : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus \{\text{pôle sud}\}$, par la projection stéréographique (voir figure).



La projection stéréographique.

Donc $H = k \circ h$ est un homéomorphisme $P^1(\mathbb{C}) \setminus \{[1 : 0]\} \rightarrow S^2 \setminus \{\text{pôle sud}\}$. On prolonge à $P^1(\mathbb{C})$ en posant $H([1 : 0]) = \text{pôle sud}$.

Affirmation : le prolongement est continu.

Soit $(a_n)_n$ une suite dans $P^1(\mathbb{C}) \setminus \{[1 : 0]\}$ convergeant vers $[1 : 0]$; la suite image $(H(a_n))_n$ est une suite dans S^2 , qui est compact. Donc $(H(a_n))_n$ a un point d'accumulation. Soit b un point d'accumulation distinct du pôle sud. Comme H est continue de $P^1(\mathbb{C}) \setminus \{[1 : 0]\}$ vers $S^2 \setminus \{\text{pôle sud}\}$, $H^{-1}(b)$ est un point d'accumulation de $(a_n)_n$ dans $P^1(\mathbb{C}) \setminus \{[1 : 0]\}$, ce qui est impossible puisque a_n tend vers $[0 : 1]$. Donc le pôle sud est le seul point d'accumulation possible. Autrement dit, la suite $(H(a_n))_n$ converge vers le pôle sud, ce qui prouve l'affirmation.

Finalement H est une bijection continue de $P^1(\mathbb{C})$ sur S^2 . Comme $P^1(\mathbb{C})$ est compact et que S^2 séparé, H est un homéomorphisme. \square

25.3. Définition. — $P^1(\mathbb{C})$ est muni d'une involution, la conjugaison complexe $[z_1 : z_2] \mapsto [\bar{z}_1 : \bar{z}_2]$. Ses points fixes sont $P^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, sous-ensemble de $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = P^1(\mathbb{C})$. Si les points de \mathbb{C} sont notés $x + iy$, on peut écrire

$$\mathbb{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = (\mathbb{R} \cup \{\infty\}) \cup \{y > 0\} \cup \{y < 0\}.$$

On appelle $\mathbb{H} = \{y > 0\}$ le *demi-plan de Poincaré*.

25.4. Transformation projective. — Soit $A \in Gl(2, \mathbb{C})$. L'image par A d'une droite complexe est une droite complexe. Donc $Gl(2, \mathbb{C})$ agit sur $P^1(\mathbb{C})$

et l'action est transitive. Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, λId agit par l'identité de $P^1(\mathbb{C})$. On définit

$$PGL(2, \mathbb{C}) := GL(2, \mathbb{C}) / \mathbb{C}^* \cong SL(2, \mathbb{C}) / \{\pm I\} =: PSL(2, \mathbb{C}).$$

Ce groupe agit *effectivement* sur $P^1(\mathbb{C})$, c.-à-d. que, pour tout $g \in PSL(2, \mathbb{C})$ distinct de l'élément neutre, $x \mapsto g \cdot x$ n'est jamais l'identité de $P^1(\mathbb{C})$. En coordonnées homogènes, la formule de l'action est :

$$A \cdot [z_1 : z_2] = [az_1 + bz_2 : cz_1 + dz_2].$$

Si $z_2 \neq 0$ et $cz_1 + dz_2 \neq 0$ et si on pose $z = \frac{z_1}{z_2}$, on peut écrire

$$A \cdot [z : 1] = \left[\frac{az + b}{cz + d} : 1 \right].$$

Une *transformation projective* est une application $P^1(\mathbb{C}) \rightarrow P^1(\mathbb{C})$ donnée par l'action d'un $A \in PSL(2, \mathbb{C})$.

25.5. Proposition. — *Les transformations projectives sont les homographies de \mathbb{C} étendues à la sphère de Riemann \mathbb{S}*

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad -\frac{d}{c} \mapsto \infty, \quad \infty \mapsto \frac{a}{c}.$$

25.6. Définition (Birapport). — Soit z_1, z_2, z_3, z_4 quatre points de la sphère de Riemann dont trois sont distincts. Leur *birapport* est l'élément de \mathbb{C} défini par :

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \times \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1}.$$

Si l'un des z_i est ∞ , on définit le birapport par passage à la limite du birapport de 4 nombres complexes finis. En particulier $(\infty, 0, 1, z) = z$.

25.7. Lemme (Exercice). — *Si z_1, z_2, z_3 sont trois points deux à deux distincts de \mathbb{S} , il existe une unique homographie h telle que $h(z_1) = \infty$, $h(z_2) = 0$, $h(z_3) = 1$. Elle est donnée par $h(z) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$.*

25.8. Proposition. — 1) *Une homographie conserve le birapport.*
2) *Toute bijection de \mathbb{S} qui conserve le birapport est une homographie.*

Démonstration. — 1) Soit z_1, z_2, z_3 trois points deux à deux distincts de \mathbb{S} et h une homographie. Soit φ l'homographie $\varphi(z) = (z_1, z_2, z_3, z)$ et ψ l'homographie $\psi(z) = (h(z_1), h(z_2), h(z_3), z)$. La composée $\psi \circ h$ est une homographie envoyant $z_1 \mapsto \infty$, $z_2 \mapsto 0$ et $z_3 \mapsto 1$. D'après le lemme $\psi \circ h = \varphi$. Donc

$$(h(z_1), h(z_2), h(z_3), h(z)) = (z_1, z_2, z_3, z).$$

2) Si on se donne z_1, z_2, z_3 deux à deux distincts et leurs images z'_1, z'_2, z'_3 par une bijection h qui préserve le birapport, alors $(z'_1, z'_2, z'_3, h(z)) = (z_1, z_2, z_3, z)$ et cette égalité définit h comme homographie. \square

25.9. Proposition. — *$PSl(2, \mathbb{R})$ est le sous-groupe des homographies qui préservent le demi-plan de Poincaré \mathbb{H} .*

Démonstration. — Si a, b, c, d sont réels et $ad - bc = 1$, alors si $\text{Im}(z) > 0$, on a $\text{Im}\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) > 0$.

Réciproquement si h préserve \mathbb{H} , par continuité h préserve la frontière de \mathbb{H} dans $P^1(\mathbb{C})$, c'est-à-dire $P^1(\mathbb{R})$. Donc $h^{-1}(\infty)$, $h^{-1}(0)$ et $h^{-1}(1)$ sont trois points distincts de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. D'après la formule du birapport, h peut donc être écrite avec des coefficients réels,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Gl(2, \mathbb{R}).$$

Comme \mathbb{H} est préservé, $\det(A) > 0$. En multipliant tous les coefficients par $(\det(A))^{1/2}$, on se ramène à $A \in Sl(2, \mathbb{R})$. \square

25.10. Décomposition en éléments simples. — Toute homographie réelle, préservant \mathbb{H} ($\det(A) = 1$), est composée de

- homothétie ($\lambda > 0$) : $z \mapsto \lambda z = \frac{\sqrt{\lambda}z + 0}{0 + 1/\sqrt{\lambda}}$,
- translation réelle : $z \mapsto z + \tau = \frac{1 \cdot z + \tau}{0 + 1}$,
- inversion : $z \mapsto -\frac{1}{z} = \frac{0 - 1}{1 \cdot z + 0}$.

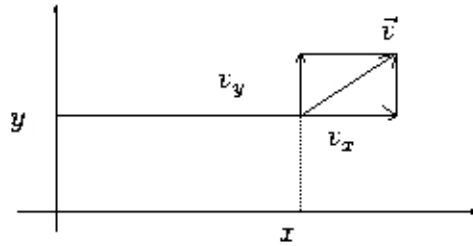
Attention. L'application $z \mapsto \frac{1}{z}$ échange \mathbb{H} et $-\mathbb{H}$.

On montrera dans la suite que $PSI(2, \mathbb{R})$ est le groupe des isométries de \mathbb{H} pour la métrique de Poincaré qui est définie au paragraphe suivant.

26. La métrique de Poincaré sur $\mathbb{H} = \{x + iy \mid y > 0\}$ ou métrique hyperbolique

26.1. Définition. — On définit l'élément de longueur ds de la métrique hyperbolique par la formule

$$ds_{\mathbb{H}}^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$



Pour $(x, y) \in \mathbb{H}$, cette formule attache une norme à chaque vecteur \vec{v} de l'espace vectoriel $T_{(x,y)}$ des vecteurs dont l'origine est en (x, y) :

$$\|\vec{v}\|_{(x,y)}^2 = \frac{(v_x^2 + v_y^2)^{1/2}}{y^2}.$$

La différence avec l'élément de longueur de la métrique euclidienne réside dans le fait que cette formule fait intervenir les coordonnées (x, y) , en fait seulement l'ordonnée. On définit aussi un produit scalaire, dépendant du point (x, y) par

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_{(x,y)} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_{\text{euclidien}}}{y^2}$$

L'angle entre deux vecteurs au point (x, y) est le même en géométrie euclidienne et en géométrie hyperbolique :

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_{(x,y)}}{\|\vec{v}\|_{(x,y)} \|\vec{w}\|_{(x,y)}} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_{\text{euclidien}}}{\|\vec{v}\|_{\text{euclidien}} \|\vec{w}\|_{\text{euclidien}}}.$$

On dit que la métrique hyperbolique est *conforme* à la métrique euclidienne.

26.2. Définition (Longueur d'un chemin C^1). — Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ un chemin de classe C^1 . On définit la *longueur* de γ par :

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|_{\gamma(t)} dt.$$

On vérifie que la longueur est indépendante du paramétrage. Si $\alpha : [a', b'] \rightarrow [a, b]$ est un difféomorphisme (disons croissant) et si $\Gamma = \gamma \circ \alpha$, on a $\dot{\Gamma}(s) = \dot{\gamma}(\alpha(s)) \frac{d\alpha}{ds}$. Par changement de variables dans l'intégrale ($t = \alpha(s)$), on obtient :

$$l(\gamma) = \int_{a'}^{b'} \|\dot{\gamma}(\alpha(s))\|_{\gamma(\alpha(s))} \left(\frac{d\alpha}{ds} \right) ds = \int_{a'}^{b'} \|\dot{\Gamma}(s)\|_{\Gamma(s)} ds = l(\Gamma).$$

26.3. Exemple. — On considère le segment $[i, e^\lambda i]$. Sa longueur est donnée par

$$l([i, e^\lambda i]) = \int_0^{|\lambda|} \frac{|\dot{y}(t)|}{y(t)} dt$$

où $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (0, e^t)$ avec $t \in [0, \lambda]$ si $\lambda > 0$ ou $t \in [\lambda, 0]$ si $\lambda < 0$. Donc

$$l([i, e^\lambda i]) = |\lambda|.$$

26.4. Définition (Distance). — Si A et B sont deux points de \mathbb{H} , on définit leur *distance hyperbolique* par :

$$d_{\mathbb{H}}(A, B) = \inf l(\gamma),$$

où la borne inférieure est prise sur l'ensemble des chemins C^1 par morceaux joignant A et B dans \mathbb{H} .

26.1. Exercice. — Démontrer l'inégalité du triangle.

26.5. Exemple. — $d_{\mathbb{H}}(i, e^\lambda i) = l([i, e^\lambda i]) = |\lambda|$.

En effet, pour tout arc C^1 $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$ de i à $e^\lambda i$, on a

$$\int_0^1 \frac{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^{1/2}}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{|\dot{y}(t)|}{y(t)} dt$$

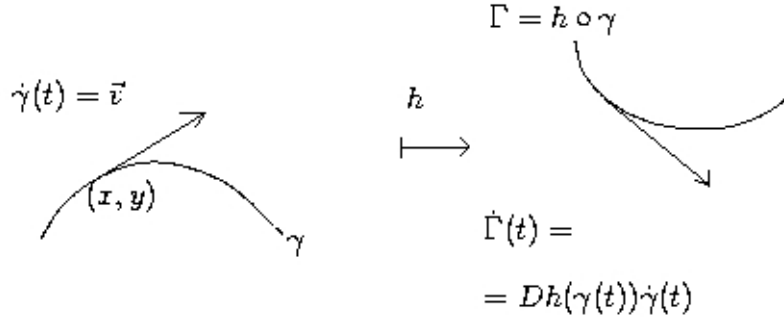
et l'inégalité est stricte si $\dot{x}(t)$ n'est pas identiquement nul. Donc le plus court chemin de i à $e^\lambda i$ est le segment vertical.

Dans la suite, on va chercher, pour A et B quelconque dans \mathbb{H} , le plus court chemin de A à B .

26.6. Proposition. — Soit $h \in \text{PSI}(2, \mathbb{R})$. Alors :

1) h est une isométrie infinitésimale (h préserve $ds_{\mathbb{H}}^2$), c.-à-d. que

$$\|Dh(x, y)(\vec{v})\|_{h(x, y)} = \|\vec{v}\|_{(x, y)}$$



En particulier $l(\gamma) = l(h \circ \gamma)$.

