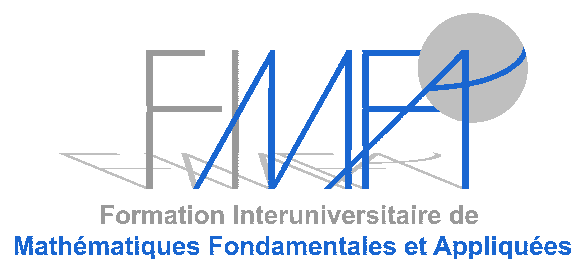


Topologie algébrique élémentaire

Frédéric Paulin

Version très préliminaire



Cours de première année de master

École Normale Supérieure

Année 2009-2010

Table des matières

1	Introduction	5
1.1	Exemples et applications	5
1.2	Remarques sur les prérequis de topologie	6
1.3	Remarques (pseudo-)historiques sur l'homologie	8
	Des arguments de connexité à la notion de bord	8
	Du bord topologique à son algébrisation	9
	La formulation axiomatique de l'homologie	10
	De l'homologie à l'homotopie	11
2	Homotopie et groupe fondamental	13
2.1	Homotopie	13
2.2	Groupe fondamental	15
2.3	Autres exercices	22
3	Revêtements	26
3.1	Catégorie des revêtements	26
3.2	Homéomorphismes locaux et revêtements	27
3.3	Actions de groupes topologiques	29
3.4	Actions de groupes et revêtements	33
3.5	Unicité des relèvements	35
3.6	Relèvement des chemins et des homotopies	36
3.7	Action sur la fibre du groupe fondamental de la base	38
3.8	Relèvement des applications	41
3.9	Structure des morphismes de revêtements	44
3.10	Revêtements galoisiens	48
3.11	Revêtements universels	49
3.12	Classification des revêtements	53
3.13	Autres exercices	56
3.14	Indications pour la résolution des exercices	58
4	Groupe fondamentaux, revêtements et CW-complexes	66
4.1	Propriétés universelles sur les groupes	66
	Groupe libre	66
	Groupes définis par générateurs et relations	68
	Somme amalgamée de groupes	69
	Formes normales dans les produits amalgamés	72
4.2	Le théorème de van Kampen	73
4.3	CW-complexes	76
4.4	Groupe fondamental des CW-complexes	81
	Groupe fondamental des graphes	83
	Groupe fondamental de CW-complexe et présentation de groupe	84
4.5	Applications des revêtements à la théorie des groupes	86
4.6	Autres exercices	87

5 Homologie singulière

Avant tout, voici une petite bibliographie légèrement commentée, ces commentaires ne reflétant bien sûr que les goûts partiels de l'auteur.

- *Références élémentaires et pédagogiques* : [GH] pour l'homologie et la cohomologie singulière (définition, vérification des axiomes, caractéristique d'Euler-Poincaré, orientation, cup et cap produit, dualité de Poincaré) et [God] pour la cohomologie de de Rham (définition, vérification des axiomes, inégalités de Morses, formule de Künneth, dualité par la théorie de Hodge).
- *Le pavé* : [Spa], un livre de référence, mais pas forcément d'apprentissage.
- *Des références historiques* : pour les amateurs de préhistoire, voir [Pon] ; on peut jeter un œil aux chapitres fondateurs de [Poi] sur l'analysis situs et ses compléments, c'est bien beau ; l'introduction de [Die2] est absolument à lire, le reste de [Die2] est presque aussi complet que [Spa] et presque aussi difficile à lire ; pour les origines de la cohomologie de de Rham, voir [DeR], pour les fondements axiomatiques de l'homologie, voir [ES, CE].
- *Des références pour tous les goûts* :
 - [Vic] pour l'homologie singulière (définition, vérification des axiomes, CW-complexes, théorème des coefficients universels, formule de Künneth, cup et cap produit, dualité de Poincaré, applications).
 - Sont vraiment pas mal non plus [Bre, Wal].
 - Voir [FFG] pour les aspects plus homotopiques et les magnifiques dessins érotiques.
 - En vrac : [BT] très complet sur la cohomologie de de Rham et de Čech ; [DNF] pour comprendre les choses de manière géométrique, à la russe.
- Enfin, et non des moindres, je recommande particulièrement le livre [Hat], qui couvre le contenu de tout ce cours. Suite à un arrangement de l'auteur avec son éditeur, il est possible de télécharger le livre à l'adresse <http://www.math.cornell.edu/~hatcher>

5.1 Un peu d'algèbre homologique

On renvoie par exemple à [Spa, ES, CE] pour des compléments d'algèbre homologique.

Soit \mathbb{A} un anneau commutatif unitaire. Par module, on entend module sur \mathbb{A} . On rappelle que les modules sur l'anneau \mathbb{Z} sont les groupes abéliens, et les modules sur un corps sont les espaces vectoriels. On rappelle qu'une suite finie ou infinie de morphismes de modules

$$\dots \rightarrow M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_{n+2} \rightarrow \dots$$

est *exacte* si $\ker f_{n+1} = \text{im } f_n$ pour tout n tel que f_{n+1} et f_n sont définis.

Complexes de chaînes et homologie de complexes de chaînes

Un *complexe de chaînes* $C = (C_*, \partial_*)$ est une suite de modules $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et de morphismes de modules $(\partial_{n+1} : C_{n+1} \rightarrow C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ pour tout entier n .

On posera souvent par convention $C_{-1} = 0$ et $\partial_0 = 0$. On notera par abus $\partial = \partial_n$ lorsque l'indice n est sous-entendu. On appelle les ∂_n les *morphismes de bord* (ou opérateurs bords) de C .

$$C_0 \xleftarrow{\partial} C_1 \xleftarrow{\partial} C_2 \xleftarrow{\partial} \dots \xleftarrow{\partial} C_{n-1} \xleftarrow{\partial} C_n \xleftarrow{\partial} \dots$$

Un *morphisme de complexes de chaînes* $\phi : C \rightarrow D$ est une suite de morphismes de modules $(\phi_n : C_n \rightarrow D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\phi_n \circ \partial_{n+1} = \partial_{n+1} \circ \phi_{n+1}$ pour tout entier n , ou autrement dit tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccccc} C_0 & \xleftarrow{\partial} & C_1 & \xleftarrow{\partial} & \dots & \xleftarrow{\partial} & C_{n-1} & \xleftarrow{\partial} & C_n & \xleftarrow{\partial} & \dots \\ \downarrow \phi_0 & & \downarrow \phi_1 & & \dots & & \downarrow \phi_{n-1} & & \downarrow \phi_n & & \dots \\ D_0 & \xleftarrow{\partial} & D_1 & \xleftarrow{\partial} & \dots & \xleftarrow{\partial} & D_{n-1} & \xleftarrow{\partial} & D_n & \xleftarrow{\partial} & \dots \end{array}$$

Si C est un complexe de chaînes, on appelle *morphisme identité*, et on note $id : C \rightarrow C$, le morphisme de complexes de chaînes ($id : C_n \rightarrow C_n$) $_{n \in \mathbb{N}}$. Si $\phi : C \rightarrow D$ et $\psi : D \rightarrow E$ sont des morphismes de complexes de chaînes, on appelle *morphisme composé*, et on note $\psi \circ \phi : C \rightarrow E$, le morphisme de complexes de chaînes $(\psi_n \circ \phi_n : C_n \rightarrow E_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Si C est un complexe de chaînes, le sous-module de C_n

$$Z_n(C) = \ker(\partial : C_n \rightarrow C_{n-1})$$

est appelé l'*espace des n -cycles*, le sous-module de C_n

$$B_n(C) = \text{im}(\partial : C_{n+1} \rightarrow C_n)$$

est appelé l'*espace des n -bords*, et le module quotient

$$H_n(C) = Z_n(C)/B_n(C)$$

est appelé le *n -ème groupe d'homologie* de C . Il s'agit là de la terminologie usuelle, l'ensemble $H_n(C)$ étant bien sûr muni de sa structure de module sur \mathbb{A} . Il sera aussi noté $H_*(C)$ lorsque l'on ne veut pas préciser la valeur de $*$ dans \mathbb{N} , ou parfois si l'on considère la somme directe des $H_n(C)$. Si c est un n -cycle, on note souvent $[c]$ son image dans $H_n(C)$.

Ce module mesure l'obstruction d'un cycle à être un bord (un n -cycle étant un bord si et seulement si son image dans $H_n(C)$ est nulle), ou l'obstruction de la suite

$$C_0 \xleftarrow{\partial} C_1 \xleftarrow{\partial} C_2 \xleftarrow{\partial} \dots \xleftarrow{\partial} C_n \xleftarrow{\partial} C_{n+1} \xleftarrow{\partial} \dots$$

à être exacte (i.e. à vérifier $\ker \partial_n = \text{im } \partial_{n+1}$ pour tout n).

Un morphisme de complexes de chaînes $\phi : C \rightarrow D$ envoie cycles sur cycles et bords sur bords en chaque degré, donc induit, pour tout entier n , un morphisme de modules

$$\boxed{\phi_* : H_n(C) \rightarrow H_n(D)}.$$

Le résultat suivant donne un critère pour savoir si deux morphismes de complexes de chaînes induisent les mêmes applications en homologie.

Soient $\phi, \psi : C \rightarrow D$ deux morphismes de complexes de chaînes. Une *homotopie* entre ϕ et ψ est une suite de morphismes de modules $(K_n : C_n \rightarrow D_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout entier n , en posant $K_{-1} = 0$,

$$\phi_n - \psi_n = \partial_{n+1} \circ K_n + K_{n-1} \circ \partial_n.$$

Le diagramme suivant n'est pas commutatif, mais il est là pour montrer dans quel sens vont les flèches.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & C_{n-1} & \xleftarrow{\partial} & C_n & \xleftarrow{\partial} & C_{n+1} & \dots \\ & & \searrow^{K_{n-1}} & \phi \downarrow \downarrow \psi & \searrow^{K_n} & & \\ \dots & D_{n-1} & \xleftarrow{\partial} & D_n & \xleftarrow{\partial} & D_{n+1} & \dots \end{array}$$

Proposition 5.1 Soient $\phi, \psi : C \rightarrow D$ deux morphismes de complexes de chaînes. S'il existe une homotopie entre ϕ et ψ , alors

$$\phi_* = \psi_* : H_*(C) \rightarrow H_*(D).$$

Démonstration. Si c est un cycle de C_n , alors $\phi_n(c) - \psi_n(c) = \partial(K_n(c))$, donc les classes $[\phi_n(c)]$ et $[\psi_n(c)]$ sont égales dans $H_n(D)$. \square

Suite exacte longue d'homologie

Une *suite exacte* (courte) de complexes de chaînes est la donnée notée

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$$

de complexes de chaînes C, D, E et de morphismes de complexes de chaînes $f : C \rightarrow D, g : D \rightarrow E$ tels que pour tout n , la suite de morphismes de modules

$$0 \longrightarrow C_n \xrightarrow{f_n} D_n \xrightarrow{g_n} E_n \longrightarrow 0$$

est exacte.

Étant données deux suites exactes de complexes de chaînes, un *morphisme de suites exactes de complexes de chaînes* est un triplet (α, β, γ) de morphismes de complexes de chaînes tel que le diagramme suivant est commutatif en tout degré n :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{f} & D & \xrightarrow{g} & E & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & C' & \xrightarrow{f'} & D' & \xrightarrow{g'} & E' & \longrightarrow & 0 \end{array} .$$

On appelle *morphisme identité* le morphisme de suites exactes de complexes de chaînes (id, id, id) . On appelle *morphisme composé* des morphismes de suites exactes de complexes de chaînes (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$ le morphisme de suites exactes de complexes de chaînes $(\alpha' \circ \alpha, \beta' \circ \beta, \gamma' \circ \gamma)$.