2) $d_{\mathbb{H}}(h(A), h(B)) = d_{\mathbb{H}}(A, B)$.

3) L'action de $\text{PSI}(2, \mathbb{R})$ est transitive sur les couples

$$\{(A, \vec{v}) \in \mathbb{H} \times \mathbb{R}^2 \mid A \in \mathbb{H} \text{ et } \|\vec{v}\|_A = 1\},$$

où l'action est $h \cdot (A, \vec{v}) = (h(A), Dh(A) \cdot \vec{v})$.

Démonstration. — 1) Il suffit de le vérifier sur les éléments simples. La formule est évidente pour les translations réelles et les homothéties positives. Le cas de l'inversion $h(z) = -\frac{1}{z}$ est le résultat du calcul suivant.

$$h(x, y) = -\frac{1}{x + iy} = \left(\frac{-x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right),$$

$$Dh(x, y) = \frac{-1}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} y^2 - x^2 & -2xy \\ 2xy & y^2 - x^2 \end{pmatrix},$$

$$\left\| \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) \right\|_{h(x, y)} = \left[\frac{(y^2 - x^2)^2 + 4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^4} \right]^{1/2} \times \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right)^{-1} = \frac{1}{y} = \|e_1\|_{(x, y)}.$$

Par un calcul analogue, on trouve

$$\left\| \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) \right\|_{h(x, y)} = \frac{1}{y} = \|e_2\|_{(x, y)},$$

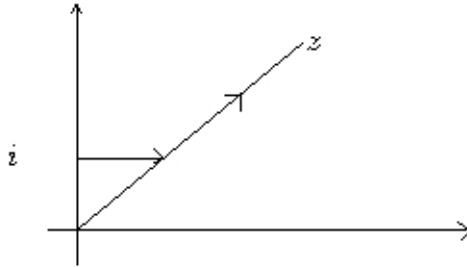
où (e_1, e_2) est la base canonique de \mathbb{R}^2 , et

$$\left\langle \frac{\partial h}{\partial x}(x, y), \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) \right\rangle_{h(x, y)} = 0 = \langle e_1, e_2 \rangle_{(x, y)}.$$

Par bilinéarité du produit scalaire, $Dh(x, y)$ vérifie la formule voulue.

2) Ce point suit de 1) en prenant la borne inférieure des longueurs des chemins de A à B .

3) Le sous-groupe engendré par les translations réelles et les homothéties positives ($z \mapsto az + b$ avec $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$) agit transitivement sur \mathbb{H} .



($z \mapsto az + b$ avec $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$) agit transitivement sur \mathbb{H} .

Il reste à voir que le stabilisateur $\text{Stab}(i)$ agit transitivement sur les vecteurs unitaires en i .

$$\begin{aligned} \text{Stab}(i) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; ad - bc = 1, ac + bd = 0, c^2 + d^2 = 1 \right\} / \{\pm I\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \right\} / \{\pm I\}. \end{aligned}$$

Si $h(z) = \frac{\cos(\theta)z + \sin(\theta)}{-\sin(\theta)z + \cos(\theta)}$, on a bien $h(i) = i$ et

$$\begin{aligned} h(i + \delta z) &= \frac{ie^{-i\theta} + \cos \theta \delta z}{e^{-i\theta} - \sin \theta \delta z} \\ &= (i + e^{i\theta} \cos \theta \delta z)(1 + e^{i\theta} \sin \theta \delta z + o(|\delta z|)) \\ &= i + e^{2i\theta} \delta z + o(|\delta z|). \end{aligned}$$

Ceci implique

$$Dh(i) = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ -\sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}.$$

Donc pour tout vecteur unitaire \vec{v}, \vec{w} en i , il existe $h \in \text{Stab}(i)$ tel que $Dh(i)\vec{v} = \vec{e}_1$. \square

27. Géodésiques

27.1. Définition. — 1) Un *segment (ou arc) géodésique* de A à B est un plus court chemin, s'il existe, de A à B .
2) Une *géodésique* est une ligne dont tous les intervalles compacts sont des segments géodésiques. On la paramètre par la longueur d'arc.

27.2. Théorème. — 1) Les géodésiques sont les cercles euclidiens centrés sur l'axe réel et les droites verticales ($x = \text{const}$).
2) Toute paire de points est jointe par un segment géodésique unique.
3) $PSL(2, \mathbb{R})$ agit transitivement sur les paires de points à distance mutuelle donnée.

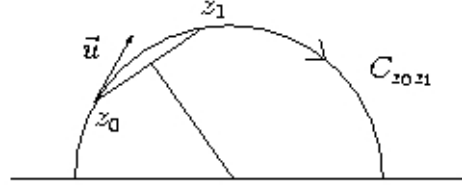
Démonstration. — a) On sait déjà que $[i, e^\lambda i]$ est un arc géodésique. Donc les verticales sont des géodésiques.

b) Soit $h \in PSL(2, \mathbb{R})$. L'homographie h conserve la longueur des chemins. Donc, si γ est de longueur minimale parmi les chemins de A à B , $h \circ \gamma$ est de longueur minimale parmi les chemins de $h(A)$ à $h(B)$. Donc $h(e^t i)$ parcourt une géodésique quand t parcourt \mathbb{R} .

c) Le demi-axe Oy est l'ensemble des $z \in \mathbb{H}$ tels que le birapport $(\infty, 0, 1, z) \in i\mathbb{R}_+$. Si $H(\infty) = \infty$, h est affine et $h(Oy)$ est une verticale. Si $h(0) = \infty$, $h(Oy)$ est aussi une verticale. Dans les autres cas, $h(\infty) = x_1$, $h(0) = x_2$, où x_1 et x_2 sont réels. Par conservation du birapport, $(x_1, x_2, h(1), h(z)) \in i\mathbb{R}_+$. Comme $h(1) \in \mathbb{R} \cup \infty$, on en déduit que $\frac{x_1 - h(z)}{x_2 - h(z)} \in i\mathbb{R}$, et donc que $h(z)$

appartient au cercle centré en $\frac{x_1 + x_2}{2}$ passant par x_1 et x_2 . Par conséquent les demi-cercles centrés sur l'axe réels sont *des* géodésiques.

d) Par deux points z_0 et $z_1 \in \mathbb{H}$ passe un unique cercle centré sur l'axe réel (ou une verticale).



e) Pourquoi n'y a-t-il pas d'autres géodésiques ?

Soit \vec{u} le vecteur unitaire (au sens hyperbolique) tangent en z_0 au demi-cercle $C_{z_0 z_1}$ et dirigé vers z_1 . Par transitivité de l'action sur les couples (point, vecteur unitaire), on sait qu'il existe une homographie $h \in PSL(2, \mathbb{R})$ telle que $h(i) = z_0$ et $Dh(i)(\vec{e}_2) = \vec{u}$. Donc $h(Oy) = C_{z_0 z_1}$ et $h(ie^{d(z_0, z_1)}) = z_1$. Comme il y a unicité de la géodésique de i à $ie^{d(z_0, z_1)}$, il y a unicité de la géodésique de z_0 à z_1 . D'où 1) et 2) et la construction de h donne 3). \square

27.3. Définition. — Une *isométrie* directe de \mathbb{H} est un difféomorphisme de \mathbb{H} préservant la distance hyperbolique et l'orientation.

27.4. Corollaire. — Il n'y a pas d'autres isométries de \mathbb{H} que les éléments de $PSL(2, \mathbb{R})$.

Démonstration. — On sait déjà que $PSL(2\mathbb{R})$ est contenu dans $Iso^+(\mathbb{H})$. Soit $\phi \in Iso^+(\mathbb{H})$. Soit $A = -1 + i$ et $B = 1 + i$. D'après le 3) du théorème, il existe $h \in PSL(2\mathbb{R})$ tel que $h(A) = \phi(A)$ et $h(B) = \phi(B)$. Donc $\psi := h^{-1} \circ \phi$ est une isométrie directe fixant A et B . Alors ψ laisse fixe la géodésique passant par A et B , c'est-à-dire le cercle C centré en 0 de rayon $\sqrt{2}$.

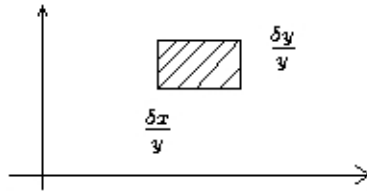
Par ailleurs Oy est le lieu des points équidistants de A et de B (par un argument de symétrie). Alors $\psi(Oy) = Oy$. Comme $i\sqrt{2}$ est sur C , $\psi(i\sqrt{2}) = i\sqrt{2}$; l'orientation étant conservée, $\psi|_{Oy}$ est l'identité. Soit $z \in Oy$; comme $\psi(z)$ et $\psi(A)$ sont fixes, toute la géodésique C_{Az} est fixe. Mais les C_{Az} couvrent le quart de plan $\{x \geq 0, y > 0\}$; donc ψ y est l'identité. De même, en considérant B au lieu de A , ψ est l'identité sur $\{x \leq 0, y > 0\}$.

Tout cet argument peut être simplifié en invoquant un résultat classique de géométrie différentielle : toute isométrie, qui fixe un point A et dont la différentielle en A est l'identité, coïncide avec l'identité sur la composante connexe de A . \square

28. Triangles géodésiques

28.1. Définition. — L'aire hyperbolique d'un domaine D de \mathbb{H} est par définition

$$\text{Aire}(D) = \iint_D \frac{dx dy}{y^2}.$$



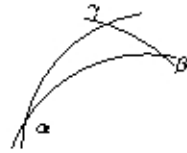
Sur cette figure on a dessiné un petit rectangle en indiquant les longueurs hyperboliques des côtés. Le produit de ces longueurs donne l'aire.

On voit sur la formule que la mesure d'aire est invariante par les homographies de $PSL(2, \mathbb{R})$.

28.2. Définition. — Un *polygone géodésique* est un polygone dont les côtés sont des arcs géodésiques. Il est dit *idéal* si ses sommets sont sur la frontière de \mathbb{H} dans \mathbb{S} .

Dans ce cas l'angle intérieur en chaque sommet est nul. En effet, si le sommet considéré est sur l'axe réel, les deux côtés du polygone lui sont orthogonaux, et s'il est en ∞ , les deux côtés sont deux verticales, donc parallèles.

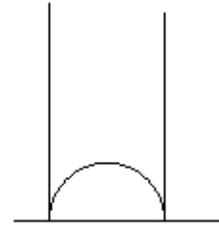
28.3. Théorème. — L'aire d'un triangle géodésique vaut $\pi -$ la somme des angles intérieurs. En particulier, l'aire d'un triangle idéal est π .



$$\text{Aire} = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$



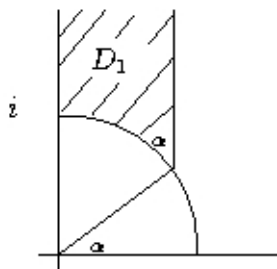
$$\text{Aire} = \pi$$



$$\text{Aire} = \pi$$

Démonstration. — On établit cette formule d'abord sur quelques triangles particuliers.

1er cas :

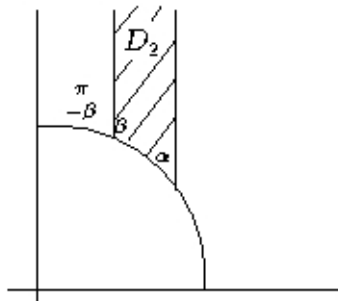


$$\text{Aire}(D_1) = \iint_{D_1} \frac{dx dy}{y^2} = \int_0^{\cos(\alpha)} dx \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} \right).$$

On en déduit :

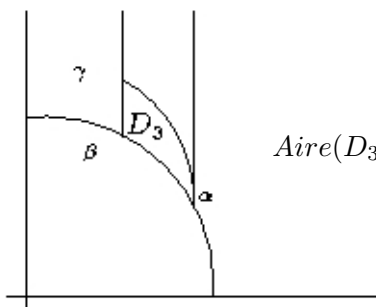
$$\text{Aire}(D_1) = \int_0^{\cos(\alpha)} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x)|_{x=0}^{\cos(\alpha)} = \frac{\pi}{2} - \alpha = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \alpha + 0 \right).$$

2ème cas : comme l'aire est invariante par translation réelle et par homothétie positive, la même formule que celle établie pour le D_2 ci-dessous est valable lorsque le côté inférieur est sur n'importe quelle géodésique non verticale.



$$\begin{aligned} \text{Aire}(D_2) &= \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \left(\frac{\pi}{2} - (\pi - \beta)\right) \\ &= \pi - (\beta + \alpha + 0). \end{aligned}$$

3ème cas :



$$\begin{aligned} \text{Aire}(D_3) &= (\pi - (\alpha + \alpha' + \beta)) - (\pi - (\alpha' + \pi - \gamma)) \\ &= \pi - (\alpha + \beta + \gamma). \end{aligned}$$

□

28.4. Corollaire. — 1) La somme des angles extérieurs d'un triangle géodésique moins son aire est égal à 2π .

2) La même formule vaut pour tout polygone géodésique.

3) Il n'existe pas de triangle géodésique (y compris idéal) avec deux angles droits. Il n'existe pas de quadrilatère géodésique avec quatre angles droits.

Démonstration de 2). — On découpe le polygone en triangles et on établit la formule par récurrence sur le nombre de triangles. Par hypothèse de récurrence on a :

$$-\text{Aire}(D_0) + \sigma + (\alpha + \alpha_1) + (\beta + \beta_1) = 2\pi,$$

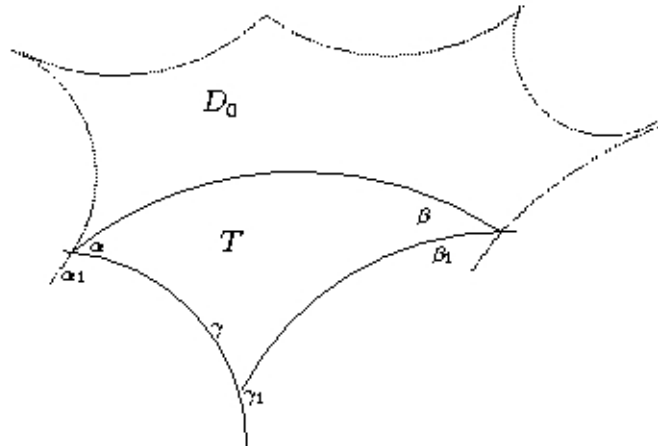
où σ est la somme des angles extérieurs de D_0 autres que $(\alpha + \alpha_1)$ et $(\beta + \beta_1)$.

Par la formule du triangle, on a :

$$-\text{Aire}(T) + \gamma_1 - \alpha - \beta = 0,$$

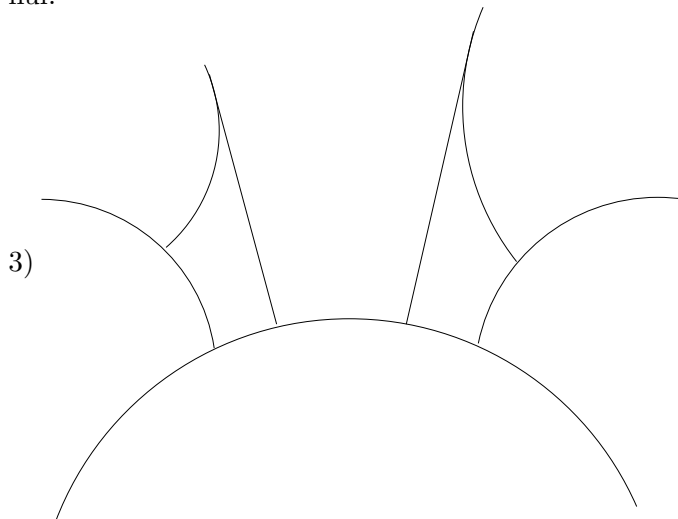
ce qui implique

$$-Aire(D_0 \cup T) + \sigma + \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 2\pi.$$



□

28.1. Exercice. — 1) Montrer que deux géodésiques infinies D_0 et D_1 sont asymptotes si et seulement si elles ont une extrémité commune sur $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
 2) Construire un quadrilatère géodésique avec trois angles droits et un angle nul.



Construire un hexagone avec six angles droits à partir de cette figure et en utilisant 1).

Combien y a-t-il de longueurs de côtés arbitraires ?

29. Polygones réguliers

On va utiliser un autre modèle de la géométrie hyperbolique, à savoir le disque unité ouvert. Il a l'avantage d'avoir visiblement une symétrie de rotation autour de l'origine, qui est plus cachée dans \mathbb{H} autour de i .

29.1. Définition (Le modèle du disque unité). —

Soit $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. On a une transformation projective de la sphère de Riemann \mathbb{S} ,

$$\phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}, \quad z \mapsto \frac{z - i}{z + i} \quad \text{et} \quad \phi(\infty) = 1.$$

On définit un élément de longueur sur \mathbb{D} par

$$ds_{\mathbb{D}}^2 = 4 \frac{dx^2 + dy^2}{(1 - r^2)^2},$$

où $r^2 = x^2 + y^2$.

29.2. Proposition. — ϕ est une isométrie de $(\mathbb{H}, ds_{\mathbb{H}}^2)$ sur $(\mathbb{D}, ds_{\mathbb{D}}^2)$.

Démonstration. — Soit $w = \phi(z)$, $z = -i \frac{w + 1}{w - 1}$. On calcule :

$$dz = -\frac{dw}{(w - 1)^2}, \quad |dz| = \frac{2|dw|}{|w - 1|^2} = \frac{2|dw|}{r^2 - 2r \cos(\theta) + 1}$$

et

$$y = \frac{1 - r^2}{r^2 - 2r \cos(\theta) + 1}.$$

Par suite

$$ds_{\mathbb{H}}^2 = \frac{|dz|^2}{y^2} = \frac{4|dw|^2}{(1 - r^2)^2} = ds_{\mathbb{D}}^2.$$

□

La métrique de \mathbb{D} est invariante par rotation (euclidienne) autour de 0. Ses isométries sont de la forme $\phi \circ h \circ \phi^{-1}$, où h est une isométrie de \mathbb{H} .

29.3. Proposition. — Les isométries directes de \mathbb{D} sont les homographies

$$z \mapsto e^{\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

avec $|a| < 1$.

29.4. Proposition. — 1) Les géodésiques de \mathbb{D} sont les arcs de cercles orthogonaux au cercle unité et les diamètres.

2) Le lieu des points à une distance donnée d'un point $A \in \mathbb{H}$ est un cercle (euclidien), mais pas centré en A .

Démonstration. — On utilise l'exercice suivant :

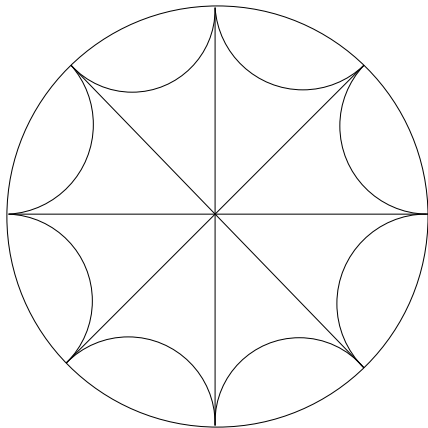
29.1. Exercice. — Montrer que 4 points distincts de \mathbb{C} sont cocycliques (ou alignés) si et seulement si leur birapport est réel. En déduire que toute homographie de \mathbb{S} transforme chaque cercle de \mathbb{C} en un cercle ou une droite.

1) Les géodésiques de \mathbb{D} sont les images par ϕ des géodésiques de \mathbb{H} . Par conservation du birapport et en vertu de l'exercice ci-dessus, ce sont des arcs de cercle. Comme ϕ préserve les angles, en particulier l'orthogonalité, et que $\phi(\mathbb{R})$ est le cercle unité privé de 1, on a la conclusion.

2) Par symétrie de rotation, le lieu des points à une distance δ de l'origine dans \mathbb{D} est un cercle euclidien centré en 0. Son image par ϕ^{-1} est un cercle et c'est le lieu des points de \mathbb{H} à la distance δ de i . Par translation réelle et homothétie, la même conclusion vaut pour tout point $A \in \mathbb{H}$. \square

29.5. Proposition. — Il existe un octogone régulier d'angle au sommet $\frac{\pi}{4}$ à côtés géodésiques.

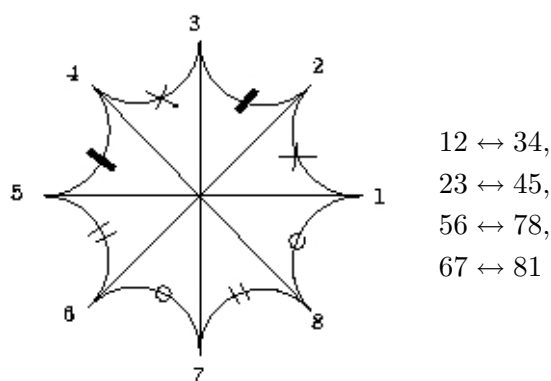
Démonstration. — On travaille dans \mathbb{D} .



On a un octogone “régulier” d’angle intérieur nul dessiné ci-contre. Par ailleurs un octogone régulier très petit a un angle au sommet proche de celui de la géométrie euclidienne, à savoir $\frac{3\pi}{4}$, car, en géométrie euclidienne, la somme des angles extérieurs est égale à 2π .

Quand on augmente le rayon, l'aire croît et l'angle intérieur décroît entre $\frac{3\pi}{4}$ et 0. Comme il varie continûment, il prend toutes les valeurs intermédiaires, par exemple la valeur $\frac{\pi}{4}$. \square

29.6. Utilisation de l'octogone régulier pour paver \mathbb{H} ou \mathbb{D} . — On applique le théorème de Poincaré 24.1 qui vaut en géométrie hyperbolique comme en géométrie euclidienne. On choisit le jumelage des arêtes



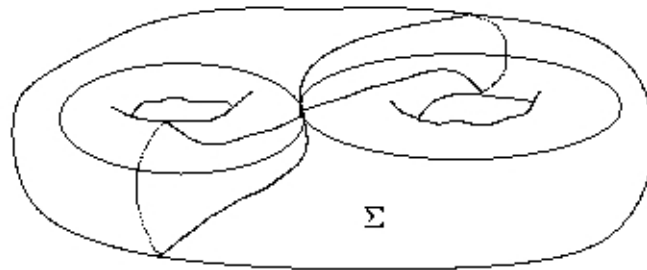
La permutation correspondante des sommets est

$$1 \mapsto 6 \mapsto 7 \mapsto 8 \mapsto 5 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 4 \mapsto 1$$

On a donc un seul cycle de sommets et la somme des angles intérieurs vaut $8 \times \frac{\pi}{4} = 2\pi$. Le théorème de Poincaré 24.1 s'applique. Donc il y a un groupe discret Γ d'isométries de \mathbb{D} (ou de \mathbb{H}) dont le domaine fondamental est le domaine Δ limité par un octogone régulier d'angle au sommet $\frac{\pi}{4}$. L'action est libre car :

- 1) le jumelage des arêtes ne laisse fixe aucune arête,
- 2) le cycle des sommets est de multiplicité 1. L'action vérifie la condition (L) (cf. théorème 24.1).

29.7. Topologie du quotient. — Le quotient de $\Gamma \backslash \mathbb{D}$ est homéomorphe à la surface Σ représentée sur la figure suivante.



En effet, cette surface Σ s'obtient bien à partir d'un bouquet de quatre cercles en y attachant le domaine Δ bordé par l'octogone régulier de 29.5 selon le jumelage des arêtes indiqué plus haut. On peut s'en convaincre en recollant d'abord les arêtes du demi-octogone contenant les sommets 1 2 3 4 5, ce qui donne une moitié de la surface.

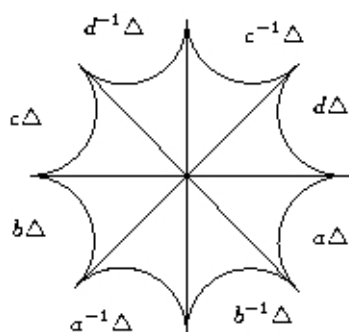
29.8. Corollaire. — *La projection $\mathbb{D} \rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{D} \cong \Sigma$ est le revêtement universel de Σ et Γ est isomorphe au groupe fondamental de Σ .*

29.9. Générateurs et relations de Γ . — On va utiliser le théorème de Poincaré 24.1 pour trouver une présentation de Γ , c'est-à-dire du groupe fondamental de Σ .

- Soit a l'isométrie $76 \mapsto 81$,
- Soit b l'isométrie $87 \mapsto 56$,
- Soit a^{-1} l'isométrie $18 \mapsto 67$,
- Soit b^{-1} l'isométrie $65 \mapsto 78$,
- Soit c l'isométrie $32 \mapsto 45$,
- Soit d l'isométrie $43 \mapsto 12$,
- Soit c^{-1} l'isométrie $54 \mapsto 23$,
- Soit d^{-1} l'isométrie $21 \mapsto 34$.

En faisant le tour du sommet 1, on trouve la relation

$$\boxed{aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} = \text{id.}}$$



Comme tous les sommets sont sur un même cycle, il n'y a pas d'autres relations.

29.2. Exercice. — Retrouver une présentation de $\Gamma \cong \pi_1(\Sigma, x_0)$ par le théorème de Van Kampen.

FRANÇOIS LAUDENBACH & FRIEDRICH WAGEMANN
 Département de mathématiques, Université de Nantes,
 2 Rue de la Houssinière F-44322 Nantes Cedex 03

UNIVERSITÉ DE NANTES
 DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Maîtrise : Topologie Algébrique

François Laudenbach (CM) & Friedrich Wagemann (TD)

td7

Travaux dirigés de Mathématiques, Fiche 9, Topologie algébrique
 2005-2006

Géométrie hyperbolique.