Théorème 5.2 Si $0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$ est une suite exacte (courte) de complexes de chaînes, il existe une suite exacte (longue) de modules

$$\dots \longrightarrow H_{n+1}(E) \xrightarrow{\delta} H_n(C) \xrightarrow{f_*} H_n(D) \xrightarrow{g_*} H_n(E) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(C) \longrightarrow \dots$$

telle que si (α, β, γ) est un morphisme de suites exactes de complexes de chaînes comme ci-dessus, alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_n(C) & \xrightarrow{f_*} & H_n(D) & \xrightarrow{g_*} & H_n(E) & \xrightarrow{\delta} & H_{n-1}(C) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow \alpha_* & & \downarrow \beta_* & & \downarrow \gamma_* & & \downarrow \alpha_* & & \\ \dots & \longrightarrow & H_n(C') & \xrightarrow{f'_*} & H_n(D') & \xrightarrow{g'_*} & H_n(E') & \xrightarrow{\delta} & H_{n-1}(C') & \longrightarrow & \dots \end{array} .$$

Démonstration. (1) Construisons tout d'abord le morphisme $\delta : H_n(E) \rightarrow H_{n-1}(C)$. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ 0 & \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{f_n} & D_n & \xrightarrow{g_n} & E_n & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\ 0 & \longrightarrow & C_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & D_{n-1} & \xrightarrow{g_{n-1}} & E_{n-1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \end{array} .$$

Soit z un n -cycle de E . Il s'agit de lui associer un $(n-1)$ -cycle x de C (bien défini modulo un bord). Comme g_n est surjective, il existe $y \in D_n$ tel que $g_n(y) = z$. On considère $\partial y \in D_{n-1}$. Comme $g_{n-1}(\partial y) = \partial g_n(y) = \partial z = 0$, par exactitude, il existe $x \in C_{n-1}$ tel que $f_{n-1}(x) = \partial y$. On pose donc

$$\delta[z] = [x].$$

Vérifions que δ est bien défini. Tout d'abord, x est bien un cycle, car

$$f_{n-2}(\partial x) = \partial f_{n-1}(x) = \partial \partial y = 0,$$

et comme f_{n-2} est injective, on en déduit que $\partial x = 0$.

De plus, $[x]$ ne dépend pas des choix du représentant x de $[z]$ et des éléments y, x comme ci-dessus. En effet, si (z', y', x') est un autre choix, alors comme $[z'] = [z]$, on a $z' - z = \partial z''$ avec $z'' \in E_{n+1}$. Soit $y'' \in D_{n+1}$ tel que $z'' = g_{n+1}(y'')$, qui existe par surjectivité de g_{n+1} . Alors

$$g_n(y' - y - \partial y'') = z' - z - \partial z'' = 0,$$

donc par exactitude, il existe $x'' \in C_n$ tel que $y' - y - \partial y'' = f_n(x'')$. Comme

$$f_{n-1}(x' - x - \partial x'') = \partial y' - \partial y - \partial f_n(x'') = \partial \partial y'' = 0,$$

par injectivité de f_{n-1} , on a $x' = x + \partial x''$, donc $[x'] = [x]$.

(2) Vérifions l'exactitude au niveau de $H_n(D)$.

Comme $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = 0$, on a $\text{im } f_* \subset \ker g_*$.

Réciproquement, soit $[y] \in \ker g_*$. Comme $0 = g_*([y]) = [g_n(y)]$, il existe $z \in E_{n+1}$ tel que $g_n(y) = \partial z$. Par surjectivité de g_{n+1} , il existe $y' \in D_{n+1}$ tel que $z = g_{n+1}(y')$. Comme $g_n(y - \partial y') = 0$, par exactitude, il existe $x \in C_n$ tel que $y - \partial y' = f_n(x)$. De plus, x est un cycle, car

$$f_{n-1}(\partial x) = \partial f_n(x) = \partial y - \partial \partial y' = 0$$

car y est un cycle. Enfin, $f_*([x]) = [f_n(x)] = [y]$, donc $[y] \in \text{im } f_*$.

(3) Vérifions l'exactitude au niveau de $H_n(E)$.

Montrons que $\text{im } g_* \subset \ker \delta$. Si y est un n -cycle de D , par construction de δ , on a $\delta([g_n(y)]) = [x]$ où $f_{n-1}(x) = \partial y$. Comme y est un cycle et f_{n-1} est injective, on a donc $\delta \circ g_* = 0$, ce qui prouve le résultat.

Réciproquement, montrons que $\ker \delta \subset \text{im } g_*$. Soit z un n -cycle de E tel que $\delta([z]) = 0$. Par construction, il existe $y \in D_n$ et $x \in C_{n-1}$ tels que $z = g_n(y)$ et $f_{n-1}(x) = \partial y$ et $[x] = \delta([z]) = 0$. Soit $x' \in C_n$ tel que $x = \partial x'$. On pose $y' = y - f_n(x')$, qui est un n -cycle de D . Alors $g_n(y') = z$, donc $g_*([y']) = [z]$, ce qui montre le résultat.

Les autres vérifications sont laissées en exercice. \square

Caractéristique d'Euler-Poincaré d'un complexe de chaînes

Dans cette partie, on suppose que \mathbb{A} est un corps. Soit C un complexe de chaînes. On note β_k la dimension sur \mathbb{A} de l'espace vectoriel $H_k(C)$, qui s'appelle le k -ème nombre de Betti de C . Si les β_k sont finis pour tout k et nuls pour k assez grand, alors on pose

$$\chi(C) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \beta_k,$$

que l'on appelle la *caractéristique d'Euler-Poincaré* de C .

Proposition 5.3 Si C est complexe de chaînes, si la dimension γ_k de l'espace vectoriel C_k est finie pour tout k et nulle pour k assez grand, alors

$$\chi(C) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \gamma_k.$$

Démonstration. En posant $Z_k = Z_k(C)$ et $B_k = B_k(C)$, comme $\gamma_k = \dim B_{k-1} + \dim Z_k$, les hypothèses entraînent que $\beta_k = \dim Z_k - \dim B_k$ est fini, et nul pour k assez grand. En particulier $\chi(C)$ est bien définie. Comme $\beta_k - \gamma_k = -(\dim B_k + \dim B_{k-1})$, une sommation alternée donne le résultat. \square

Complexes de cochaînes, cohomologie, suite exacte longue de cohomologie

Un *complexe de cochaînes* $C = (C^*, \partial^*)$ est une suite de modules $(C^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et de morphismes de modules $(\partial^n : C^n \rightarrow C^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ tels que $\partial^{n+1} \circ \partial^n = 0$ pour tout entier n . Les ∂^n sont appelés *morphismes de cobord* (ou différentielles), et notés ∂ quand n est sous-entendu. On pose par convention $C^{-1} = 0$ et $\partial^{-1} = 0$.

$$C^0 \xrightarrow{\partial} C^1 \xrightarrow{\partial} C^2 \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C^n \xrightarrow{\partial} C^{n+1} \xrightarrow{\partial} \dots$$

On définit de même

- un *morphisme de complexes de cochaînes* $f : C \rightarrow D$, qui est une suite de morphismes de modules $(f^n : C^n \rightarrow D^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que $f^{n+1} \circ \partial^n = \partial^n \circ f^n$ pour tout entier n ;
- l'*espace des n -cocycles* $Z^n(C) = \ker(\partial : C^n \rightarrow C^{n+1})$, l'*espace des n -cobords* $B^n(C) = \text{im}(\partial : C^{n-1} \rightarrow C^n)$, le *n -ème groupe de cohomologie* de C (qui est un module) $H^n(C) = Z^n(C)/B^n(C)$;
- l'application $f^* : H^n(C) \rightarrow H^n(D)$ induite en cohomologie par un morphisme de complexes de cochaînes $f : C \rightarrow D$ (avec $f^*([z]) = [f^n(z)]$ si z est un n -cocycle de D);
- une homotopie entre complexes de cochaînes;
- la caractéristique d'Euler-Poincaré d'un complexes de cochaînes;
- une suite exacte courte de complexes de cochaînes;
- un morphisme de suites exactes courtes de complexes de cochaînes;
- la suite exacte longue de cohomologie associée à une suite exacte courte de complexes de cochaînes (dont l'énoncé précis suit).

Théorème 5.4 Si $0 \rightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \rightarrow 0$ est une suite exacte courte de complexes de cochaînes, il existe une suite exacte longue de modules

$$\dots \rightarrow H^{n-1}(E) \xrightarrow{\delta} H^n(C) \xrightarrow{f^*} H^n(D) \xrightarrow{g^*} H^n(E) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(C) \rightarrow \dots$$

telle que si (α, β, γ) est un morphisme de suites exactes de complexes de cochaînes, alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \rightarrow & H^n(C) & \xrightarrow{f^*} & H^n(D) & \xrightarrow{g^*} & H^n(E) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(C) & \rightarrow & \dots \\ & & \downarrow \alpha^* & & \downarrow \beta^* & & \downarrow \gamma^* & & \downarrow \alpha_* & & \\ \dots & \rightarrow & H^n(C') & \xrightarrow{f'^*} & H^n(D') & \xrightarrow{g'^*} & H^n(E') & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(C') & \rightarrow & \dots \end{array} \quad \square$$

Catégories et foncteurs

Une *catégorie* est la donnée

1. d'une collection d'ensembles (appelés *objets*),
2. pour tout couple d'objets (X, Y) d'un ensemble $\text{Mor}(X, Y)$ (dont les éléments sont appelés les *morphismes*),
3. pour tout triplet d'objets (X, Y, Z) d'une application

$$\text{Mor}(X, Y) \times \text{Mor}(Y, Z) \rightarrow \text{Mor}(X, Z)$$

appelée *composition* et notée $(f, g) \mapsto g \circ f$,

vérifiant les propriétés suivantes :

- a) associativité : $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ pour tous f, g, h ,
- b) existence d'éléments neutres : pour tout objet X , il existe un élément i_X dans $\text{hom}(X, X)$ tel que $i_X \circ f = f$ et $f \circ i_X = f$ pour tout f .

Un tel élément neutre i_X est unique. Un morphisme $f \in \text{Mor}(X, Y)$ est appelé un *isomorphisme* s'il existe un morphisme $g \in \text{Mor}(Y, X)$ tel que $g \circ f = \text{id}_X$ et $f \circ g = \text{id}_Y$. Un isomorphisme d'un objet X dans lui-même est appelé un *automorphisme*. Deux objets sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme entre eux. « Être isomorphe à » est une relation d'équivalence sur tout ensemble d'objets d'une catégorie.

On donne ci-dessous une liste d'exemples, dont de nombreux sont construits dans ce cours, en ne précisant pas la composition si elle est évidente, et en laissant les vérifications des propriétés a), b) au lecteur.

Exemples :

- la catégorie dont les objets sont les ensembles, les morphismes sont les applications, et la composition est la composition des applications ;
- la catégorie des groupes et des morphismes de groupes ;
- la catégorie des modules (sur un anneau fixé) et des morphismes de modules ;
- la catégorie des espaces topologiques et des applications continues ;
- la catégorie des groupes topologiques et des morphismes continus de groupes ;
- la catégorie des CW-complexes et des applications cellulaires ;
- la catégorie des paires d'espaces topologiques (X, A) (avec X un espace topologique et A un sous-espace de X) et des applications continues de paires $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ (avec $f : X \rightarrow Y$ continue telle que $f(A) \subset B$) ;
- la catégorie des revêtements d'un espace topologique donné B et des morphismes de revêtements au-dessus de B ;
- la catégorie des revêtements et des morphismes de revêtements ;
- la catégorie des complexes de chaînes et des morphismes de complexes de chaînes ;
- la catégorie des complexes de cochaînes et des morphismes de complexes de cochaînes ;
- la catégorie des suites exactes courtes de complexes de chaînes et des morphismes de suites exactes courtes de complexes de chaînes.

Si \mathcal{C}, \mathcal{D} sont deux catégories, un *foncteur covariant* de \mathcal{C} dans \mathcal{D} est la donnée pour tout objet X de \mathcal{C} d'un objet $F(X)$ de \mathcal{D} , et pour tout morphisme $f \in \text{Mor}(X, Y)$ de \mathcal{C} d'un morphisme $F(f) \in \text{Mor}(F(X), F(Y))$ de \mathcal{D} tels que

1. $F(i_X) = i_{F(X)}$,
2. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ pour tous f, g .