9.1. Exercice. — Soit \mathbb{H} le demi-plan de Poincaré, et \mathbb{D} le disque de Poincaré. On note $d(x, y)$ la distance (hyperbolique) entre x et y , $x, y \in \mathbb{H}$. On rappelle que l'application $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}, z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ est une isométrie de \mathbb{H} sur \mathbb{D} . Notons $g_{z_0} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ la multiplication par $\frac{f(z_0)}{|f(z_0)|}$.

- 1) Montrer que i est un point fixe de $f^{-1} \circ g_{z_0} \circ f$.
- 2) Montrer que $f \left(i \frac{|z_0+i|+|z_0-i|}{|z_0+i|-|z_0-i|} \right) = \frac{|z_0-i|}{|z_0+i|}$. En déduire que $f^{-1} \circ g_{z_0} \circ f$ envoie z_0 sur $i \frac{|z_0+i|+|z_0-i|}{|z_0+i|-|z_0-i|}$.
- 3) Se rappeler que $d(i, iy) = |\ln(y)|$ pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, et déduire de ce qui précède que

$$e^{d(i, z_0)} = \frac{|z_0+i|+|z_0-i|}{|z_0+i|-|z_0-i|}$$

- 4) Déduire $\text{ch}(d(i, z_0))$. Si maintenant $z_0 = \frac{ai+b}{ci+d}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $ad-bc=1$, montrer que

$$\text{ch}(d(i, z_0)) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2).$$

Indication Corrigé

9.2. Exercice. — 1) Écrire sous forme matricielle la translation hyperbolique de distance k le long de l'axe imaginaire.

2) a) Étudier la transformation $z \mapsto \frac{1+z}{1-z}$. En déduire que, si z est de module 1, alors z' qui est donné par la formule

$$\frac{z' + 1}{z' - 1} = e^k \frac{z + 1}{z - 1}$$

est de module 1.

b) En déduire que la transformation $z \mapsto z'$ déplace les points de la droite hyperbolique des complexes de module 1 d'une distance k .

c) Montrer que la forme matricielle de la translation hyperbolique de distance k le long de la droite hyperbolique des complexes de module 1 est

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}(\frac{k}{2}) & \operatorname{sh}(\frac{k}{2}) \\ \operatorname{sh}(\frac{k}{2}) & \operatorname{ch}(\frac{k}{2}) \end{pmatrix}.$$

3) On considère maintenant le problème de calculer la distance de deux points à égale distance d'une droite. Pour fixer les notations, appelons M_1 et M_2 les deux points, m leur distance égale d'une droite et l la distance sur la droite entre les deux perpendiculaires (cf exercice 9.4). Trouver une situation normalisée où on peut appliquer ce qui précède à ce problème.

4) Établir la formule $\operatorname{ch}(d(M_1, M_2)) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(l) + 1 + (\operatorname{ch}(l) - 1)\operatorname{ch}(2m))$, en utilisant la formule de l'exercice 9.1.

Indication Corrigé

9.3. Exercice. — Étant donné un quadruplet de complexes distincts z_1, z_2, z_3, z_4 , on définit leur birapport par

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \times \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1}.$$

Le but de cet exercice est de compléter la preuve que le birapport est invariant sous homographies (proposition 25.8). Pour cela, il reste à montrer que pour $z_1, z_2, z_3 \in SS$, il existe une unique homographie h telle que $h(z_1) = \infty$, $h(z_2) = 0$, et $h(z_3) = 1$.

Indication Corrigé

9.4. Exercice. — Montrer que si L_1 et L_2 sont deux géodésiques disjointes et non-asymptotiques, alors il existe une géodésique unique qui est orthogonal à L_1 et à L_2 .

Indication Corrigé

9.5. Exercice. — Soit $D(R, i)$ le disque (hyperbolique) de rayon R autour de $i \in \mathbb{H}$. Calculer son aire dans le disque \mathbb{D} et représenter son allure graphiquement dans \mathbb{H} (sans aucun calcul).

Indication Corrigé

UNIVERSITÉ DE NANTES
 DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Maîtrise : Topologie Algébrique

François Laudenbach (CM) & Friedrich Wagemann (TD)

Géométrie hyperbolique : indications pour les exercices.

9.1. Indication exercice. — **9.1** Le but de la transformation f est, pour mesurer la distance entre z_0 et i , de *normaliser la situation*, i.e. l'isométrie f envoie i et z_0 sur l'axe imaginaire où c'est plus facile de mesurer la distance. La dernière partie de 4) est un peu calculatoire.

Énoncé Corrigé

9.2. Indication exercice. — **9.2** 1) On vient de voir que la translation hyperbolique de distance hyperbolique k le long de l'axe imaginaire est simplement la multiplication par e^k . On veut représenter cette transformation par une matrice de $Sl(2, \mathbb{R})$.

Énoncé Corrigé

9.2 2) Il s'agit de représenter la transformation de 2) par une matrice de $Sl(2, \mathbb{R})$. Le résultat est donné.

Énoncé Corrigé

9.2 3) La situation est considérée comme normalisée, quand on a envoyé M_1 sur i , le déplacement de distance m sur la droite donc par un déplacement sur l'axe imaginaire, et le déplacement de distance l par un déplacement sur un cercle orthogonal à l'axe imaginaire.

Énoncé Corrigé

9.2 4) Encore une fois, c'est un peu calculatoire.

Énoncé Corrigé

9.3. Indication exercice. — **9.3** Une approche à la question est de montrer d'abord qu'une transformation affine est caractérisée parmi les homographies comme une transformation qui fixe $\infty \in \mathbb{S}$. Ensuite, pour construire une

homographie qui envoie (z_1, z_2, z_3) sur $(\infty, 0, 1)$, on pourra d'abord trouver une transformation qui envoie z_1 sur ∞ , et ensuite trouver la transformation affine qui envoie (z_2, z_3) sur $(0, 1)$.

Énoncé Corrigé

9.4. Indication exercice. — **9.4** Une fois de plus, il est utile de normaliser la situation. Ainsi, on peut considérer que L_1 soit l'axe imaginaire (passant par l'origine O du repère standard), et L_2 un demi-cercle (avec centre C sur l'axe réelle et de rayon r), disjoint de L_1 . Ensuite, le problème se réduit à un problème de géométrie élémentaire.

Énoncé Corrigé

9.5. Indication exercice. — **9.5** Remarquons qu'il n'est pas clair qu'un disque hyperbolique $D = \{z \in \mathbb{H} \mid d(i, z) \leq R\} \subset \mathbb{H}$ centré en i soit "rond", i.e. que la distance euclidienne des points du bords à i soit égale.

Énoncé Corrigé

UNIVERSITÉ DE NANTES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Maîtrise : Topologie Algébrique

François Laudenbach (CM) & Friedrich Wagemann (TD)

Travaux dirigés de Mathématiques, Fiche 9, Topologie algébrique
2005-2006

Géométrie hyperbolique : solutions des exercices.

9.1. Corrigé exercice. — 1) On a $f^{-1} \circ g_{z_0} \circ f(i) = f^{-1}(g_{z_0}(0)) = f^{-1}(0) = i$.

Énoncé Indication

9.1 2) Il faut montrer que

$$\frac{|z_0 - i|}{|z_0 + i|} = f \left(i \frac{|z_0 + i| + |z_0 - i|}{|z_0 + i| - |z_0 - i|} \right).$$

En mettant sur le même dénominateur, on obtient

$$\begin{aligned} f \left(i \frac{|z_0 + i| + |z_0 - i|}{|z_0 + i| - |z_0 - i|} \right) &= \frac{|z_0 + i| + |z_0 - i| - |z_0 + i| + |z_0 - i|}{|z_0 + i| + |z_0 - i| + |z_0 + i| - |z_0 - i|} \\ &= \frac{|z_0 - i|}{|z_0 + i|}, \end{aligned}$$

ce qui démontre bien l'assertion. On en déduit que, pour mesurer la distance entre z_0 et i , on est parvenu à *normaliser la situation*, i.e. l'isométrie f envoie i et z_0 sur l'axe imaginaire où c'est plus facile de mesurer la distance.

Énoncé Indication

9.1 3) Soit $h = f^{-1} \circ g_{z_0} \circ f$. h est une isométrie. Alors

$$e^{d(i,z_0)} = e^{d(h(i),h(z_0))} = e^{d(i,i \frac{|z_0+i|+|z_0-i|}{|z_0+i|-|z_0-i|})} = \left(\frac{|z_0 + i| + |z_0 - i|}{|z_0 + i| - |z_0 - i|} \right)^{\pm 1},$$

où le signe en exposant dépend du fait que

$$\ln \left(\frac{|z_0 + i| + |z_0 - i|}{|z_0 + i| - |z_0 - i|} \right)$$

est positif ou négatif. En tout cas,

$$\operatorname{ch}(d(i, z_0)) = \frac{1}{2} \left(e^{d(i, z_0)} + e^{-d(i, z_0)} \right)$$

est bien défini, et vaut

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(d(i, z_0)) &= \frac{1}{2} \left(\frac{|z_0 + i| + |z_0 - i|}{|z_0 + i| - |z_0 - i|} + \frac{|z_0 + i| - |z_0 - i|}{|z_0 + i| + |z_0 - i|} \right) \\ &= \frac{|z_0 + i|^2 + |z_0 - i|^2}{|z_0 + i|^2 - |z_0 - i|^2}. \end{aligned}$$

Énoncé Indication

9.1 4) On a déjà déduit l'expression de $\operatorname{ch}(d(i, z_0))$. Si maintenant $z_0 = \frac{ai+b}{ci+d}$, alors on a

$$|z_0 - i|^2 = \frac{1}{c^2 + d^2} \left((ac + bd)^2 + (1 - c^2 - d^2)^2 \right),$$

et

$$|z_0 + i|^2 = \frac{1}{c^2 + d^2} \left((ac + bd)^2 + (1 + c^2 + d^2)^2 \right).$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(d(i, z_0)) &= \frac{(ac + bd)^2 + (1 + c^2 + d^2)^2 + (ac + bd)^2 + (1 - c^2 - d^2)^2}{(ac + bd)^2 + (1 + c^2 + d^2)^2 - (ac + bd)^2 - (1 - c^2 - d^2)^2} \\ &= \frac{2(ac + bd)^2 + 2 + 2(c^2 + d^2)^2}{4(c^2 + d^2)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{a^2c^2 + 2acbd + b^2d^2 + 1 + c^4 + 2c^2d^2 + d^4}{(c^2 + d^2)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{c^2(a^2 + c^2 + d^2) + d^2(c^2 + b^2 + d^2) + 2acbd + 1}{(c^2 + d^2)} \\ &= \frac{1}{2} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2), \end{aligned}$$

car $2acbd + 1 = c^2b^2 + d^2a^2$, comme on le vérifie facilement.

Énoncé Indication

9.2. Corrigé exercice. — 1) La translation hyperbolique de distance hyperbolique k s'écrit

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{k}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{k}{2}} \end{pmatrix}.$$

Elle envoie en elle-même l'axe imaginaire.

Énoncé Indication

9.2 2a) La transformation $g : z \mapsto \frac{1+z}{1-z}$ en question envoie le demi-cercle ouvert $\{0 < \theta < 2\pi\}$ sur l'axe imaginaire positive, avec $g(i) = i$ et $g(e^{i\phi}) = i \frac{\sin(\phi)}{1-\cos(\phi)}$. En particulier, si z est de module 1, alors $g(z)$ est sur l'axe imaginaire, et $e^k g(z)$ est sur l'axe imaginaire. Ainsi, le z' donné dans l'exercice est de module 1.

Énoncé Indication

9.2 2b) Il suffit de remarquer que g est une isométrie de \mathbb{H} .

Énoncé Indication

9.2 2c) La transformation $z \mapsto z'$ indiquée dans l'exercice est donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\left(\frac{k}{2}\right) & \operatorname{sh}\left(\frac{k}{2}\right) \\ \operatorname{sh}\left(\frac{k}{2}\right) & \operatorname{ch}\left(\frac{k}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

En effet, si $y = \frac{z'+1}{z'-1}$, alors on voit facilement que $z' = \frac{y+1}{y-1}$. Ainsi on a

$$\begin{aligned} z' &= \frac{e^k \frac{z+1}{z-1} + 1}{e^k \frac{z+1}{z-1} - 1} \\ &= \frac{e^k(z+1) + z-1}{e^k(z+1) - z+1} \\ &= \frac{z(e^k+1) + (e^k-1)}{z(e^k-1) + (e^k+1)} \\ &= \frac{z(e^{\frac{k}{2}} + e^{-\frac{k}{2}}) + (e^{\frac{k}{2}} - e^{-\frac{k}{2}})}{z(e^{\frac{k}{2}} - e^{-\frac{k}{2}}) + (e^{\frac{k}{2}} + e^{-\frac{k}{2}})} \\ &= \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{k}{2}\right)z + \operatorname{sh}\left(\frac{k}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{k}{2}\right)z + \operatorname{ch}\left(\frac{k}{2}\right)}. \end{aligned}$$

La transformation $z \mapsto z'$ déplace les points de cette droite hyperbolique (des z de module 1 qui sont dans le demi-plan supérieur) d'une distance k vers la droite si $k > 0$, et vers la gauche si $k < 0$.