Un *foncteur contravariant* est la donnée pour tout objet X de \mathcal{C} d'un objet $F(X)$ de \mathcal{D} , et pour tout morphisme $f \in \text{Mor}(X, Y)$ de \mathcal{C} d'un morphisme $F(f) \in \text{Mor}(F(Y), F(X))$ de \mathcal{D} tels que

1. $F(i_X) = i_{F(X)}$,
2. $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ pour tous f, g .

Exemple.

- le foncteur (covariant) "groupe fondamental", de la catégorie des espaces topologiques pointés dans la catégorie des groupes ;
- les foncteurs (covariants) "cône" et "suspension" de la catégorie des espaces topologiques dans elle-même (voir l'appendice, fin de la partie A.2) ;
- le foncteur (covariant) "homologie" de la catégorie des complexes de chaînes dans la catégorie des suites de modules sur un anneau A donné (ou dans la catégorie des modules gradués sur A) ;
- le foncteur (covariant) de la catégorie des suites exactes courtes de complexes de chaînes dans celle des suites exactes longues de modules (voir le théorème 5.2) ;
- le foncteur (covariant) "cohomologie" de la catégorie des complexes de cochaînes dans la catégorie des suites de modules sur un anneau A donné (ou dans la catégorie des modules gradués) ;
- le foncteur (covariant) de la catégorie des suites exactes courtes de complexes de cochaînes dans celle des suites exactes longues de modules (voir le théorème 5.4).

On termine cette partie sur des éléments d'algèbre homologique par un exercice d'algèbre linéaire.

Exercice E.51 (Lemme des cinq) On considère le diagramme commutatif suivant de modules, dont les flèches sont des morphismes de modules, et dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E' \end{array} .$$

Si les première, seconde, quatrième et cinquième flèches verticales sont des isomorphismes, alors la troisième aussi.

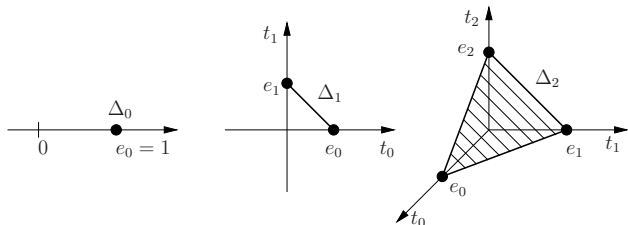
5.2 Construction et propriétés axiomatiques de l'homologie singulière

On fixe un anneau commutatif unitaire \mathbb{A} , appelé *anneau des coefficients*. On note comme d'habitude 0 son élément nul, 1 son élément neutre et $-x$ l'opposé de l'élément x . Par *module*, on entend module sur l'anneau \mathbb{A} . Si $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$, les modules sont les groupes abéliens, et les morphismes de modules les morphismes de groupes abéliens. Pour des raisons profondes (le théorème des coefficients universels), l'exemple $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$ est fondamental. C'est pour cela, et pour des raisons historiques, qu'on emploie la terminologie de "groupe d'homologie" au lieu de "module d'homologie".

Chaînes singulières

Pour p dans \mathbb{N} , la p -simplexe standard (ordonné) Δ_p est l'enveloppe convexe affine dans \mathbb{R}^{p+1} des vecteurs de la base canonique (e_0, e_1, \dots, e_p) :

$$\Delta_p = \{(t_0, \dots, t_p) \in \mathbb{R}^{p+1} : t_i \geq 0 \text{ et } \sum t_i = 1\}.$$



Si X est un espace topologique, un p -simplexe singulier de X est une application continue

$$\sigma : \Delta_p \rightarrow X.$$

Les 0-simplexes singuliers s'identifient aux points de X , et les 1-simplexes singuliers aux chemins dans X (en utilisant l'unique application affine de $[0, 1]$ sur Δ_1 envoyant $0 \in [0, 1]$ sur $e_0 = (1, 0) \in \Delta_1$, qui est $t \mapsto (1-t, t)$).

On note $C_p(X) = C_p(X, \mathbb{A})$ le module libre de base l'ensemble des p -simplexes singuliers de X . Un élément de $C_p(X)$ s'appelle une p -chaîne singulière (ou chaîne singulière), à coefficients dans \mathbb{A} , lorsque l'on veut préciser l'anneau des coefficients. Elle est de la forme

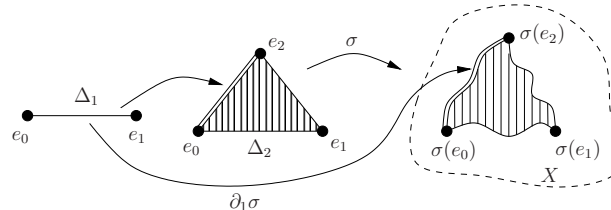
$$\sum_{i=1}^k n_i \sigma_i$$

avec $k \in \mathbb{N}$, σ_i des p -simplexes singuliers et $n_i \in \mathbb{A}$.

Si σ est un p -simplexe singulier avec $p \geq 1$ et i un entier avec $0 \leq i \leq p$, la i -ème face de σ est le $(p-1)$ -simplexe singulier $\partial_i \sigma$ défini par

$$\partial_i \sigma(t_0, \dots, t_{p-1}) = \sigma(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{p-1}).$$

Donc $\partial_i \sigma$ est la composée de σ et de l'unique application affine $\Delta_{p-1} \rightarrow \Delta_p$ qui envoie sommet sur sommet en préservant l'ordre et en omettant le i -ème sommet.



Le bord $\partial \sigma$ d'un p -simplexe singulier est la $(p-1)$ -chaîne singulière

$$\partial \sigma = \sum_{i=0}^p (-1)^i \partial_i \sigma \in C_{p-1}(X).$$

Par linéarité, l'ensemble des p -simplexes singuliers étant une base de $C_p(X)$, ceci définit un morphisme de groupes, appelé *morphisme de bord*

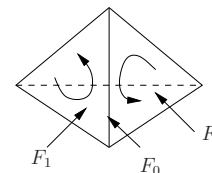
$$\partial : C_p(X) \rightarrow C_{p-1}(X).$$

Il n'y a pas de (-1) -simplexe singulier, donc $C_{-1}(X) = \{0\}$ et $\partial : C_0(X) \rightarrow C_{-1}(X)$ est l'application nulle.

Lemme 5.5

$$\partial \circ \partial = 0.$$

L'idée derrière le calcul suivant est que si F_1, F_2 sont deux faces distinctes de codimension 1 de δ_p , dont les sommets sont ordonnés par l'ordre induit sur les sommets de Δ_p , alors F_1, F_2 se rencontrent en une face F_0 de codimension 2, et les ordres induits sur les sommets de F_0 par ceux de F_1, F_2 ont des signatures opposées.



Démonstration. Il suffit de montrer que $\partial(\partial \sigma) = 0$ pour tout p -simplexe σ . Si σ est un p -simplexe, et $j < i$, alors on vérifie que

$$\partial_j \partial_i \sigma = \partial_{i+1} \partial_j \sigma : (t_0, \dots, t_{p-2}) \mapsto \sigma(t_0, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{p-2}).$$

Donc

$$\begin{aligned} \partial(\partial \sigma) &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \partial(\partial_i \sigma) = \sum_{i=0}^p (-1)^i \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j \partial_j(\partial_i \sigma) = \\ &= \sum_{0 \leq j < i \leq p} (-1)^{i+j} \partial_j(\partial_i \sigma) + \sum_{0 \leq i \leq j \leq p-1} (-1)^{i+j} \partial_{i-1} \partial_j \sigma \end{aligned}$$

et le changement d'indice $i' = j, j' = i - 1$ dans la première somme montre que $\partial(\partial\sigma) = 0$. \square

On obtient donc un complexe de chaînes, appelé *complexe de chaînes singulières* (à coefficients dans \mathbb{A}),

$$C_0(X) \xleftarrow{\partial} C_1(X) \xleftarrow{\partial} \dots \xleftarrow{\partial} C_{n-1}(X) \xleftarrow{\partial} C_n(X) \xleftarrow{\partial} \dots$$

Ses n -cycles sont appelés les *n -cycles singuliers* de X (à coefficients dans \mathbb{A}), et leur ensemble est noté

$$Z_n(X) = Z_n(X, \mathbb{A}) = \ker\{\partial : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)\}.$$

Ses n -bords sont appelés les *n -bords singuliers* de X (à coefficients dans \mathbb{A}), et leur ensemble est noté

$$B_n(X) = B_n(X, \mathbb{A}) = \text{im}\{\partial : C_{n+1}(X) \rightarrow C_n(X)\}.$$

Son n -ème groupe d'homologie, qui est un module, s'appelle le n -ème groupe d'*homologie singulière* de X à coefficients dans \mathbb{A} , et est noté $H_n(X)$, ou $H_n(X, \mathbb{A})$ lorsque l'on veut préciser les coefficients, bien souvent $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$.

$$\boxed{H_n(X) = H_n(X, \mathbb{A}) = Z_n(X)/B_n(X)}$$

Fonctorialité de l'homologie singulière

Si $f : X \rightarrow Y$ est une application continue, et σ un n -simplexe singulier de X , alors $f \circ \sigma$ est un n -simplexe singulier de Y . Considérons le morphisme de modules $f_n : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ défini par linéarité par $f_n(\sigma) = f \circ \sigma$ pour tout n -simplexe singulier σ . Il vérifie, sur les n -simplexes singuliers de X , donc sur $C_n(X)$ par linéarité,

$$\partial \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial.$$

Donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un morphisme de complexes de chaînes du complexes de chaînes singulières de X dans celui de Y . On vérifie que $id_n = id$ et $(f \circ g)_n = f_n \circ g_n$ pour tout n , donc on obtient un foncteur de la catégorie des espaces topologiques dans la catégorie des complexes de chaînes.

L'application continue $f : X \rightarrow Y$ induit donc, pour tout n , un morphisme de modules

$$\boxed{f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)}.$$

Par composition de foncteurs, $H_n(\cdot)$ est donc un foncteur de la catégorie des espaces topologiques dans la catégorie des modules (i.e. des groupes abéliens si $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$), car

$$id_* = id \quad \text{et} \quad (g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

Premiers calculs d'homologie

Exemple. Homologie de l'espace réduit à un point $X = \{x\}$.

Pour tout $p \geq 0$, il y a un et un seul p -simplexe singulier $\sigma_p : \Delta_p \rightarrow X$ (l'application constante). De plus, pour $p > 0$, on a $\partial_i \sigma_p = \sigma_{p-1}$, donc

$$\partial \sigma_p = \left(\sum_{i=0}^p (-1)^i \right) \sigma_{p-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ impair} \\ \sigma_{p-1} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Le complexe de chaînes singulières est donc

$$\mathbb{A} \xleftarrow{0} \mathbb{A} \xleftarrow{id} \mathbb{A} \xleftarrow{0} \mathbb{A} \xleftarrow{id} \mathbb{A} \xleftarrow{0} \mathbb{A} \xleftarrow{id} \dots$$

Par conséquent,

$$\boxed{H_n(\{x\}, \mathbb{A}) = \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}.$$

Proposition 5.6 Si X est un espace topologique connexe par arcs et non vide, alors

$$H_0(X, \mathbb{A}) \simeq \mathbb{A}.$$

De plus, pour tout point x de X , sa classe d'homologie $[x]$ est un générateur de $H_0(X, \mathbb{A})$.

Démonstration. On rappelle que l'on a identifié les 0-simplexes de X aux points de X . Le module $C_0(X)$ est le module libre engendré par les points de X . On considère l'unique morphisme de modules

$$\phi : C_0(X) \rightarrow \mathbb{A}$$

valant 1 sur chaque point de X , donc qui à $\sum_{i=0}^k n_i x_i$ avec $x_i \in X, n_i \in \mathbb{A}$ associe $\sum_{i=0}^k n_i$. Le morphisme ϕ est surjectif car X est non vide.

Montrons qu'une 0-chaîne singulière c est un bord si et seulement si $\phi(c)$ est nul.

Si σ est un 1-simplexe singulier, identifié avec un chemin de $[0, 1]$ dans X , alors $\partial\sigma = \sigma(1) - \sigma(0)$. Donc ϕ est nulle sur les bords de simplexes singuliers, et par linéarité, ϕ est nulle sur les bords.

Réciproquement, si $c = \sum n_i x_i$ vérifie $\phi(c) = 0$, soit σ_{x_i} un chemin (continu) de y à x_i pour y un point fixé de X . Alors

$$c = \sum n_i x_i - \left(\sum n_i \right) y = \sum n_i (x_i - y) = \sum n_i \partial \sigma_{x_i} = \partial \left(\sum n_i \sigma_{x_i} \right),$$

donc c est un bord. Comme

$$H_0(X) = C_0(X)/B_0(X),$$

le morphisme de modules ϕ induit donc un isomorphisme de $H_0(X)$ sur \mathbb{A} . \square

Exercice E.52 Si X est un espace topologique et $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ est la famille de ses composantes connexes par arcs, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$H_n(X, \mathbb{A}) \simeq \bigoplus_{\alpha \in I} H_n(X_\alpha, \mathbb{A}).$$

En particulier, $H_0(X, \mathbb{Z})$ est le groupe abélien libre engendré par les composantes connexes par arcs de X .

Le seul espace dont on sait vraiment calculer l'homologie pour l'instant est l'espace réduit à un point. L'un des buts du chapitre qui suit est de montrer que l'on peut calculer l'homologie des espaces contractiles.

Invariance homotopique

On déduit des propriétés fonctorielles que les groupes d'homologie singulière sont des invariants topologiques, i.e. que si $f : X \rightarrow Y$ est un homéomorphisme, alors $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ est un isomorphisme de modules pour tout n .

La proposition impliquera que ce sont aussi des invariants homotopiques, i.e. que si $f : X \rightarrow Y$ est une équivalence d'homotopie, alors $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ est un isomorphisme de modules.

Proposition 5.7 Si $f, g : X \rightarrow Y$ sont homotopes, alors $f_* = g_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ pour tout n .

Démonstration. Soient $\iota : X \rightarrow X \times [0, 1]$ et $\iota' : X \rightarrow X \times [0, 1]$ définis par $\iota : x \mapsto (x, 0)$ et $\iota' : x \mapsto (x, 1)$. Si h est une homotopie entre f et g , alors $f = h \circ \iota$ et $g = h \circ \iota'$. Par functorialité, il suffit donc de montrer que $\iota_* = \iota'_*$.

D'après la partie d'algèbre homologique 5.1, il suffit de construire une homotopie $(K_p)_{p \in \mathbb{N}}$ entre $(\iota_p)_{p \in \mathbb{N}}$ et $(\iota'_p)_{p \in \mathbb{N}}$, c'est-à-dire une suite de morphismes de modules $(K_p : C_p(X) \rightarrow C_{p+1}(X \times [0, 1]))_{p \in \mathbb{N}}$ telle que $\partial \circ K_p + K_{p-1} \circ \partial = \iota_p - \iota'_p$ pour tout p (en convenant que $K_{-1} = 0$).

$$\begin{array}{ccc} C_{p-1}(X) & \xleftarrow{\partial} & C_p(X) \\ \searrow K_{p-1} & & \searrow K_p \\ & \iota_p \downarrow \downarrow \iota'_p & \end{array}$$

$$C_p(X \times [0, 1]) \xleftarrow{\partial} C_{p+1}(X \times [0, 1])$$

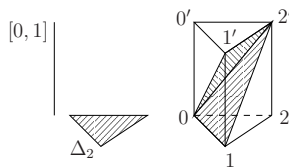
Par linéarité, il suffit de construire K_p sur les p -simplexes singuliers, et de vérifier l'égalité sur ceux-ci.

Soit $\sigma : \Delta_p \rightarrow X$ un p -simplexe singulier.

Remarque. On a une application continue

$$\sigma \times id : \Delta_p \times [0, 1] \rightarrow X \times [0, 1].$$

On va décomposer le prisme $\Delta_p \times [0, 1]$ en $(p+1)$ -simplexes. Par exemple, on décompose $\Delta_2 \times [0, 1]$ en trois tétraèdres de sommets $(0, 0', 1', 2')$, $(0, 1, 1', 2')$, $(0, 1, 2, 2')$.



Notations : Pour x_0, \dots, x_p dans \mathbb{R}^N , on note $((x_0, \dots, x_p))$ l'unique application affine de Δ_p dans \mathbb{R}^N envoyant e_k sur x_k pour $0 \leq k \leq p$. On note $(y_0, \dots, \widehat{y}_j, \dots, y_n)$ la suite obtenue à partir d'une suite (y_0, \dots, y_n) en omettant le terme y_j .

Si e_0, \dots, e_p sont les sommets de Δ_p , on note $a_k = (e_k, 0), b_k = (e_k, 1)$ pour $0 \leq k \leq p$ les sommets du prisme $\Delta_p \times [0, 1]$.

On pose alors

$$K_p(\sigma) = \sum_{i=0}^p (-1)^i (\sigma \times id) \circ ((a_0, \dots, a_i, b_i, \dots, b_p)) \in C_{p+1}(X \times [0, 1]).$$

Pour vérifier la propriété d'homotopie de $(K_p)_{p \in \mathbb{N}}$, on calcule

$$\begin{aligned} \partial \circ K_p(\sigma) &= \partial \left(\sum_{i=0}^p (-1)^i (\sigma \times id) \circ ((a_0, \dots, a_i, b_i, \dots, b_p)) \right) = \\ &= \sum_{j \leq i} (-1)^{i+j} (\sigma \times id) \circ ((a_0, \dots, \widehat{a}_j, \dots, a_i, b_i, \dots, b_p)) - \\ &= \sum_{j \geq i} (-1)^{i+j} (\sigma \times id) \circ ((a_0, \dots, a_i, b_i, \dots, \widehat{b}_j, \dots, b_p)). \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} K_{p+1} \circ \partial(\sigma) &= K \left(\sum_{j=0}^p (-1)^j \sigma \circ ((e_0, \dots, \widehat{e}_j, \dots, e_p)) \right) = \\ &= \sum_{i < j} (-1)^{i+j} (\sigma \times id) \circ ((a_0, \dots, a_i, b_i, \dots, \widehat{b}_j, \dots, b_p)) - \\ &= \sum_{j \geq i} (-1)^{i+j} (\sigma \times id) \circ ((a_0, \dots, \widehat{a}_j, \dots, a_i, b_i, \dots, b_p)). \end{aligned}$$

Donc

$$(\partial \circ K_p + K_{p+1} \circ \partial)(\sigma) =$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=0}^p (\sigma \times id) \circ ((a_0, \dots, a_{i-1}, b_i, \dots, b_p)) - \sum_{i=0}^p (\sigma \times id) \circ ((a_0, \dots, a_i, b_{i+1}, \dots, b_p)) \\ &= (\sigma \times id) \circ ((b_0, \dots, b_p)) - (\sigma \times id) \circ ((a_0, \dots, a_p)) = \iota \circ \sigma - \iota' \circ \sigma, \end{aligned}$$

ce qui montre le résultat. \square

Si deux espaces topologiques X, Y ont le même type d'homotopie, il existe $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow X$ continues telles que $f \circ g$ est homotope à l'application identique de X et $g \circ f$ est homotope à l'application identique de Y . Le résultat suivant découle alors du précédent par functorialité.

Corollaire 5.8 Deux espaces topologiques ayant même type d'homotopie ont leurs groupes d'homologie singulière isomorphes.

Démonstration. Si $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow X$ sont deux applications continues, telles que $f \circ g$ est homotope à l'application identique de X et $g \circ f$ est homotope à l'application identique de Y , alors par fonctorialité, $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ est un isomorphisme, car il admet g_* pour inverse. \square

Comme les espaces contractiles ont même type d'homotopie que le point, on a aussi, par le calcul de l'homologie du point ci-dessus :

Corollaire 5.9 *Si X est un espace contractile, alors*

$$H_n(X, \mathbb{A}) = \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} . \quad \square$$

Nous savons donc calculer l'homologie des espaces contractiles. Mais il existe des espaces intéressants non contractiles. La plupart d'entre eux, comme les CW-complexes, sont tout de même localement contractiles. Pour calculer l'homologie d'un espace topologique X muni d'un recouvrement $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ par ouverts contractiles, nous allons développer plusieurs outils. Le théorème des petites chaînes est l'outil qui permet de ne regarder que les simplexes singuliers dont les images sont contenues dans l'un des U_i . La suite exacte longue d'homotopie relative permet de calculer l'homologie de X à partir de l'homologie d'une partie A de X et de l'homologie relative de X par rapport à A . Le théorème d'excision permet (essentiellement) dans le calcul de l'homologie relative de X par rapport à A d'oublier l'intérieur de A . Enfin, la suite exacte longue de Mayer-Vietoris est le moyen de calculer l'homologie de la réunion de deux ouverts de X en fonction de l'homologie de chacun des ces deux ouverts, et de l'homologie de l'intersection.

Homologie relative

Une *paire* d'espaces topologiques est un couple (X, Y) avec X un espace topologique et Y un sous-espace de X . Un *morphisme de paires* d'espaces topologiques $(X, Y) \rightarrow (X', Y')$ est une application continue $f : X \rightarrow X'$ telle que $f(Y) \subset Y'$. Deux morphismes de paires $f, g : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$ sont *homotopes* s'il existe une homotopie $h : X \times I \rightarrow X'$ entre $f : X \rightarrow X'$ et $g : X \rightarrow X'$ telle que $h(Y \times I) \subset Y'$. Deux paires d'espaces topologiques $(X, Y), (X', Y')$ ont *même type d'homotopie de paires* s'il existe des morphismes de paires $f : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$ et $g : (X', Y') \rightarrow (X, Y)$ tels que $f \circ g$ est homotope à $id : (X', Y') \rightarrow (X', Y')$ et $g \circ f$ est homotope à $id : (X, Y) \rightarrow (X, Y)$.

Les paires d'espaces topologiques et leurs morphismes (avec la composition des applications) forment une catégorie. On identifie X et (X, \emptyset) . Si $f : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$ est un morphisme de paires, on note aussi $f : X \rightarrow X'$ et $f : Y \rightarrow Y'$ les applications induites.

Soit (X, Y) une paire d'espaces topologiques. Le module $C_p(Y)$ s'identifie avec le sous-module de $C_p(X)$ de base l'ensemble des p -simplexes singuliers de X à valeurs dans Y . Clairement, le bord $\partial : C_p(X) \rightarrow C_{p-1}(X)$ envoie alors $C_p(Y)$ dans $C_{p-1}(Y)$.

De plus, si $f : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$ est un morphisme de paires, alors $f_p : C_p(X) \rightarrow C_p(X')$ envoie $C_p(Y)$ dans $C_p(Y')$.

Le *complexe de chaînes singulières relatives* de (X, Y) est le complexe de chaînes de modules

$$C_p(X, Y) = C_p(X, Y; \mathbb{A}) = C_p(X)/C_p(Y)$$

et de morphismes de bord

$$\partial : C_p(X, Y) \rightarrow C_{p-1}(X, Y)$$

le morphisme quotient de $\partial : C_p(X) \rightarrow C_{p-1}(X)$. Le n -ème groupe d'homologie de ce complexe de chaînes (qui est un module) est appelé *n -ème groupe d'homologie singulière relative* de la paire (X, Y) à coefficients dans \mathbb{A} , et noté

$$H_n(X, Y) = H_n(X, Y; \mathbb{A}) .$$

Exercice E.53 *Si $Z_p(X, Y) = \{\sigma \in C_p(X) \mid \partial\sigma \in C_{p-1}(Y)\}$, montrer que $H_n(X, Y)$ est isomorphe à $Z_p(X, Y)/(B_p(X) + C_p(Y))$.*

Un morphisme de paires $f : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$ induit par passage au quotient un morphisme de complexes de chaînes $f_p : C_p(X, Y) \rightarrow C_p(X', Y')$. Donc, par les rappels d'algèbre homologique, f induit un morphisme de modules

$$f_* : H_n(X, Y) \rightarrow H_n(X', Y')$$

L'identification $X = (X, \emptyset)$ induit une identification $C_p(X) = C_p(X, \emptyset)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Si $j : (X, \emptyset) \rightarrow (X, Y)$ est l'inclusion, alors le morphisme induit $j_p : C_p(X, \emptyset) \rightarrow C_p(X, Y)$ s'identifie avec la projection canonique $C_p(X) \rightarrow C_p(X, Y)$.