Énoncé Indication

9.2 3) et 4) La situation est normalisée, quand on a envoyé M_1 sur i , le déplacement de distance m sur la droite donc par un déplacement sur l'axe imaginaire, et le déplacement de distance l par un déplacement sur un cercle orthogonal à l'axe imaginaire. Cette "normalisation" se fait par une isométrie de \mathbb{H} , donc ne change pas la distance. Autrement dit, on peut supposer sans

perte de généralité que $M_1 = i$, $M_2 = f(i)$ où

$$f = \begin{pmatrix} e^{-\frac{m}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{m}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\left(\frac{l}{2}\right) & \operatorname{sh}\left(\frac{l}{2}\right) \\ \operatorname{sh}\left(\frac{l}{2}\right) & \operatorname{ch}\left(\frac{l}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{m}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{m}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\left(\frac{l}{2}\right) & e^{-m} \operatorname{sh}\left(\frac{l}{2}\right) \\ e^m \operatorname{sh}\left(\frac{l}{2}\right) & \operatorname{ch}\left(\frac{l}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Sous cette forme, on peut calculer la distance à l'aide de la formule que nous avons démontré en 9.1 4) : on a

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(d(M_1, M_2)) &= \frac{1}{2} \left(\operatorname{ch}^2\left(\frac{l}{2}\right) + \left(e^{-m} \operatorname{sh}\left(\frac{l}{2}\right) \right)^2 + \operatorname{ch}^2\left(\frac{l}{2}\right) + \left(e^m \operatorname{sh}\left(\frac{l}{2}\right) \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} (\operatorname{ch}(l) + 1 + (\operatorname{ch}(l) - 1) \operatorname{ch}(2m)) \\ &= \operatorname{ch}(l) + 1 + \left(\frac{1}{2}(e^l - 2 + e^{-l}) \right) \operatorname{ch}(2m) \\ &= \operatorname{ch}(l) + 1 + (\operatorname{ch}(l) - 1) \operatorname{ch}(2m). \end{aligned}$$

Énoncé Indication

9.3. Corrigé exercice. — Soient donc $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{S}$. Montrons d'abord qu'une transformation affine est caractérisée parmi les homographies comme une transformation qui fixe $\infty \in \mathbb{S}$, i.e. une homographie f satisfait $f(\infty) = \infty$ si et seulement s'il existent $a, b \in \mathbb{C}$ avec $f(z) = az + b$. En effet, si $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, et si $c \neq 0$, alors $f(\infty) = \frac{a}{c} \neq \infty$, et par suite $c = 0$, i.e. $f(z) = a'z + b'$ pour $a', b' \in \mathbb{C}$.

Soient maintenant $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{S}$. Nous allons construire l'unique homographie qui envoie (z_1, z_2, z_3) sur $(\infty, 0, 1)$. Soit $T(z) = \frac{1}{z-z_1}$, alors T est une homographie avec $z_1 \mapsto \infty$. Notons $T(z_2) = z'_2$ et $T(z_3) = z'_3$. Ensuite, on envoie (z'_2, z'_3) sur $(0, 1)$ par une transformation affine $G(z) = az + b$: G est déterminé par le système linéaire

$$\begin{cases} az'_2 + b = 0 \\ az'_3 + b = 1 \end{cases}$$

On voit facilement que $a = \frac{1}{z'_3 - z'_2}$ et $b = -\frac{z'_2}{z'_3 - z'_2}$ est l'unique solution. Ainsi $f(z) = G \circ T(z)$ est une solution du problème, plus explicitement

$$f(z) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \times \frac{z - z_2}{z - z_1},$$

comme on le vérifie par un calcul direct. En ce qui concerne l'unicité, montrons que si une homographie f fixe trois points z_1, z_2 , et z_3 , alors elle est l'identité.

En effet, si $z_1 = \infty$, alors on a

$$\begin{cases} az_2 + b = z_2 \\ az_3 + b = z_3 \end{cases}$$

par ce qui précède, et on déduit facilement $a = 1$ et $b = 0$. Si $z_1 \neq \infty$, il existe T avec $T(z_1) = \infty$. Par suite, $T \circ f \circ T^{-1}$ est une homographie avec $T(z_1)$, $T(z_2)$, et $T(z_3)$ comme points fixes, i.e. $T \circ f \circ T^{-1}(\infty) = \infty$. On déduit que $f = \text{id}_{\mathbb{S}}$.

Énoncé Indication

9.4. Corrigé exercice. — Au lieu de travailler dans une situation générale (i.e. avec des géodésiques quelconques), nous allons normaliser la situation (et terminer en utilisant qu'il existe une unique isométrie qui envoie la solution de la situation normalisée sur la solution du problème général). Ainsi, on peut considérer que L_1 soit l'axe imaginaire (passant par l'origine O du repère standard), et L_2 un demi-cercle (avec centre C sur l'axe réelle et de rayon r), disjoint de L_1 . Soit $A = (a, 0)$ le point d'intersection de L_2 avec l'axe réelle du côté de l'axe imaginaire. Il faut démontrer l'existence et l'unicité d'un cercle orthogonal à L_1 et L_2 . Soit $a < t < a + r$ le rayon d'un cercle \mathcal{C} centré en l'origine O - un tel est automatiquement orthogonal à L_1 ; il intersecte L_2 en un point B . On a bien $a > r > 0$, car L_1 et L_2 sont disjoints. Par Pythagore, l'angle OBC est droit si et seulement si $a^2 = r^2 + t^2$. Puisque $a > r$, il existe un unique t positif tel que l'angle OBC soit droit, et c'est l'unique t qui rend \mathcal{C} une géodésique orthogonale simultanément à L_1 et L_2 .

Énoncé Indication

9.5. Corrigé exercice. — Il n'est pas clair qu'un disque hyperbolique $D = \{z \in \mathbb{H} \mid d(i, z) \leq R\} \subset \mathbb{H}$ centré en i soit "rond", i.e. que la distance euclidienne des points du bords à i soit égale. Or, pour des raisons de symétrie, un disque $D' = \{z \in \mathbb{D} \mid d(0, z) \leq R'\} \subset \mathbb{D}$ dans le disque de Poincaré \mathbb{D} est un disque euclidien, notons son rayon euclidien r . D a bien sûr même aire que D' .

L'aire A du disque D' se calcule à partir de r à l'aide de la métrique dans \mathbb{D} comme suit :

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_0^r \left[\frac{2}{1-t^2} \right] t dt d\phi \\ &= 2\pi \cdot 4 \int_0^r \frac{t dt}{(1-t^2)^2} = 4\pi \int_0^{r^2} \frac{du}{(1-u)^2} \\ &= 4\pi \left[\frac{1}{1-u} \right]_0^{r^2} = \frac{4\pi}{1-r^2} - 4\pi. \end{aligned}$$

Il faut donc transformer le rayon euclidien r en le rayon R' du disque hyperbolique :

$$R' = d(0, r) = \int_0^r \frac{2 dt}{1-t^2} = \ln \left(\frac{1+r}{1-r} \right),$$

où nous avons utilisé la formule $\arctan(t) = \ln \left(\frac{1+t}{1-t} \right)$. On en déduit $e^{R'} = \frac{1+r}{1-r}$,

et puis $r = \frac{e^{R'}-1}{e^{R'}+1} = \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{R'}{2}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{R'}{2}\right)}$. Ainsi on obtient $\frac{1}{1-r} = \operatorname{ch}^2\left(\frac{R'}{2}\right)$. En conclusion,

$$A = \frac{4\pi}{1-r^2} - 4\pi = 4\pi \left(\operatorname{ch}^2\left(\frac{R'}{2}\right) - 1 \right).$$

Il reste à répondre à la question sur la forme du disque $D \subset \mathbb{H}$: il s'avère que D est un disque euclidien centré en i . Ceci découle du fait que l'homographie $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$ qui induit l'isométrie entre \mathbb{H} et \mathbb{D} préserve la famille des cercles et des droites.

Énoncé Indication

Chapitre VIII : Surfaces

c8

Définition des surfaces

30.1. Définition. — Une *surface* (sans bord) est un espace topologique S , métrisable, localement homéomorphe à \mathbb{R}^2 . Précisément tout point $a \in S$ a un voisinage ouvert homéomorphe à \mathbb{R}^2 .

Dans cette définition on peut remplacer \mathbb{R}^2 par un disque ouvert de \mathbb{R}^2 puisque les deux sont homéomorphes (Indication : $]0,1[\cong \mathbb{R}$ et les coordonnées polaires permettent d'utiliser cet homéomorphisme pour construire un homéomorphisme entre le disque unité ouvert et \mathbb{R}^2).

30.2. Les sous-variétés différentiables de dimension 2 de \mathbb{R}^n . — On rappelle que S est une sous-variété de dimension 2 de \mathbb{R}^n si, pour tout $a \in S$, il existe un voisinage ouvert V de a dans \mathbb{R}^n et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-2}$, de classe \mathcal{C}^1 (ou \mathcal{C}^k , $k \geq 1$), tels que

- 1) $Df(x)$ est de rang maximum pour tout $x \in V$ et
- 2) $f^{-1}(0) = V \cup S$.

On dit que $f(x) = 0$ est une *équation régulière* de S au voisinage de x .

Par exemple, pour $S = S^2 \subset \mathbb{R}^3$, $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ est une équation régulière de S globale.

30.3. Proposition. — Une sous-variété de dimension 2 de \mathbb{R}^n est localement homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^2 .

Démonstration. — Cela découle du théorème des fonctions implicites. □

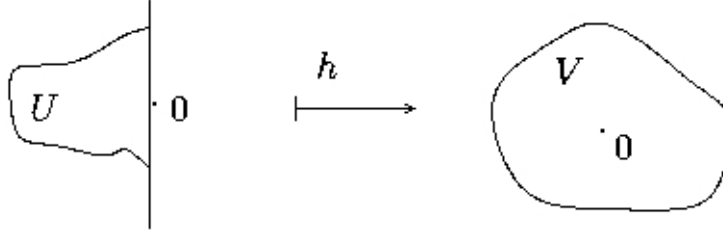
30.4. Proposition. — Si $p : X \rightarrow B$ est un revêtement où X et B sont des espaces métriques, B est une surface si et seulement si X est une surface.

30.5. Définition (Surface à bord). — Une *surface à bord* est un espace topologique métrisable localement homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}_-^2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \leq 0\}$.

La définition du *bord* repose sur la proposition suivante.

30.6. Proposition. — Il n'existe pas d'homéomorphisme d'un voisinage ouvert U de 0 dans \mathbb{R}_-^2 sur un ouvert V de \mathbb{R}^2 .

Démonstration. —



Comme h et h^{-1} sont continus, il existe $r_1 > r_2 > r_3 > 0$ tels que $B(r_3) \subset h(B(r_2) \cap \mathbb{R}_-^2) \subset B(r_1)$, où $B(r)$ est la boule ouverte centrée en 0 de rayon r . On remarque que $(B(r_2) \cap \mathbb{R}_-^2) \setminus \{0\}$ est contractile tandis que $B(r) \setminus \{0\}$ n'est pas 1-connexe. Précisément, si $x_0 \in B(r_3) \setminus \{0\}$, $\pi_1(B(r_3) \setminus \{0\}, x_0) \cong \mathbb{Z}$ et l'inclusion $i : B(r_3) \setminus \{0\} \rightarrow B(r_1) \setminus \{0\}$ induit un isomorphisme $i_\#$. Mais le diagramme ci-dessous montre que cet isomorphisme se factorise par 0 ; contradiction.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(B(r_3) \setminus \{0\}, x_0) & \xrightarrow{\quad} & \pi_1(B(r_1) \setminus \{0\}, x_0) \\ & \searrow & \nearrow \\ & \pi_1(h(B(r_2) \setminus \{0\}), x_0) = 0 & \end{array}$$

□

30.7. Définition. — Si X est une surface à bord, le *bord* de X , noté ∂X , est l'ensemble des points n'ayant pas de voisinage homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^2 . L'*intérieur* de X , noté $\text{int } X$, est le complémentaire $X \setminus \partial X$.

30.8. Proposition. — ∂X est localement homéomorphe à un intervalle ouvert ; autrement dit, ∂X est une variété de dimension 1 sans bord.

30.9. Exemples. — 1) D^2 , le disque fermé du plan, et l'anneau $S^1 \times [0, 1]$ sont deux exemples de surface à bord. Le bord du disque est le cercle et le bord de l'anneau est la réunion disjointe de deux cercles.

2) Si X est une surface et si $h : D^2 \rightarrow X$ est continue injective, alors h est un

homéomorphisme $D^2 \rightarrow h(D^2)$ et $X \setminus h(\text{int}(1/2D^2))$ est une surface à bord (Exercice).