Donc, si (X, Y) est une paire d'espaces topologiques, et $i : Y \rightarrow X$ et $j : (X, \emptyset) \rightarrow (X, Y)$ sont les inclusions, alors

$$0 \longrightarrow C_*(Y) \xrightarrow{i_*} C_*(X) \xrightarrow{j_*} C_*(X, Y) \longrightarrow 0$$

est, par construction, une suite exacte courte de complexes de chaînes.

Théorème 5.10 (Suite exacte longue d'homologie singulière relative) *Pour toute paire d'espaces topologiques (X, Y) , il existe pour tout n dans \mathbb{N} un morphisme de modules*

$$\delta : H_n(X, Y) \rightarrow H_{n-1}(Y)$$

tels que

1. pour tout morphisme de paires $f : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$, on a

$$\delta \circ f_* = f_* \circ \delta ,$$

2. si $i : Y \rightarrow X$ et $j : X = (X, \emptyset) \rightarrow (X, Y)$ sont les inclusions, alors la suite de modules et de morphismes de modules

$$\dots \longrightarrow H_{n+1}(X, Y) \xrightarrow{\delta} H_n(Y) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, Y) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(Y) \longrightarrow \dots$$

est exacte.

Démonstration. Ceci découle immédiatement du théorème 5.2 appliqué à la suite exacte $0 \longrightarrow C_*(Y) \xrightarrow{i_*} C_*(X) \xrightarrow{j_*} C_*(X, Y) \longrightarrow 0$. \square

Corollaire 5.11 Si X est un espace topologique connexe par arcs, et si Y est non vide, alors

$$H_0(X, Y; \mathbb{A}) \simeq 0.$$

Démonstration. Le théorème précédent fournit une suite exacte

$$H_0(Y) \longrightarrow H_0(X) \longrightarrow H_0(X, Y) \longrightarrow 0$$

et les hypothèses impliquent que $H_0(Y) \rightarrow H_0(X)$ est surjective. \square

Exemple. Les groupes d'homologies relatives de la paire $(\mathbb{B}_{n+1}, \mathbb{S}_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ satisfont :

$$H_p(\mathbb{B}_{n+1}, \mathbb{S}_n; \mathbb{A}) \simeq \begin{cases} H_{p-1}(\mathbb{S}_n, \mathbb{A}) & \text{si } p \geq 2 \\ 0 & \text{si } p = 1, n \geq 1 \\ \mathbb{A} & \text{si } p = 1, n = 0 \\ 0 & \text{si } p = 0 \end{cases}$$

En effet, si $k \geq 1$, alors il existe une suite exacte

$$H_{k+1}(\mathbb{B}_{n+1}) \longrightarrow H_{k+1}(\mathbb{B}_{n+1}, \mathbb{S}_n) \longrightarrow H_k(\mathbb{S}_n) \longrightarrow H_k(\mathbb{B}_{n+1}),$$

et $H_{k+1}(\mathbb{B}_{n+1})$ et $H_k(\mathbb{B}_{n+1})$ sont nuls. De plus, la suite

$$H_1(\mathbb{B}_{n+1}) \longrightarrow H_1(\mathbb{B}_{n+1}, \mathbb{S}_n) \longrightarrow H_0(\mathbb{S}_n) \longrightarrow H_0(\mathbb{B}_{n+1})$$

est exacte, $H_1(\mathbb{B}_{n+1})$ est nul, et $H_0(\mathbb{S}_n) \rightarrow H_0(\mathbb{B}_{n+1})$ est un isomorphisme si $n \geq 1$ et est de noyau isomorphe à \mathbb{A} si $n = 0$.

La proposition suivante dit que l'homologie relative est un invariant d'homotopie de paires d'espaces topologiques.

Proposition 5.12 Si $f, g : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$ sont des morphismes de paires qui sont homotopes, alors

$$f_* = g_* : H_n(X, Y) \rightarrow H_n(X', Y').$$

Deux paires d'espaces topologiques qui ont même type d'homotopie de paires ont leurs homologies relatives isomorphes : si $f : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$ est une équivalence d'homotopie de paires, alors $f_* : H_n(X, Y) \rightarrow H_n(X', Y')$ est un isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. L'homotopie $(K_p)_{p \in \mathbb{N}}$ entre $(t_p)_{p \in \mathbb{N}}$ et $(t'_p)_{p \in \mathbb{N}}$ construite dans la preuve de la proposition 5.7 passe au quotient. La seconde assertion se montre alors comme dans le cas des espaces topologiques (voir corollaire 5.8). \square

Théorème des petites chaînes

Soit X un espace topologique et $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ une famille de parties de X dont les intérieurs recouvrent X :

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i^\circ.$$

On construit un complexe de chaînes, appelé *complexe des chaînes \mathcal{U} -petites*, de la manière suivante. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, le module $C_p(\mathcal{U})$ est le sous-module (libre) de $C_p(X)$ engendré par les p -simplexes singuliers d'image contenue dans l'un des U_i . Le morphisme de bord $\partial : C_p(\mathcal{U}) \rightarrow C_{p-1}(\mathcal{U})$ est la restriction du morphisme $\partial : C_p(X) \rightarrow C_{p-1}(X)$, qui envoie bien chaînes \mathcal{U} -petites sur chaînes \mathcal{U} -petites. On note $H_n(\mathcal{U})$ le n -ème groupe d'homologie du complexe des chaînes \mathcal{U} -petites, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite des inclusions $(C_p(\mathcal{U}) \rightarrow C_p(X))_{p \in \mathbb{N}}$ est un morphisme de complexes de chaînes.

Théorème 5.13 (Théorème des petites chaînes) Ce morphisme de complexes de chaînes induit un isomorphisme en homologie : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$H_n(\mathcal{U}) \simeq H_n(X).$$

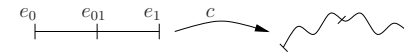
Démonstration. L'idée est de construire un opérateur qui transforme une p -chaîne en une p -chaîne \mathcal{U} -petite, par subdivisions barycentriques des p -simplexes standards.

On va définir un morphisme de complexes de chaînes $(Sd = Sd_p : C_p(X) \rightarrow C_p(X))_{p \in \mathbb{N}}$, appelé *opérateur de subdivision*, qui est fonctoriel, i.e. si $f : X \rightarrow Y$ est une application continue, alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} C_p(X) & \xrightarrow{Sd} & C_p(X) \\ \downarrow f_p & & \downarrow f_p \\ C_p(Y) & \xrightarrow{Sd} & C_p(Y) \end{array}$$

est commutatif, pour tout $p \in \mathbb{N}$.

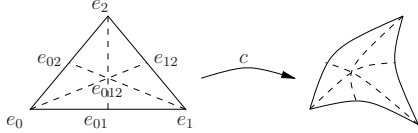
Exemple. Si c est un 1-simplexe singulier, alors on pose $Sd(c) = c \circ ((e_0, e_{01})) + c \circ ((e_{01}, e_1))$, avec e_{01} le milieu de Δ_1 .



Si c est un 2-simplexe singulier, alors on pose

$$\begin{aligned} Sd(c) = & c \circ ((e_0, e_{01}, e_{012})) - c \circ ((e_1, e_{01}, e_{012})) + c \circ ((e_1, e_{12}, e_{012})) \\ & - c \circ ((e_2, e_{1,2}, e_{012})) + c \circ ((e_2, e_{02}, e_{012})) - c \circ ((e_0, e_{02}, e_{012})) \end{aligned}$$

avec les notations du dessin ci-dessous.



On rappelle que e_0, e_1, \dots, e_p sont les sommets du p -simplexe standard Δ_p , et que, pour x_0, \dots, x_p dans \mathbb{R}^N , on note $((x_0, \dots, x_p))$ l'unique application affine de Δ_p dans \mathbb{R}^N envoyant e_k sur x_k pour $0 \leq k \leq p$. Si s est une partie de $\{0, 1, \dots, p\}$, on note b_s le barycentre des points $\{e_i : i \in s\}$.

Soit α un élément du groupe symétrique \mathcal{S}_{p+1} des bijections de $\{0, 1, \dots, p\}$. On note $\epsilon(\alpha) \in \{\pm 1\}$ la signature de α . On considère le p -simplexe singulier $\beta_\alpha : \Delta_p \rightarrow \Delta_p$

$$\beta_\alpha = ((b_{\{\alpha(0)\}}, b_{\{\alpha(0), \alpha(1)\}}, \dots, b_{\{\alpha(0), \alpha(1), \dots, \alpha(p)\}})) .$$

On pose, pour tout p -simplexe singulier c ,

$$Sd(c) = \sum_{\alpha \in \mathcal{S}_{p+1}} \epsilon(\alpha) c \circ \beta_\alpha .$$

En prolongeant par linéarité, on obtient un morphisme de modules $Sd : C_p(X) \rightarrow C_p(X)$.

On vérifie que $\partial \circ Sd = Sd \circ \partial$ et que $Sd \circ f_p = f_p \circ Sd$ pour toute application continue f .

On montre maintenant que les morphismes de complexes de chaînes id et Sd sont fonctoriellement homotopes, i.e. qu'il existe, pour tout $p \in \mathbb{N}$, un morphisme de modules $T = T_p : C_p(X) \rightarrow C_{p+1}(X)$ tels que (avec $T_{-1} : C_{-1}(X) \rightarrow C_0(X)$ l'application forcément nulle),

1. (homotopie) $\partial \circ T_p + T_{p-1} \circ \partial = id - Sd$
2. (fonctorialité) si $f : X \rightarrow Y$ est une application continue, alors $f_{p+1} \circ T_p = T_p \circ f_p$.

La construction procède par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.

Comme $Sd : C_0(X) \rightarrow C_0(X)$ est l'application identité, en posant $T_0 : C_0(X) \rightarrow C_1(X)$ l'application nulle, on a bien $\partial \circ T_0 + T_{-1} \circ \partial = id - Sd$.

On suppose construits T_0, \dots, T_{p-1} vérifiant (1) et (2). On pose $i_p = id_{\Delta_p}$, qui est un p -simplexe singulier de Δ_p . Par l'hypothèse de récurrence appliquée à la $(p-1)$ -chaîne singulière ∂i_p , on a

$$\partial i_p - Sd(\partial i_p) = \partial \circ T_{p-1}(\partial i_p) + T_{p-2} \circ \partial(\partial i_p).$$

Comme $\partial \circ \partial(i_p) = 0$ et $\partial \circ Sd = Sd \circ \partial$, on a $\partial(i_p - Sd(i_p) - T_{p-1} \circ \partial(i_p)) = 0$. Comme Δ_p est contractile, il existe $\sigma_{p+1} \in C_{p+1}(\Delta_p)$ tel que

$$i_p - Sd(i_p) - T_{p-1} \circ \partial(i_p) = \partial \sigma_{p+1} . \quad (*)$$

Soit maintenant $c : \Delta_p \rightarrow X$ un p -simplexe singulier de X . On note $(c_k : C_k(\Delta_p) \rightarrow C_k(X))_{k \in \mathbb{N}}$ le morphisme de complexes de chaînes induit par l'application continue c . On pose $T_p(c) = c_{p+1}(\sigma_{p+1}) \in C_{p+1}(X)$. En prolongeant par linéarité, on obtient un morphisme de modules $T_p : C_p(X) \rightarrow C_{p+1}(X)$.

Pour montrer que T_p vérifie la condition (1), il suffit par linéarité de montrer qu'elle est vérifiée sur tout p -simplexe singulier $c : \Delta_p \rightarrow X$. On applique à la relation (*) l'application $c_p : C_p(\Delta_p) \rightarrow C_p(X)$. On obtient

$$c_p(i_p) - c_p \circ Sd(i_p) = c_p \circ T_{p-1} \circ \partial(i_p) + c_p \circ \partial(\sigma_{p+1}) .$$

On a $c_p(i_p) = c$ car $i_p = id_{\Delta_p}$. Par fonctorialité de Sd , on a $c_p \circ Sd = Sd \circ c_p$. Par fonctorialité de T_{p-1} et puisque $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est un morphisme de complexes de chaînes, on a $c_p \circ T_{p-1} \circ \partial = T_{p-1} \circ \partial \circ c_p$. Par définition de T_p , on a $c_{p+1}(\sigma_{p+1}) = T_p(c)$. Donc

$$c - Sd(c) = T_{p-1} \circ \partial(c) + \partial \circ T_p(c),$$

ce qui montre le résultat.

Pour montrer que T_p vérifie la condition (2), soit $c : \Delta_p \rightarrow X$ un p -simplexe singulier. Alors

$$f_{p+1} \circ T_p(c) = f_{p+1} \circ c_{p+1}(\sigma_{p+1}) = (f \circ c)_{p+1}(\sigma_{p+1}) = T_p(f \circ c) = T_p \circ f_p(c),$$

ce qui montre le résultat.

Lemme 5.14 Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ une famille de parties de X dont les intérieurs recouvrent X . Alors pour tout $c \in C_p(X)$, il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $Sd^r(c) \in C_p(\mathcal{U})$.

Démonstration. Par linéarité, on peut supposer que c est un p -simplexe singulier.

On pose $V_i = c^{-1}(\overset{\circ}{U}_i)$. Alors $(V_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de l'espace métrique compact Δ_p . Il existe donc $\epsilon > 0$ tel que pour toute partie A de Δ_p , dont le diamètre vérifie $\text{diam}(A) \leq \epsilon$, il existe $i \in I$ tel que $A \subset V_i$.

Si $u = \sum_k a_k \sigma_k$, avec σ_k des p -simplexes singuliers, est une p -chaîne singulière à valeurs dans un espace métrique, on note $\text{diam}(u)$ le maximum des diamètres des images des σ_k . Il est facile de montrer que, pour tout $r \in \mathbb{N}$,

$$\text{diam } Sd^r(i_p) \leq \left(\frac{p}{p+1} \right)^r \text{diam}(\Delta_p) .$$

En effet, soit S un simplexe affine de \mathbb{R}^N , enveloppe convexe affine des points x_0, x_1, \dots, x_p . Par convexité, $\text{diam}(S) = \sup_{i \neq j} \|e_i - e_j\|$. Si S' est un simplexe affine de dimension p de la subdivision barycentrique de S , il possède un sommet de la

forme x_j et un sommet qui est le barycentre affine $b = \sum_{i=0}^p \frac{1}{p+1} x_i$ de S . De plus $\text{diam}(S') = \|b - x_j\| = \frac{1}{p+1} \|\sum_{i=0}^p x_i - x_j\| \leq \frac{p}{p+1} \text{diam}(S)$.

Pour r assez grand, on a donc $\text{diam } Sd^r(i_p) \leq \epsilon$. Donc $Sd^r(c) = Sd^r(c_p(i_p)) = c_p(Sd^r(i_p)) \in C_p(\mathcal{U})$, ce qui montre le résultat. \square

La preuve du théorème des petites chaînes se termine comme suit.

Soit z un cycle de X . Pour tout $r \in \mathbb{N}$, $Sd^r(z)$ est aussi un cycle, car Sd commute avec ∂ . De plus,

$$z - Sd^r(z) = \sum_{k=0}^{r-1} (Sd^k(z) - Sd^{k+1}(z)) = \sum_{k=0}^{r-1} (T \circ \partial(Sd^k(z)) - \partial \circ T(Sd^k(z))) = \partial \circ T \left(\sum_{k=0}^{r-1} Sd^k(z) \right).$$

On montre maintenant, pour tout $p \in \mathbb{N}$, que $H_p(\mathcal{U}) \rightarrow H_p(X)$ est un isomorphisme de modules.

Si z est un p -cycle de X , soit r suffisamment grand pour que $Sd^r(z) \in \mathcal{C}_p(\mathcal{U})$. Alors par ce qui précède, $Sd^r(z)$ est un p -cycle \mathcal{U} -petit, homologue à z dans X , donc l'application $H_p(\mathcal{U}) \rightarrow H_p(X)$ est surjective.

Soit z un p -cycle \mathcal{U} -petit, qui est un bord dans X . Alors il existe $t \in C_{p+1}(X)$ tel que $z = \partial t$. Montrons que z est le bord d'une chaîne \mathcal{U} -petite. Soit r suffisamment grand pour que $Sd^r(t) \in C_{p+1}(\mathcal{U})$. D'après ce qui précède, on a $Sd^r(z) = Sd^r(\partial t) = \partial \circ Sd^r(t)$, donc

$$z = \partial \left(Sd^r(t) + T \left(\sum_{k=0}^{r-1} Sd^k(z) \right) \right).$$

Comme Sd envoie $C_i(\mathcal{U})$ dans $C_i(\mathcal{U})$, et comme T envoie $C_p(\mathcal{U})$ dans $C_{p+1}(\mathcal{U})$, on a bien montré que z est le bord d'une chaîne \mathcal{U} -petite. Donc $H_p(\mathcal{U}) \rightarrow H_p(X)$ est injective. \square

Excision

Théorème 5.15 (Théorème d'excision) *Soit X un espace topologique, A un sous-espace de X , et $U \subset A$ avec $\bar{U} \subset \overset{\circ}{A}$. L'inclusion des paires d'espaces topologiques $(X - U, A - U) \rightarrow (X, A)$ induit un isomorphisme en homologie : pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$H_n(X - U, A - U) \simeq H_n(X, A).$$

Démonstration. On pose $\mathcal{U} = \{X - U, A\}$. Comme $\bar{U} \subset \overset{\circ}{A}$, l'espace X est réunion des intérieurs de $X - U$ et de A . On peut donc appliquer le théorème des petites chaînes : l'inclusion $u : C_*(\mathcal{U}) \rightarrow C_*(X)$ induit un isomorphisme en homologie.

On rappelle que si E, F sont deux sous-modules d'un module G , alors l'inclusion $E \rightarrow E + F$ induit un isomorphisme

$$E/(E \cap F) \simeq (E + F)/F.$$

Comme $C_*(\mathcal{U}) = C_*(X - U) + C_*(A)$, il vient

$$\begin{aligned} C_*(\mathcal{U})/C_*(A) &\simeq C_*(X - U)/(C_*(X - U) \cap C_*(A)) = C_*(X - U)/C_*(A - U) \\ &= C_*(X - U, A - U). \end{aligned}$$

On obtient donc un morphisme de suites exactes courtes de complexes de chaînes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_*(A) & \longrightarrow & C_*(\mathcal{U}) & \xrightarrow{f} & C_*(X - U, A - U) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow id & & \downarrow u & & \downarrow g & & \\ 0 & \longrightarrow & C_*(A) & \longrightarrow & C_*(X) & \longrightarrow & C_*(X, A) & \longrightarrow & 0 \end{array},$$

avec g l'application induite par l'inclusion $(X - U, A - U) \rightarrow (X, A)$, et f le morphisme de complexes de chaînes obtenu comme composition de la projection $C_*(\mathcal{U}) \rightarrow C_*(\mathcal{U})/C_*(A)$ avec l'isomorphisme $C_*(\mathcal{U})/C_*(A) \simeq C_*(X - U, A - U)$ ci-dessus défini. La commutativité du diagramme ci-dessus est immédiate.

Par le théorème 5.2, le diagramme suivant est commutatif, et ses lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} H_n(A) & \longrightarrow & H_n(\mathcal{U}) & \longrightarrow & H_n(X - U, A - U) & \longrightarrow & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & H_{n-1}(\mathcal{U}) \\ \downarrow id & & \downarrow u_* & & \downarrow g_* & & \downarrow id & & \downarrow u_* \\ H_n(A) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, A) & \longrightarrow & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & H_{n-1}(X) \end{array}.$$

Comme les première, seconde, quatrième et cinquième flèches verticales sont des isomorphismes, il découle du lemme des cinq (voir exercice E.51) que la troisième flèche verticale est aussi un isomorphisme, ce qui démontre le résultat. \square

On rappelle (voir la partie A.2) que si X est un espace topologique et si Y est un sous-espace de X , alors X/Y désigne l'espace topologique quotient X/\mathcal{R} avec \mathcal{R} la relation d'équivalence engendrée par $x \sim y$ pour tous x, y de Y . Pour alléger les notations dans cette fin de partie, on notera X/Y l'espace X/Y (il n'y aura pas de risque de confondre avec un autre quotient).

Lemme 5.16 *Soit X un espace topologique, et Y un fermé de X qui est un rétracte par déformation forte de X . Alors le singleton Y/Y est un rétracte par déformation forte de X/Y .*

Démonstration. Soit $\pi : X \rightarrow X/Y$ la projection canonique. Comme Y est fermé, on rappelle (voir la partie A.2) que $\pi|_{X-Y}$ est un homéomorphisme sur son image. Soit $h : X \times [0, 1] \rightarrow X$ une application continue, avec $h(x, 0) = x$ et $h(x, 1) \in Y$ pour tout $x \in X$, et $h(y, t) = y$ pour tout $y \in Y$.

Il existe une unique application ϕ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X \times [0, 1] & \xrightarrow{h} & X \\ \pi \times id \downarrow & & \downarrow \pi \\ (X/Y) \times [0, 1] & \xrightarrow{\phi} & X/Y \end{array}$$

En effet, si $(\pi(x), t) \in (X/Y) \times [0, 1]$, alors $(\pi \times id)^{-1}(\pi(x), t) = \{(x, t)\}$ si $x \notin Y$, et $(\pi \times id)^{-1}(\pi(x), t) = Y \times \{t\}$ sinon. Or $\pi \circ h(Y \times \{t\}) = Y/Y$, qui est un singleton.

Pour montrer que ϕ ainsi définie est continue en tout point $(\pi(x), t) \in (X/Y) \times [0, 1]$, soit V un voisinage de $\phi(\pi(x), t) = \pi \circ h(x, t)$. Alors $U = \pi^{-1}(V)$ est un voisinage de $h(x, t)$, qui est un voisinage de Y si $h(x, t) \in Y$. Donc $h^{-1}(U)$ est un voisinage de (x, t) , qui est un voisinage de $Y \times [0, 1]$ si $h(x, t) \in Y$.

Si $x \in X - Y$, comme $X - Y$ est ouvert, il existe un voisinage W de x , contenu dans $X - Y$, et un voisinage W' de t tels que $W \times W' \subset h^{-1}(U)$. Comme $\pi|_{X-Y}$ est un homéomorphisme sur son image, on en déduit que $\pi(W) \times W'$ est un voisinage de $(\pi(x), t)$ contenu dans $\phi^{-1}(V)$.

Si $x \in Y$, alors $h(x, t) \in Y$, donc $Y \times [0, 1] \subset h^{-1}(U)$. Par conséquent, pour tout $y \in Y$ et tout $s \in [0, 1]$, il existe U_s et V_s voisinages de y et s dans X et $[0, 1]$ respectivement tels que $U_s \times V_s \subset h^{-1}(U)$. Par compacité de $[0, 1]$, il existe $s_1, \dots, s_k \in [0, 1]$ tels que $[0, 1] \subset V_{s_1} \cup \dots \cup V_{s_k}$. Soit $U_y = U_{s_1} \cap \dots \cap U_{s_k}$, qui est un voisinage de y dans X avec

$$U_y \times [0, 1] = U_y \times (V_{s_1} \cup \dots \cup V_{s_k}) = (U_y \times V_{s_1}) \cup \dots \cup (U_y \times V_{s_k}) \subset h^{-1}(U).$$

Donc $(\bigcup_{y \in Y} U_y) \times [0, 1]$ est un voisinage de $Y \times [0, 1]$ contenu dans $h^{-1}(U)$. Et puisque l'image par π d'un voisinage saturé de Y dans X est un voisinage de Y/Y dans X/Y , on en déduit que $\pi(\bigcup_{y \in Y} U_y) \times [0, 1]$ est un voisinage de $(\pi(x), t)$ contenu dans $\phi^{-1}(V)$. \square

Proposition 5.17 *Soit X un espace topologique normal, Y un fermé de X , rétracte par déformation forte d'un voisinage ouvert U . Si $\pi : (X, Y) \rightarrow (X/Y, Y/Y)$ est la projection canonique, alors*

$$\pi_* : H_n(X, Y) \rightarrow H_n(X/Y, Y/Y)$$

est un isomorphisme de modules pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Par le lemme précédent, Y/Y est un rétracte par déformation forte de U/Y . Par l'invariance homotopique de l'homologie relative (Proposition 5.12), les inclusions $(X, Y) \rightarrow (X, U)$ et $(X/Y, Y/Y) \rightarrow (X/Y, U/Y)$ induisent des isomorphismes en homologie relative :

$$H_n(X, Y) \simeq H_n(X, U) \quad \text{et} \quad H_n(X/Y, Y/Y) \simeq H_n(X/Y, U/Y)$$

Comme X est normal, il existe un ouvert V de X tel que $Y \subset V \subset \bar{V} \subset U$. Comme U (resp. \bar{V}) est un ouvert (resp. fermé) saturé de X , son image dans X/Y est ouverte (resp. fermée). En particulier l'adhérence de V/Y est contenue dans l'intérieur de U/Y . Par le théorème d'excision 5.15, les inclusions de paires évidentes induisent des isomorphismes

$$H_n(X - V, U - V) \simeq H_n(X, U) \quad \text{et} \quad H_n(X/Y - V/Y, U/Y - V/Y) \simeq H_n(X/Y, U/Y).$$

Comme Y est fermé, on rappelle que $\pi|_{X-Y}$ est un homéomorphisme sur son image. La restriction de π de $(X - V, U - V)$ dans $(X/Y - V/Y, U/Y - V/Y)$ est donc un homéomorphisme. Elle induit par conséquent un isomorphisme en homologie relative.