30.10. Proposition. — *Si X est une surface à bord non-vide, $\text{int } X$ est une surface à bord vide, qui est non-compacte.*

Démonstration. — Si $\text{int } X$ est compact, alors il est complet ; mais les suites de $\text{int } X$ tendant vers un point du bord sont des suites de Cauchy sans limite dans $\text{int } X$; contradiction. \square

31. Surfaces orientables

On ne considère que le cas des surfaces sans bord.

31.1. Proposition. — *Soit $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow V$ un homéomorphisme sur un ouvert $V \subset \mathbb{R}^2$, avec $h(0) = 0$. Soit $x_0 \in V \setminus \{0\}$. Alors l'inclusion $i : V \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ induit un isomorphisme*

$$i_{\#} : \pi_1(V \setminus \{0\}, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, x_0) \cong \mathbb{Z}.$$

Démonstration. — À cause de h , on sait que $\pi_1(V \setminus \{0\}, x_0)$ est isomorphe à \mathbb{Z} . Soit $B(r)$ une petite boule centrée en 0 contenue dans V . On déplace le point base dans cette boule ; c'est justifié car les groupes fondamentaux sont abéliens et $\pi_1(V \setminus 0, x_0)$ est canoniquement isomorphe à $\pi_1(V \setminus 0, x'_0)$. On a alors :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(B(r) \setminus \{0\}, x_0) & \xrightarrow{j_{\#}} & \pi_1(V \setminus \{0\}, x_0) \\ \downarrow Id & \swarrow i_{\#} & \\ \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, x_0) & & \end{array}$$

Donc $i_{\#}$ est surjectif. Or un morphisme surjectif $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ est un isomorphisme. \square

31.2. Corollaire. — *Soit X une surface, $x \in X$. Si U_1 et U_2 sont deux voisinages ouverts de x homéomorphes à \mathbb{R}^2 , $\pi_1(U_1 \setminus \{x\}, *)$ est canoniquement isomorphe à $\pi_1(U_2 \setminus \{x\}, *)$ quel que soit le point base $*$ choisi.*

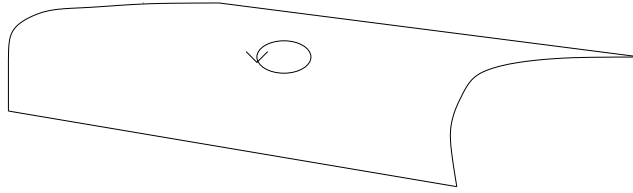
Démonstration. — Soit V un voisinage de x homéomorphe à \mathbb{R}^2 , contenu dans $U_1 \cap U_2$. Montrons que, pour $i = 1, 2$, l'inclusion $V \setminus \{x\} \hookrightarrow U_i \setminus \{x\}$ induit un isomorphisme $\pi_1(V \setminus \{x\}, *) \cong \pi_1(U_i \setminus \{x\})$. En effet on a un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} (V, x) & \longrightarrow & (U_i, x) \\ \cong \uparrow & & \downarrow \cong \\ (\mathbb{R}^2, 0) & \xrightarrow{h_i} & (\mathbb{R}^2, 0) \end{array}$$

L'application $h_i : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ ainsi produite est un homéomorphisme sur un ouvert $h_i(\mathbb{R}^2)$. On applique alors la proposition 31.1 à h_i . \square

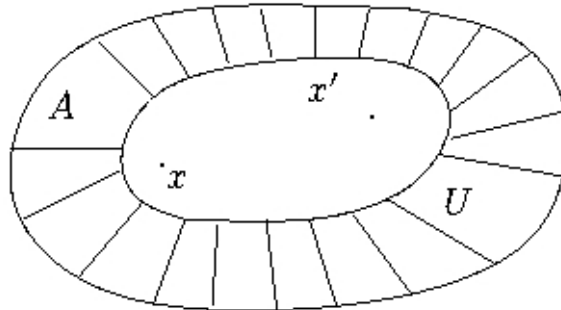
31.3. Définition. — Une *orientation* de X en x est le choix, pour un voisinage ouvert U de x homéomorphe à \mathbb{R}^2 , d'un isomorphisme $\pi_1(U \setminus \{x\}, *) \cong \mathbb{Z}$.

Il y a deux choix possibles puisque \mathbb{Z} a deux automorphismes Id et $-Id$. D'après le corollaire, le choix fait pour U se répercute sur tous les voisinages de x , homéomorphes à \mathbb{R}^2 .



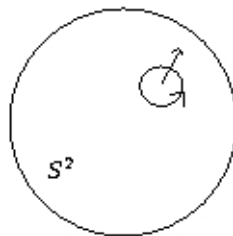
31.4. Définition. — Soit $x \mapsto \mu_x$ une orientation en chaque point. On dit que *l'orientation est continue*, si pour tout ouvert U homéomorphe à \mathbb{R}^2 et tout $x, x' \in U$, il existe un anneau $A \subset U \setminus \{x, x'\}$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc} & & \pi_1(U \setminus \{x\}, *) & & \\ & \nearrow^{j_{x\#}} & & \searrow^{\mu_x} & \\ \pi_1(A, *) & \cong & & & \mathbb{Z} \\ & \searrow_{j_{x'\#}} & & \nearrow_{\mu'_{x'}} & \\ & & \pi_1(U \setminus \{x'\}, *) & & \end{array}$$



Une surface est *orientable* si elle admet une orientation continue.

31.5. Exemples. — 1) La sphère S^2 est orientable. Si on la voit comme sphère unité de \mathbb{R}^3 , en chaque point $p \in S^2$ on a une normale *sortante* dirigée par un vecteur unitaire orthogonal à la sphère en p et pointant vers l'extérieur de la boule. La règle du *tire-bouchon de Maxwell* donne alors une façon de tourner autour de p sur la sphère ; c'est le μ_p , qui varie continûment avec p .



2) Le ruban de Möbius n'est pas orientable. On peut le voir à la main ou le déduire de ce qui suit.

32. L'orientabilité du point de vue algébrique

On suppose que X est une surface connexe (donc connexe par arcs). On choisit arbitrairement une orientation μ_{x_0} de X au point base x_0 . Si γ est un lacet en x_0 , on peut prolonger μ_{x_0} en $\mu_{\gamma(t)}$, continûment en t . Attention, si

γ a un point double, $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$, on peut avoir $\mu_{\gamma(t_0)} \neq \mu_{\gamma(t_1)}$. On définit $\sigma(\gamma) \in \{\pm\} = \mathbb{Z}_2$ par

$$\sigma(\gamma) = + \text{ si } \mu_{\gamma(1)} = \mu_{x_0} \text{ et } \sigma(\gamma) = - \text{ si } \mu_{\gamma(1)} \neq \mu_{x_0}.$$

32.1. Proposition. — 1) $\sigma(\gamma)$ ne dépend que de la classe d'homotopie de γ (et pas de μ_{x_0}); σ définit un morphisme

$$\sigma : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \mathbb{Z}_2.$$

2) X est orientable si et seulement si σ est trivial.

Démonstration. — 1) Par compacité de $[0, 1]$, on a une subdivision de $[0, 1]$ $0, \dots, t_i, t_{i+1}, \dots, 1$ telle que $\gamma([t_i, t_{i+1}])$ soit contenu dans un ouvert U_i homéomorphe à \mathbb{R}^2 . Si $\mu_{\gamma(t_i)}$ est déterminée, alors l'orientation est fixée en tous les points de U_i , donc en $\gamma(t_{i+1})$. Ainsi de proche en proche. On a ainsi $\mu_{\gamma(1)}$ et donc $\sigma(\gamma)$. On voit que si γ' est proche de γ , $\gamma'([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$ donc $\sigma(\gamma') = \sigma(\gamma)$. Ainsi dans une famille à un paramètre de lacets, l'application $s \mapsto \sigma(\gamma_s)$ est localement constante, donc constante. Que σ soit un homomorphisme de groupes est évident.

2) " \Rightarrow " évident.

" \Leftarrow " On définit μ_x en reliant x à x_0 par un chemin et en transportant l'orientation μ_{x_0} le long de ce chemin. Comme σ est trivial, μ_x ne dépend pas du chemin choisi. \square

32.2. Proposition. — Si X est une surface connexe par arcs et non-orientable, il existe un revêtement $p : \hat{X} \rightarrow X$ à deux feuillets (donc galoisien) avec \hat{X} connexe par arcs et orientable. L'involution τ qui permute les deux points dans chaque fibre renverse l'orientation de \hat{X} .

Exemple. — L'involution antipodale de la sphère renverse l'orientation. Donc le quotient P^2 n'est pas orientable.

Démonstration. — Si X est non-orientable, d'après la proposition 32.1, le morphisme $\sigma : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ est surjectif. Donc $\text{Ker}(\sigma)$ est un sous-groupe d'indice 2. Comme X est localement contractile, la classification des revêtements (connexes) s'applique (20.4). Il existe un revêtement $p : (\hat{X}, \hat{x}_0) \times (X, x_0)$ avec $p_*\pi_1(\hat{X}, \hat{x}_0) = \text{Ker}(\sigma)$.

Si $\hat{\gamma}$ est un lacet dans \hat{X} au-dessus de γ , comme p est un homéomorphisme

local, l'orientation de X en $\gamma(t)$ (déduite d'une orientation choisie au point-base) se relève en orientation de \hat{X} en $\hat{\gamma}(t)$ et donc $\sigma(\hat{\gamma}) = \sigma(\gamma)$. Mais par construction $[\gamma] = [p \circ \hat{\gamma}]$ est dans $\text{Ker}(\sigma)$. Donc $\sigma(\hat{\gamma}) = +$ pour tout lacet $\hat{\gamma}$, ce qui prouve que \hat{X} est orientable.

Par un argument de connexité, $\mu_{\tau(\hat{x}_0)} = \tau\mu_{\hat{x}_0}$ équivaut à $\mu_{\tau(\hat{x})} = \tau\mu_{\hat{x}}$ pour tout $\hat{x} \in \hat{X}$. Si cette égalité est vraie, alors X est orientable. Comme ce n'est pas le cas, $\mu_{\tau(\hat{x})} \neq \tau\mu_{\hat{x}}$ pour tout point de \hat{X} . \square

32.3. Exemple (La bouteille de Klein). — On considère l'involution $\tau : T^2 \rightarrow T^2$, $\tau : (x, y) \mapsto (x + \frac{1}{2}, -y) \in T^2$. Pour cette formule on identifie le tore avec le produit $S^1 \times S^1$ et chaque facteur est pensé comme le groupe quotient \mathbb{R}/\mathbb{Z} . L'involution τ renverse l'orientation. Donc le quotient T^2/τ , qui est la bouteille de Klein (cf. 12.9), est une surface non-orientable, notée classiquement K^2 .

33. Classification des surfaces compactes orientables à bord vide

On se contente de donner le résultat. Une bonne référence est le livre de W. Massey, *Algebraic topology, an introduction*, Harcourt, Brace & World, Inc., 1967.

Dans ce paragraphe et dans le suivant, nous aurons besoin de la notion de *somme connexe* de deux surfaces.

33.1. Définition. — Soit X_1 et X_2 deux surfaces connexes. La *somme connexe*, notée $X_1 \# X_2$, est la surface connexe obtenue par la construction suivante : soit $h_i : D^2(r) \rightarrow X_i$ un plongement du disque ouvert de rayon $r > 1$; on considère la surface à bord $X'_i := X_i \setminus h_i(D^2(1))$; la somme connexe est obtenue en recollant X'_1 et X'_2 par un homéomorphisme de leur bord, lui-même homéomorphe à S^1 .

On prouve qu'à homéomorphisme près, cette surface ne dépend pas des choix utilisés pour la construction.

33.2. — Les surfaces compactes orientables à bord vide sont (à homéomorphisme près) :

- La sphère S^2 (surface de genre 0), qui est 1-connexe,

- Le tore $T^2 = \mathbb{Z}^2 \backslash \mathbb{R}^2$, (surface de genre 1),
- La surface de genre $g > 1$, $\Sigma^2(g) = \Gamma \backslash \mathbb{H}$, où Γ est un sous-groupe discret de $Iso^+(\mathbb{H}, ds_{\mathbb{H}}^2)$ agissant sans point fixe avec comme domaine fondamental un $4g$ -gone. À homéomorphisme près, la topologie de $\Sigma^2(g)$ ne dépend pas du choix d'un tel domaine fondamental. On prouve que $\Sigma^2(g) \cong \underbrace{T^2 \# \dots \# T^2}_{g\text{-fois}}$.

33.3. Formule d'Euler-Poincaré. — Toute cellulation de $\Sigma^2(g)$ vérifie la formule (E-P) dans laquelle le symbole $\#$ signifie *nombre de* :

$$\boxed{\text{(E-P)} \quad \# \text{ sommets} - \# \text{ arêtes} + \# \text{ faces} = 2 - 2g}$$

Par *cellulation* on entend la donnée d'un graphe tracé sur la surface dont les composantes connexes du complémentaire (aussi appelées *faces*) sont des *cellules*, c'est-à-dire qu'elles sont homéomorphes au disque ouvert. Si chaque cellule a trois côtés (triangle), on dit que la cellulation est une *triangulation*.

Esquisse de la démonstration. —

- (E-P) est vraie pour la cellulation donnée par le domaine fondamental. En effet sur le quotient on voit 1 sommet, $2g$ arêtes et 1 face.
- Invariance par subdivision : si, partant d'une cellulation pour laquelle (E-P) est vraie, on ajoute un sommet v dans une face F et si on joint v à chaque sommet de F , on fabrique une nouvelle cellulation pour laquelle la formule est encore vraie.
- Et, réciproquement, si (E-P) est vraie pour la cellulation subdivisée, elle est vraie pour la cellulation initiale.
- Une triangulation géodésique (toutes les arêtes sont des géodésiques) et la cellulation par le domaine fondamental ont une subdivision commune qui est une triangulation géodésique. Alors, d'après les points précédents, (E-P) est vraie pour toutes les triangulations géodésiques. Le cas général s'en déduit maintenant sans grand peine.

□

34. Classification des surfaces compactes non-orientables

34.1. — Les surfaces compactes non-orientables à bord vide sont (à homéomorphisme près) :

- Le plan projectif P^2 ,
- La bouteille de Klein K^2 ,
- La somme connexe $\underbrace{P^2 \# \dots \# P^2}_{k\text{-fois}}$.

34.2. Formule d'Euler-Poincaré. — Pour toute cellulation de l'une de ces surfaces non-orientables, la formule d'Euler-Poincaré s'écrit :

$$\boxed{\# \text{ sommets} - \# \text{ arêtes} + \# \text{ faces} = 2 - k}$$

UNIVERSITÉ DE NANTES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Maîtrise : Topologie Algébrique

François Laudenbach (CM) & Friedrich Wagemann (TD)

td8

Travaux dirigés de Mathématiques, Fiche 10, Topologie algébrique
2005-2006

Exercices divers.

10.1. Exercice. — Soit $f : X \rightarrow X'$ un homomorphisme de revêtements $p : X \rightarrow B$, $p' : X' \rightarrow B$ connexes et localement connexes par arcs. Supposons que f est un homéomorphisme sur une fibre, i.e. $f : p^{-1}(b) \rightarrow (p')^{-1}(b)$ est un homéomorphisme pour un $b \in B$. Montrer que f est un isomorphisme de revêtements.

Indication Corrigé

10.2. Exercice. — Si on note $\lambda := (z_1, z_2, z_3, z_4)$ le birapport des quatre points z_1, z_2, z_3, z_4 , étudier l'effet d'une permutation de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ sur λ .

- 1) Montrer que les transpositions $(1, 2)$ et $(3, 4)$ envoient λ sur $1/\lambda$.
- 2) Montrer que les transpositions $(1, 3)$ ou $(2, 4)$ envoient λ sur $\lambda/(\lambda - 1)$.
- 3) Montrer que les transpositions $(1, 4)$ ou $(2, 3)$ envoient λ sur $1 - \lambda$.

Indication Corrigé

10.3. Exercice. — En prenant comme quatre points du birapport les valeurs $f(x)$, $f(x + \epsilon)$, $f(x + 2\epsilon)$, $f(x + 3\epsilon)$ d'une fonction analytique f , montrer que le développement limité du birapport est

$$(f(x), f(x + \epsilon), f(x + 2\epsilon), f(x + 3\epsilon)) = \frac{4}{3} + \frac{\epsilon^2}{9} S(f)(x) + O(\epsilon^2).$$

Ici, $S(f)$ est la *dérivée schwartzienne* de f :

$$S(f) = 2\frac{f'''}{f'} - \frac{(f'')^2}{(f')^2}.$$

Indication Corrigé

10.4. Exercice. — Soit R l'espace topologique suivant

$$R = \{(X, Y) \in (\mathbb{R}^3)^2 \mid X \cdot Y = 0 \quad \|X\| = \|Y\| = 1\}.$$

(1) Montrer que R est homéomorphe à $SO(3, \mathbb{R})$. Rappeler le groupe fondamental de $SO(3, \mathbb{R})$ (donc de R).

(2) Démontrer que R n'est pas homéomorphe au produit $S^2 \times S^1$. En déduire que la projection de R sur S^2 donnée par le premier vecteur n'admet aucune section continue.

(3) Montrer que tout champs de vecteurs tangents continu sur S^2 s'annule.

(4) Soit maintenant S^n avec n impair. Montrer qu'il existe un champs de vecteurs tangents continu sur S^n qui ne s'annule en aucun point.

(En fait, S^n possède un tel champs si et seulement si n est impair.)

Indication Corrigé

10.5. Exercice. — Soit (X, p, B) un revêtement connexe localement connexe par arcs. Montrer que (X, p, B) est galoisien si et seulement si la condition suivante est remplie : pour tout $f : [0, 1] \rightarrow B$ continu avec $f(0) = f(1)$, soit tout relèvement de f est un lacet, soit aucun.

Indication Corrigé

10.6. Exercice. — Soit (X, p, B) un revêtement, X connexe et localement connexe par arcs, $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ continu avec $\gamma(0) = b_0$, $x_i, x_j \in p^{-1}(b_0)$ et $\tilde{\gamma}_i, \tilde{\gamma}_j$ les relèvements de γ en x_i et x_j . Montrer que γ a des points doubles si et seulement si soit il existe un relèvement avec points doubles, soit il existe i, j ($i \neq j$) tels que $\tilde{\gamma}_i([0, 1]) \cap \tilde{\gamma}_j([0, 1]) \neq \emptyset$.

Indication Corrigé

10.7. Exercice. — Soit $h : S_1 \rightarrow S_2$ un homéomorphisme local entre deux surfaces S_1 et S_2 , pouvant avoir un bord. Montrer que h envoie l'intérieur

$int(S_1)$ de S_1 vers l'intérieur $int(S_2)$ de S_2 . En déduire que h envoie le bord ∂S_1 de S_1 dans le bord ∂S_2 de S_2 .

Indication Corrigé

UNIVERSITÉ DE NANTES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Maîtrise : Topologie Algébrique

François Laudenbach (CM) & Friedrich Wagemann (TD)

Exercices divers : indication pour les exercices.

10.1. Indication exercice. — **10.1** Se rappeler l'exercice 4.6.

Énoncé Corrigé

10.2. Indication exercice. — **10.2** Se rappeler que $(\infty, 0, 1, g(z_4)) = g(z_4)$ pour une homographie g , que le birapport est invariant par homographie, et qu'il existe une unique homographie qui envoie un triple de points donné sur $(\infty, 0, 1)$.

Énoncé Corrigé

10.3. Indication exercice. — **10.3** Cet exercice est très calculatoire.

Énoncé Corrigé

10.4. Indication exercice. — **10.4** 1) Identifier des éléments de $SO(3)$ à des repères orthonormés directs dans \mathbb{R}^3 . Montrer que $SO(3)$ est homéomorphe à $\mathbb{R}P^2$ afin d'en déduire le groupe fondamental de R . Pour cela, on peut étudier le revêtement $SU(2) \rightarrow SO(3)$ obtenu en quotientant le groupe $SU(2)$ par le sous-groupe distingué $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ d'un côté, et se rappeler $\mathbb{R}P^2 \approx S^2 / \{\pm 1\}$ de l'autre.

Énoncé Corrigé

10.4 2) Le groupe fondamental est un invariant d'homéomorphisme.

Énoncé Corrigé

10.4 3) En général, un *champs de vecteurs tangent continu* à une variété est une application continue $t : M \rightarrow TM$ qui à tout point $m \in M$ de la variété M associe un vecteur tangent $t(m) = X_m \in T_m M$. Dans le cas de la sphère S^2 , un vecteur tangent en $X \in S^2$ est simplement un vecteur Y de l'espace ambiant \mathbb{R}^3 qui est orthogonal à X .

Énoncé Corrigé

10.4 4) On peut écrire directement un tel champs.

Énoncé Corrigé

10.5. Indication exercice. — **10.5** Soit réciproquement $p : X \rightarrow B$ non galoisien, i.e. il existe $\gamma \in \pi_1(B, b_0) =: G$ et $\alpha \in p_*\pi_1(X, x_0) =: H$ avec $\gamma\alpha\gamma^{-1} \notin H$. Remarquer que α se relève en lacet en x_0 .

Énoncé Corrigé

10.6. Indication exercice. — **10.6** L'existence d'un point double équivaut à l'existence d'un lacet qui se relève ou non en lacet.

Énoncé Corrigé

10.7. Indication exercice. — **10.7** Cet exercice est proche de la proposition 30.6 du cours.

Énoncé Corrigé

UNIVERSITÉ DE NANTES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Maîtrise : Topologie Algébrique

François Laudénbach (CM) & Friedrich Wagemann (TD)

Travaux dirigés de Mathématiques, Fiche 10, Topologie algébrique
2005-2006

Exercices divers : solutions.

10.1. Corrigé exercice. — Cet exercice se déduit de l'exo 4.6 : d'abord, par 3.1 et 4.5, f est surjective. Par connexité de la base, le nombre de feuillets du revêtement $f : X \rightarrow Y$ est constante, et par hypothèse donc égal à 1, donc c'est un homéomorphisme.

Énoncé Indication

10.2. Corrigé exercice. — On raisonne comme suit : soit g l'unique homographie qui envoie (z_1, z_2, z_3) sur $(\infty, 0, 1)$. Puisque le birapport est invariant par homographie, on a $\lambda = (z_1, z_2, z_3, z_4) = (g(z_1), g(z_2), g(z_3), g(z_4)) = (\infty, 0, 1, g(z_4)) = g(z_4)$. On en déduit que

$$(z_2, z_1, z_3, z_4) = (g(z_2), g(z_1), g(z_3), g(z_4)) = (0, \infty, 1, \lambda) = \frac{1}{\lambda}.$$

Le même type de raisonnement montre les autres assertions.

Énoncé Indication

10.3. Corrigé exercice. — Soit donc f une fonction analytique. On développe

$$f(x + \epsilon) = f(x) + \epsilon f'(x) + \frac{\epsilon^2}{2} f''(x) + \frac{\epsilon^3}{6} f'''(x) + o(\epsilon^4),$$

$$f(x + 2\epsilon) = f(x) + 2\epsilon f'(x) + 2\epsilon^2 f''(x) + \frac{4\epsilon^3}{3} f'''(x) + o(\epsilon^4),$$

$$f(x + 3\epsilon) = f(x) + 3\epsilon f'(x) + \frac{9\epsilon^2}{2} f''(x) + \frac{9\epsilon^3}{2} f'''(x) + o(\epsilon^4).$$

On calcule

$$f(x) - f(x + 2\epsilon) = -2\epsilon f'(x) - 2\epsilon^2 f''(x) - \frac{4\epsilon^3}{3} f'''(x) + o(\epsilon^4),$$

$$f(x + \epsilon) - f(x + 3\epsilon) = -2\epsilon f'(x) - 4\epsilon^2 f''(x) - \frac{13\epsilon^3}{3} f'''(x) + o(\epsilon^4),$$

$$f(x + \epsilon) - f(x + 2\epsilon) = -\epsilon f'(x) - \frac{3\epsilon^2}{2} f''(x) - \frac{7\epsilon^3}{6} f'''(x) + o(\epsilon^4),$$

$$f(x) - f(x + 3\epsilon) = -3\epsilon f'(x) - \frac{9\epsilon^2}{2} f''(x) - \frac{9\epsilon^3}{2} f'''(x) + o(\epsilon^4).$$

On en déduit donc que $(f(x), f(x + \epsilon), f(x + 2\epsilon), f(x + 3\epsilon))$ est égal à

$$\begin{aligned} &= \frac{(f(x + 2\epsilon) - f(x))(f(x + 3\epsilon) - f(x + \epsilon))}{(f(x + 2\epsilon) - f(x + \epsilon))(f(x + 3\epsilon) - f(x))} \\ &= \frac{(2\epsilon f'(x) + 2\epsilon^2 f''(x) + \frac{4\epsilon^3}{3} f'''(x))(2\epsilon f'(x) + 4\epsilon^2 f''(x) + \frac{13\epsilon^3}{3} f'''(x)) + o(\epsilon^4)}{(\epsilon f'(x) + \frac{3\epsilon^2}{2} f''(x) + \frac{7\epsilon^3}{6} f'''(x))(3\epsilon f'(x) + \frac{9\epsilon^2}{2} f''(x) + \frac{9\epsilon^3}{2} f'''(x)) + o(\epsilon^4)} \\ &= \frac{4}{3} \left[1 - \frac{\epsilon^2}{6} \left(\frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2 \right) \right] + o(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Énoncé Indication

10.4. Corrigé exercice. — (1) $(X, Y) \in R$ implique l'existence d'un unique $Z \in \mathbb{R}^3$ de norme 1 tel que (X, Y, Z) soit un repère orthonormé direct de \mathbb{R}^3 . En effet, il suffit de prendre $Z = X \wedge Y$. D'un autre côté, $SO(3)$ est bien en bijection avec les repères orthonormés directs de \mathbb{R}^3 . Soit donc $p : SO(3) \rightarrow R$ la projection sur les deux premiers vecteurs colonne. p est une bijection continue de compact sur séparé, donc un homéomorphisme.