Il est immédiat de vérifier que la composition des isomorphismes (ci-dessus définis)

$$H_n(X, Y) \simeq H_n(X, U) \simeq H_n(X - V, U - V) \simeq H_n(X/Y - V/Y, U/Y - V/Y) \simeq$$

$$H_n(X/Y, U/Y) \simeq H_n(X/Y, Y/Y)$$

est $\pi_* : H_n(X, Y) \rightarrow H_n(X/Y, Y/Y)$, d'où le résultat. \square

Suite exacte de Mayer-Vietoris

Soit X un espace topologique, U, V deux ouverts de X recouvrant X , et

$$\begin{array}{ccc} U \cap V & \xrightarrow{i_1} & U \\ i_2 \downarrow & & \downarrow j_1 \\ V & \xrightarrow{j_2} & X \end{array}$$

le diagramme commutatif des inclusions. On note $((i_1)_*, -(i_2)_*) : C_*(U \cap V) \rightarrow C_*(U) \times C_*(V)$ l'application $c \mapsto ((i_1)_*c, -(i_2)_*c)$ (on prendra garde à ne pas oublier le signe $-$ dans les calculs). On note $(j_1)_* + (j_2)_* : C_*(U) \times C_*(V) \rightarrow C_*(\{U, V\})$ l'application $(c, c') \mapsto (j_1)_*c + (j_2)_*c'$. On note $X', U', V', i'_1, i'_2, j'_1, j'_2$ une autre telle donnée, et $f : X \rightarrow X'$ une application continue telle que $f(U) \subset U', f(V) \subset V'$.

Proposition 5.18 La suite

$$0 \longrightarrow C_*(U \cap V) \xrightarrow{((i_1)_*, -(i_2)_*)} C_*(U) \times C_*(V) \xrightarrow{(j_1)_* + (j_2)_*} C_*(\{U, V\}) \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte de complexes de chaînes, et le triplet

$$((f|_{U \cap V})_*, (f|_U)_* \times (f|_V)_*, f_*)$$

est un morphisme de suites exactes courtes de complexes de chaînes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_*(U \cap V) & \xrightarrow{((i_1)_*, -(i_2)_*)} & C_*(U) \times C_*(V) & \xrightarrow{(j_1)_* + (j_2)_*} & C_*(\{U, V\}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow (f|_{U \cap V})_* & & \downarrow (f|_U)_* \times (f|_V)_* & & \downarrow f_* \\ 0 & \longrightarrow & C_*(U' \cap V') & \xrightarrow{((i'_1)_*, -(i'_2)_*)} & C_*(U') \times C_*(V') & \xrightarrow{(j'_1)_* + (j'_2)_*} & C_*(\{U', V'\}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Démonstration. Par définition du complexes de chaînes $\{U, V\}$ -petites, l'application $(j_1)_* + (j_2)_*$ est surjective. L'application $((i_1)_*, -(i_2)_*)$, qui est $c \mapsto (c, -c)$ après identification du complexe des chaînes singulières d'une partie de X avec un sous-module du complexe des chaînes singulières de X , est clairement injective. Le diagramme commutatif des inclusions ci-dessus induit un diagramme commutatif

sur les complexes de chaînes singulières, donc l'image de $((i_1)_*, -(i_2)_*)$ est contenue dans le noyau de $(j_1)_* + (j_2)_*$.

Réciproquement, en utilisant des sommes sur les simplexes singuliers de X avec des familles presque nulles d'éléments de l'anneau des coefficients \mathbb{A} , si

$$\sum_{\sigma : \text{im } \sigma \subset U} n_\sigma \sigma + \sum_{\sigma : \text{im } \sigma \subset V} m_\sigma \sigma = 0,$$

alors

$$\sum_{\sigma : \text{im } \sigma \subset U, \text{im } \sigma \not\subset V} n_\sigma \sigma + \sum_{\sigma : \text{im } \sigma \subset V, \text{im } \sigma \not\subset U} m_\sigma \sigma + \sum_{\sigma : \text{im } \sigma \subset (U \cap V)} (n_\sigma + m_\sigma) \sigma = 0,$$

donc, comme le module des chaînes singulières est libre, on a

$$\begin{aligned} n_\sigma &= 0 & \text{si } \text{im } \sigma \subset U, \text{im } \sigma \not\subset V \\ m_\sigma &= 0 & \text{si } \text{im } \sigma \subset V, \text{im } \sigma \not\subset U \\ n_\sigma &= -m_\sigma & \text{si } \text{im } \sigma \subset (U \cap V) \end{aligned} .$$

Ceci montre que tout élément du noyau du morphisme $(j_1)_* + (j_2)_*$ appartient à l'image du morphisme $((i_1)_*, -(i_2)_*)$, ce qui démontre le résultat. \square

Corollaire 5.19 *Pour tout espace topologique X , muni d'un recouvrement ouvert $\{U, V\}$, il existe une suite exacte longue de modules, dite suite exacte de Mayer-Vietoris de X ,*

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow H_{n+1}(X) \xrightarrow{\delta} H_n(U \cap V) \xrightarrow{((i_1)_*, -(i_2)_*)} H_n(U) \times H_n(V) \xrightarrow{(j_1)_* + (j_2)_*} H_n(X) \\ \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(U \cap V) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

telle que, pour tout espace topologique X' , muni d'un recouvrement ouvert $\{U', V'\}$, pour toute application continue $f : X \rightarrow X'$ telle que $f(U) \subset U', f(V) \subset V'$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & H_n(U \cap V) & \xrightarrow{((i_1)_*, -(i_2)_*)} & H_n(U) \times H_n(V) & \xrightarrow{(j_1)_* + (j_2)_*} & H_n(X) & \xrightarrow{\delta} & H_{n-1}(U \cap V) \dots \\ & \downarrow (f|_{U \cap V})_* & & \downarrow (f|_U)_* \times (f|_V)_* & & \downarrow f_* & & \downarrow (f|_{U \cap V})_* \\ \dots & H_n(U' \cap V') & \xrightarrow{((i'_1)_*, -(i'_2)_*)} & H_n(U') \times H_n(V') & \xrightarrow{(j'_1)_* + (j'_2)_*} & H_n(X') & \xrightarrow{\delta} & H_{n-1}(U' \cap V') \dots \end{array}$$

Démonstration. Le théorème 5.2 des rappels d'algèbre homologique associe, de manière fonctorielle, une suite exacte longue en homologie à toute suite exacte courte de complexes de chaînes. On l'applique à la proposition précédente. Le résultat en découle, en appliquant le théorème des petites chaînes 5.13, et la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} C_*\{U, V\} & \longrightarrow & C_*(X) \\ f_* \downarrow & & \downarrow f_* \\ C_*\{U', V'\} & \longrightarrow & C_*(X') \end{array} .$$

\square

Remarques. (1) Dans certaines applications, on n'a pas besoin de connaître explicitement les morphismes dans les suites exactes de Mayer-Vietoris, leur existence suffisant. On omettra donc de les désigner nommément, pour simplifier les notations. Mais par défaut, les morphismes seront ceux indiqués ci-dessus.

(2) Le corollaire ci-dessus reste vrai si U, V sont des sous-espaces de X qui sont des rétractes par déformation forte, préservant $U \cap V$, de voisinages. C'est par exemple le cas si U, V sont des variétés différentielles à bord dans une variété différentielle X , ou si X est un CW-complexe et U, V des sous-CW-complexes.

5.3 Quelques calculs et applications de l'homologie

Les applications qui seront présentées ci-dessous utilisent de manière essentielle la valeur des groupes d'homologie (singulière) des sphères, et la fonctorialité de l'homologie (singulière).

Calcul de l'homologie des sphères

On note encore \mathbb{A} l'anneau (commutatif unitaire) des coefficients.

Théorème 5.20 *Pour tous p, n dans \mathbb{N} ,*

$$H_p(\mathbb{S}_n, \mathbb{A}) = \begin{cases} \mathbb{A} \oplus \mathbb{A} & \text{si } 0 = p = n \\ \mathbb{A} & \text{si } 0 = p < n \\ 0 & \text{si } 0 < p < n \\ \mathbb{A} & \text{si } 0 < p = n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$

Démonstration. Si $n = 0$, alors $\mathbb{S}_n = \{-1, +1\}$, et le résultat est déjà connu (voir le paragraphe avant proposition 5.6 et l'exercice E.52). On suppose donc $n \geq 1$.

Si $p = 0$, alors le résultat est déjà connu, car \mathbb{S}_n est connexe par arcs (proposition 5.6). On suppose donc $p \geq 1$.

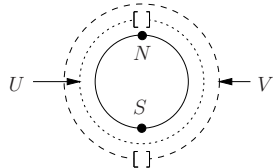
On montre le résultat par récurrence sur p . Soit N le pôle nord de \mathbb{S}_n , S le pôle sud de \mathbb{S}_n , $U = \mathbb{S}_n - \{N\}$, $V = \mathbb{S}_n - \{S\}$. Alors U, V sont des ouverts contractiles, donc ont la même homologie que le point. L'inclusion $\mathbb{S}_{n-1} \hookrightarrow U \cap V$ est une équivalence d'homotopie (car $U \cap V$ se rétracte par déformation forte sur \mathbb{S}_{n-1} le long des grands cercles passant par les pôles). Elle induit donc un isomorphisme en homologie.

Pour $p = 1$, la suite exacte de Mayer-Vietoris appliquée à l'espace topologique \mathbb{S}_n muni du recouvrement ouvert $\{U, V\}$ donne une suite exacte

$$H_1(U) \times H_1(V) \longrightarrow H_1(\mathbb{S}_n) \longrightarrow H_0(U \cap V) \xrightarrow{\phi} H_0(U) \times H_0(V) .$$

Le module $H_1(U) \times H_1(V)$ est nul, donc $H_1(\mathbb{S}_n)$ s'injecte dans $H_0(U \cap V)$. Le module $H_0(U) \times H_0(V)$ est isomorphe à $\mathbb{A} \times \mathbb{A}$. Si $n > 1$, alors $H_0(U \cap V) \simeq H_0(\mathbb{S}_{n-1}) \simeq \mathbb{A}$ et l'application ϕ s'écrit $x \mapsto (x, -x)$. En particulier, ϕ est injective, donc par exactitude, $H_1(\mathbb{S}_n) = 0$.

Si $n = 1$, alors $H_0(U \cap V) \simeq H_0(\mathbb{S}_0) \simeq \mathbb{A} \times \mathbb{A}$. L'application ϕ s'écrit $(x, y) \mapsto (x + y, -(x + y))$, car les deux composantes connexes par arcs de $U \cap V$, qui forment une base de $H_0(U \cap V)$, s'envoient sur la seule composante connexe par arcs de U , qui engendre $H_0(U)$, et de même pour V . En particulier, le noyau de ϕ est isomorphe à \mathbb{A} , donc par exactitude, $H_1(\mathbb{S}_1) = \mathbb{A}$.