Montrons que $SO(3)$ est homéomorphe à $\mathbb{R}P^2$ afin d'en déduire le groupe fondamental de R . Pour cela, il faut déjà étudier le revêtement $SU(2) \rightarrow SO(3)$ (cf exo 2.9) obtenu en quotientant le groupe $SU(2)$ par le sous-groupe distingué $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$. On voit facilement que c'est un homéomorphisme local (sur un ouvert $U \subset SU(2)$ avec $-A \notin U$ pour tout $A \in U$, la projection est un homéomorphisme).

$$SU(2) \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$$

s'identifie à S^3 , en particulier, $SU(2)$ est compact. On a donc un homéomorphisme local de compact sur séparé qui est par suite un revêtement. Ce dernier

s'identifie visiblement au revêtement $S^3 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ obtenu en quotientant par l'involution antipodale. On conclut que $SO(3) \approx \mathbb{R}P^2$, et finalement que le groupe fondamental de R est $\pi_1(R, x_0) = \mathbb{Z}_2$.

Énoncé Indication

10.4 (2) Le groupe fondamental de $S^2 \times S^1$ est $\pi_1(S^2 \times S^1, z_0) = \mathbb{Z}$, donc R ne peut pas être homéomorphe à $S^1 \times S^2$. S'il existait une section continue $s : S^2 \rightarrow R$ de la projection $\text{proj}_1 : R \rightarrow S^2$, i.e. $p \circ s = \text{id}_{S^2}$, alors on pourrait construire un homéomorphisme $S^2 \times S^1 \rightarrow R$. En effet, soit $f : S^2 \times S^1 \rightarrow R$ défini par $f(X, z) = (X, z \text{proj}_2(s(X)))$. $\text{proj}_2(s(X))$ est un vecteur de norme 1 orthogonal à X . La multiplication scalaire $z \text{proj}_2(s(X))$ fait "tourner" le vecteur $\text{proj}_2(s(X))$ dans le plan orthogonal à X . On vérifie facilement que f est continue et bijective. On conclut que f serait un homéomorphisme, si s était continue.

Énoncé Indication

10.4 (3) En général, un *champs de vecteurs tangent continu* à une variété est une application continue $t : M \rightarrow TM$ qui à tout point $m \in M$ de la variété M associe un vecteur tangent $t(m) = X_m \in T_m M$. Dans le cas de la sphère S^2 , un vecteur tangent en $X \in S^2$ est simplement un vecteur Y de l'espace ambiant \mathbb{R}^3 qui est orthogonal à X . Notons R' l'espace des couples (X, Y) où $X \in S^2$ et Y orthogonal à X . Un champs de vecteurs sur S^2 est donc une application continue $\tilde{s} : S^2 \rightarrow R'$ telle que la projection sur la première composante donne le point d'attache du vecteur tangent, i.e. \tilde{s} est une section continue de la projection $\text{proj}_1 : R' \rightarrow S^2$. S'il existait un champs de vecteurs tangent à S^2 qui est partout non-nulle, alors on pourrait normaliser la deuxième composante de l'application \tilde{s} afin d'obtenir une section continue $s : S^2 \rightarrow R$ – contradiction.

Énoncé Indication

10.4 (4) Pour $n = 1$, l'assertion est clair : il suffit de prendre un vecteur orthogonal au cercle unité dans \mathbb{C} , de le normaliser, et de le tourner ensuite autour de S^1 pour obtenir un champs tangent continu.

Soit donc dans le cas général $n = 2m - 1$. Alors l'application continue

$$(x_1, x_2, \dots, x_{2m-1}, x_{2m}) \mapsto ((x_1, x_2, \dots, x_{2m-1}, x_{2m}), (-x_2, x_1, \dots, -x_{2m}, x_{2m-1}))$$

est un champs de vecteurs qui convient.

Énoncé Indication

10.5. Corrigé exercice. — Soit $p : X \rightarrow B$ galoisien. Supposons qu'il existe un relèvement \tilde{f} de f qui est un lacet, disons en $x_0 \in p^{-1}(b_0)$. Soit $x \in p^{-1}(b_0)$. Il existe un automorphisme $h : X \rightarrow X$ tel que $h(x_0) = x$ par hypothèse. $h \circ \tilde{f}$ est un relèvement de f en x , car $p(h \circ \tilde{f}) = p \circ \tilde{f} = f$, et c'est un lacet.

Supposons réciproquement $p : X \rightarrow B$ non galoisien, i.e. il existe $\gamma \in \pi_1(B, b_0) =: G$ et $\alpha \in p_{\sharp}\pi_1(X, x_0) =: H$ avec $\gamma\alpha\gamma^{-1} \notin H$. D'un côté, un relèvement en lacet de $\gamma\alpha\gamma^{-1}$ en x_0 serait un $\beta \in H$ avec $p_{\sharp}\beta = \gamma\alpha\gamma^{-1}$, ce que interdit l'hypothèse. D'un autre côté, α se relève en lacet en x_0 , puisque $\alpha \in H$. Donc si on relève γ en un point x_1 en $\tilde{\gamma}^{x_1}$ tel que $\tilde{\gamma}^{x_1}(1) = x_0$, alors on aura un relèvement en lacet de $\gamma\alpha\gamma^{-1}$ en x_1 , pourvu que $\tilde{\gamma}^{-1 x_0}(1) = x_1$. Montrons donc cette dernière assertion : en effet, $c_{b_0}^{x_0} = \widetilde{\gamma^{-1} \gamma}^{x_0} = \widetilde{\gamma^{-1}}^{x_0} \tilde{\gamma}^x$ où on a noté $x := \widetilde{\gamma^{-1} x_0}(1)$. Or $\tilde{\gamma}^x(1) = x_0$, et par suite $\tilde{\gamma}^x(0) = x = x_1 = \widetilde{\gamma^{-1} x_0}(1)$. Montrons encore pour le lecteur dubitatif $\widetilde{\alpha\beta} = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}$ où les relèvements sont tels que $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(0)$, $\widetilde{\alpha\beta}(0) = \tilde{\alpha}(0)$, et $\widetilde{\alpha\beta}(1) = \tilde{\beta}(1)$. En effet, $(\tilde{\alpha})^{-1}\widetilde{\alpha\beta}(\tilde{\beta})^{-1} =: \zeta$ vérifie $p_{\sharp}(\zeta) = c_{b_0}$, car p_{\sharp} est un homomorphisme de groupes, et par suite $\zeta = c_{\tilde{\alpha}(0)}$.

Énoncé Indication

10.6. Corrigé exercice. — Si γ a des point doubles, il existe $t_0, t_1 \in [0, 1]$ avec $\gamma(t_1) = \gamma(t_0) = b_1$. Notons $\beta = \gamma|_{[t_0, t_1]}$ le lacet basé en b_1 , et $\lambda = \gamma|_{[0, t_0]}$ le chemin de b_0 à b_1 . Si β se relève en lacet, alors $\tilde{\gamma}$ possède des points doubles. Supposons donc que β ne se relève pas en lacet. Alors $\lambda\beta\lambda^{-1}$ n'est pas homotope à zéro. En effet, $\lambda\beta\lambda^{-1} \sim 0$ implique $\beta \sim 0$, et donc que β se relèverait en lacet. On relève donc en $\tilde{\lambda}\tilde{\beta}\widetilde{\lambda^{-1}}$; soient $\tilde{\lambda}$ un chemin de x_0 à y_0 , et $\widetilde{\lambda^{-1}}$ un chemin de y_1 à x_1 . Le relèvement de γ en x_1 est obligé de passer par y_1 . Le relèvement de γ en x_0 est obligé de passer par y_1 . Donc $y_1 \in \tilde{\gamma}_1([0, 1]) \cap \tilde{\gamma}_0([0, 1])$.

S'il existe réciproquement un relèvement $\tilde{\gamma}$ avec des points doubles, alors γ a des points doubles. S'il existe d'un autre côté $\tilde{\gamma}_i$ et $\tilde{\gamma}_j$ ($i \neq j$) avec $\tilde{\gamma}_i([0, 1]) \cap \tilde{\gamma}_j([0, 1]) \neq \emptyset$, alors il existe t_0, t_1 avec $\tilde{\gamma}_i(t_0) = \tilde{\gamma}_j(t_1)$, et par suite $\gamma(t_0) = p \circ \tilde{\gamma}_i(t_0) = p \circ \tilde{\gamma}_j(t_1) = \gamma(t_1)$. Donc γ possède un point double.

Énoncé Indication

10.7. Corrigé exercice. — Soit $x \in \int(S_1)$. Il existe un voisinage ouvert U de x dans S_1 tel que $h|_U$ soit un homéomorphisme sur l'ouvert $h(U)$. Quitte à passer à une intersection, on peut prendre U tel que U soit homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^2 par un homéomorphisme $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$. Ainsi $h(U)$ est un voisinage ouvert de $h(x) \in S_2$ et $h \circ f^{-1}$ est un homéomorphisme d'un ouvert de \mathbb{R}^2 avec $h(U)$, donc $h(x) \in \int(S_2)$. On en déduit que h envoie le bord $\partial(S_1)$ dans le bord $\partial(S_2)$ de S_2 à l'aide de proposition 30.6 du cours.

Énoncé Indication

Index

AVERTISSEMENT.— Dans cette liste, une référence $n.m$ renvoie au paragraphe n et à la m -ème subdivision dans ce paragraphe, qui peut être une définition, une proposition, etc. ou un sous-paragraphe. Il est utile de savoir que les chapitres contiennent les paragraphes suivants :

- Chapitre I : §§ 1 - 6
- Chapitre II : §§ 7 - 11
- Chapitre III : §§ 12 - 14
- Chapitre IV : §§ 15 - 18
- Chapitre V : §§ 19 - 21
- Chapitre VI : §§ 22 - 24
- Chapitre VII : §§ 25 - 29
- Chapitre VIII : §§ 30 - 34

- Action (de groupe), 1.1
- Action libre, fidèle, effective, 2.6
- Action propre, 22.4
- Action sur un espace 1-connexe, 12.7
- Aire (hyperbolique), 28.1
- Alphabet, 15.1
- Automorphisme de revêtement, 21.5
- Birapport, 25.6
- Bord, 30.7
- Borsuk - Ulam (théorème de), 19.3
- Bouteille de Klein, 12.9
- Brouwer (Théorème de), 12.5
- Chemin, 10.1
- Classe à droite, 2.4
- Classification des revêtements, 20.4
- Compact, 4.1
- Condition (L), 8.5
- Contractile, Contraction, 10.5
- Coordonnées homogènes, 25.1
- Demi-plan de Poincaré, 25.3
- Disque unité (hyperbolique), 29.1

Distance hyperbolique, 26.4
Domaine de Dirichlet, 23.2
Domaine fondamental, 23.3
Élément de longueur, 26.1
Équivalence d'homotopie, 12.6
Etoilée (partie), 10.5
Exponentielle complexe, 7.1
Géodésique, 27.1
Graphe de Cayley, 13.4
Groupe alterné, 15.5
Groupe fondamental, 12.1
Groupe libre à deux générateurs, 13.1
Groupe libre sur un alphabet, 15.1
Groupe (de pavage), 22.1
Homotopie, 10.5
Isométrie (hyperbolique), 27.3
Lacet, 11.1
Lacet basé, 11.8
Lemme ε de Lebesgue, 4.2
Logarithme complexe, 7.3
Longueur (d'un mot), 13.3
Longueur (hyperbolique), 26.2
Nœud, 18.2
Orbite, 2.1
Orientation, 31.3
Orientable, 31.4
Pavage, 22.1
Polygone géodésique, idéal, 28.2
Propre (action), 22.4
Propre (application), 8.4
Proprement discontinu (groupe), 8.5
Quotient, 2.3
Recollements, 6, 6.4
Relèvement (théorème de), 10.2, 19.1
Relations, 15.3

Revêtement galoisien, régulier, 21.6
Simplement connexe, 11.1
Sphère de Riemann, 25.1
Suite exacte de revêtement, 14.2
Surface, 30.1
Surface à bord, 30.5
Stabilisateur, 2.6
Topologie, 3.1
Topologie discrète, 3.2
Topologie produit, 5.1
Van Kampen (premier théorème de), 17.1
Van Kampen (second théorème de), 18.1

FRANÇOIS LAUDENBACH & FRIEDRICH WAGEMANN, Département de mathématiques,
Université de Nantes, 2 Rue de la Houssinière, F-44322 Nantes Cedex 03
Url : www.math.campo.univ-nantes.fr