Pour $p > 1$, la suite exacte de Mayer-Vietoris appliquée à l'espace topologique \mathbb{S}_n muni du recouvrement ouvert $\{U, V\}$ donne une suite exacte

$$H_p(U) \times H_p(V) \longrightarrow H_p(\mathbb{S}_n) \longrightarrow H_{p-1}(U \cap V) \longrightarrow H_{p-1}(U) \times H_{p-1}(V).$$

Les modules aux extrémités étant nuls, on a un isomorphisme $H_p(\mathbb{S}_n) \simeq H_{p-1}(U \cap V) \simeq H_{p-1}(\mathbb{S}_{n-1})$. On conclut par récurrence. \square

Le théorème du point fixe de Brouwer

On renvoie à l'introduction pour l'énoncé (corollaire 1.2) et la preuve du théorème du point fixe de Brouwer. Les seuls outils utilisés étaient la valeur des groupes d'homologie des sphères, calculées ci-dessus (théorème 5.20), la valeur des groupes d'homologie des boules (qui découle du corollaire 5.9), et la fonctorialité de l'homologie singulière.

Homologie et limite inductive

Le premier résultat suivant dit essentiellement que pour calculer les groupes d'homologies, il suffit de le faire pour les espaces compacts. On rappelle d'abord quelques notions sur les limites inductives, que l'on prendra garde à ne pas confondre avec les notions homonymes introduites pour les groupes avant la proposition 4.3.

Un *ordre inductif* sur un ensemble I est un ordre partiel \leq tel que

$$\forall i, j \in I, \exists k \in I, \quad i \leq k \quad \text{et} \quad j \leq k.$$

Par exemple, tout ordre total est inductif. L'exemple le plus utilisé en pratique est celui de l'ensemble \mathbb{N} muni de son ordre usuel.

Une *famille inductive* dans une catégorie est la donnée, notée (X_i, f_{ij}) , d'un ensemble I muni d'un ordre inductif, d'une famille d'objets $(X_i)_{i \in I}$ et d'une famille de morphismes $(f_{ji} : X_i \rightarrow X_j)_{i \leq j}$ tels que

- (1) $\forall i \in I, \quad f_{ii} = id_{X_i}$
- (2) $\forall i \leq j \leq k, \quad f_{ki} = f_{kj} \circ f_{ji}$

Si X est un ensemble, une *famille inductive de parties* de X est une famille inductive dans la catégorie dont les objets sont les parties de X et l'ensemble des morphismes entre deux parties de X est vide ou réduit à l'inclusion. Plus simplement, c'est une famille $(X_i)_{i \in I}$ de parties de X , telle que l'ordre sur I défini par l'inclusion

($i \leq j$ si et seulement si $X_i \subset X_j$) est inductif. Par exemple, une suite croissante de parties de X est une famille inductive de parties de X . Si X est un espace topologique, une famille inductive de parties $(X_i)_{i \in I}$ dans X sera dite *complète* si tout compact de X est contenu dans l'un des X_i .

Exemples. (1) Toute suite croissante d'ouverts de X , de réunion X , est une famille inductive complète de parties de X .

(2) Si X est séparé, la famille de tous les compacts de X est une famille inductive complète de parties de X , car la réunion de deux compacts de X est un compact de X .

(3) Une *suite exhaustive de compacts* de X est une suite $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de compacts de X tels que $K_i \subset \overset{\circ}{K}_{i+1}$, et $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i = X$. Par exemple, tout espace localement compact séparé admet une suite exhaustive de compacts. Toute suite exhaustive de compacts de X est une famille inductive complète de parties de X .

Soit \mathbb{A} un anneau commutatif unitaire. On rappelle que si $(E_i)_{i \in I}$ est une famille de modules, alors $\bigoplus_{i \in I} E_i$ est le module des *sommes presque nulles* $\sum_{i \in I} x_i$ avec les x_i dans E_i , nuls sauf un nombre fini d'entre eux. On identifie E_i à un sous-module de $\bigoplus_{i \in I} E_i$ par l'application $x \mapsto \sum_{j \in I} x_j$ avec $x_j = 0$ si $j \neq i$ et $x_i = x$.

Soit (E_i, g_{ij}) une famille inductive de modules, on appelle *limite inductive* de (E_i, g_{ij}) le module quotient

$$\varinjlim (E_i, g_{ij}) = \left(\bigoplus_{i \in I} E_i \right) / F$$

avec F le sous-module de $\bigoplus_{i \in I} E_i$ engendré par les éléments de la forme $x - g_{ji}(x)$ avec $i \leq j$ et $x \in E_i$ $g_{ki}(x) = 0$. (Il est facile de vérifier, en utilisant le fait que l'ordre sur I est inductif, que la limite inductive admet aussi la définition suivante. On considère la relation \sim sur la réunion disjointe $\coprod E_i$, définie par $x \sim y$, avec x dans E_j et y dans E_k , s'il existe $i \geq j, k$ tels que $f_{ij}(x) = f_{ik}(y)$. On montre que c'est une relation d'équivalence, et que si $[x]$ désigne la classe d'équivalence de x , si x est dans E_j et y est dans E_k , alors la formule $\lambda[x] + \lambda[y] = [\lambda f_{ij}(x) + \mu f_{ik}(y)]$ pour tout $i \geq j, k$, définit une structure de module sur l'ensemble des classes d'équivalences, telle que l'application $[x] \mapsto x + F$ soit un isomorphisme de modules sur la limite inductive.

Lorsque les morphismes sont sous-entendus, on note aussi $\varinjlim E_i$ ou $\varinjlim_i E_i$ cette limite inductive.

Remarque. La limite inductive est solution d'un problème universel, qu'on laisse au lecteur le soin de formuler et de vérifier.

Soit X un espace topologique, et $(X_i)_{i \in I}$ une famille inductive de parties de X , avec $f_{ji} : X_i \rightarrow X_j$ l'inclusion si $i \leq j$. Alors $(H_*(X_i), (f_{ij})_*)$ est une famille inductive de modules et de morphismes de modules. Si $f_i : X_i \rightarrow X$ est l'inclusion, alors le

diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{f_{ji}} & X_j \\ f_i \searrow & & \swarrow f_j \\ & X & \end{array}$$

est commutatif, donc induit un diagramme commutatif en homologie. En particulier, le morphisme $\phi = \bigoplus_{i \in I} (f_i)_* : \bigoplus_{i \in I} H_*(X_i) \rightarrow H_*(X)$ passe au quotient en un morphisme

$$\tilde{\phi} : \varinjlim H_*(X_i) \rightarrow H_*(X).$$

Proposition 5.21 *Soit X un espace topologique séparé, $(X_i)_{i \in I}$ une famille inductive complète de parties de X . Alors le morphisme $\tilde{\phi} : \varinjlim H_*(X_i) \rightarrow H_*(X)$ défini ci-dessus est un isomorphisme.*

Démonstration. On appelle *support* d'une chaîne singulière $c = \sum_{p=1}^n a_i \sigma_i$ d'un espace topologique Y la réunion des images des simplexes singuliers σ_i dont le coefficient a_i est non nul.

Comme X est séparé, toute chaîne singulière de X est à support dans un compact de X , donc dans un X_i . Donc l'application $\tilde{\phi}$ est surjective.

Soit $c = \sum_{i \in I} c_i$ une somme presque nulle de chaînes singulières c_i dans X_i , qui est un bord $c = \partial b$ dans X . Alors il existe $k \in I$ tel que X_k contienne le support de b et les X_i avec c_i non nulle. Donc c est une chaîne singulière dans X_k , qui est un bord dans X_k . Par conséquent, l'application $\tilde{\phi}$ est injective. \square

Homologie du complémentaire d'une sphère dans une sphère

On commence par le calcul de l'homologie du complémentaire dans la sphère \mathbb{S}_n d'une partie homéomorphe à une boule.

Lemme 5.22 *Soit A un sous-espace de \mathbb{S}_n homéomorphe à \mathbb{B}_k , avec $0 \leq k \leq n$. Alors*

$$H_j(\mathbb{S}_n - A, \mathbb{A}) = \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } j = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur k . Si $k = 0$, alors A est réduit à un point, et $\mathbb{S}_n - A$ est homéomorphe à \mathbb{R}^n , donc le résultat est connu.

Soit $k \geq 1$. On suppose le résultat vrai pour $k - 1$. Soit A une partie de \mathbb{S}_n homéomorphe à \mathbb{B}_k , avec $n \geq k$, et $f : A \rightarrow [0, 1]^k$ un homéomorphisme. Soient

$$I_+ = \{(x_1, \dots, x_k) \in [0, 1]^k : x_1 \geq \frac{1}{2}\}, \quad I_- = \{(x_1, \dots, x_k) \in [0, 1]^k : x_1 \leq \frac{1}{2}\}$$

et $A_{\pm} = f^{-1}(I_{\pm})$. En particulier, $B = A_+ \cap A_-$ est homéomorphe à \mathbb{B}_{k-1} . Comme A_{\pm} est un compact de \mathbb{S}_n , les sous-espaces $\mathbb{S}_n - A_+$, $\mathbb{S}_n - A_-$ sont ouverts. Leur

réunion est $\mathbb{S}_n - B$, leur intersection $\mathbb{S}_n - A$. Si $i_{\pm} : \mathbb{S}_n - A \rightarrow \mathbb{S}_n - A_{\pm}$ est l'inclusion, la suite exacte de Mayer-Vietoris donne une suite exacte

$$H_{j+1}(\mathbb{S}_n - B) \longrightarrow H_j(\mathbb{S}_n - A) \xrightarrow{((i_+)_*, -(i_-)_*)} H_j(\mathbb{S}_n - A_+) \times H_j(\mathbb{S}_n - A_-) \longrightarrow H_j(\mathbb{S}_n - B).$$

Par récurrence, $((i_+)_*, -(i_-)_*)$ est injective.

On suppose d'abord $j > 0$. On suppose par l'absurde qu'il existe un élément non nul x dans $H_j(\mathbb{S}_n - A)$. Alors $(i_+)_*(x) \neq 0$ ou $(i_-)_*(x) \neq 0$. On suppose par exemple que le premier cas est vrai, et on pose $A_1 = A_+$. Par dichotomies successives, on construit une suite décroissante $A = A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots$ de sous-espaces de \mathbb{S}_n homéomorphes à \mathbb{B}_k , avec $C = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$ homéomorphe à \mathbb{B}_{k-1} , et telle que l'application $H_j(\mathbb{S}_n - A) \rightarrow H_j(\mathbb{S}_n - A_k)$ (induite par l'inclusion) envoie x sur un élément non nul x_k .

Comme tout compact de $\mathbb{S}_n - C$ est contenu dans un $\mathbb{S}_n - A_k$ pour tout k assez grand, la suite $(\mathbb{S}_n - A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite inductive complète de parties de $\mathbb{S}_n - C$. La proposition 5.21 implique que

$$\varinjlim H_j(\mathbb{S}_n - A_k) \simeq H_j(\mathbb{S}_n - C).$$

En particulier, comme aucun x_k n'est nul, l'application $H_j(\mathbb{S}_n - A) \rightarrow H_j(\mathbb{S}_n - C)$ (induite par l'inclusion) envoie x sur un élément non nul. Ceci contredit le fait que par récurrence, $H_j(\mathbb{S}_n - C) = 0$.

On suppose maintenant $j = 0$. Il s'agit de montrer que $H_0(\mathbb{S}_n - A)$ est isomorphe à \mathbb{A} . On rappelle que $H_0(X)$ est le module libre engendré par les composantes connexes par arcs de X , et que si Y est un sous-espace de X , alors l'inclusion $Y \rightarrow X$ induit l'unique morphisme de modules $H_0(Y) \rightarrow H_0(X)$ envoyant une composante connexe par arcs de Y sur la composante connexe par arcs de X la contenant.

On suppose par l'absurde qu'il existe deux composantes connexes par arcs distinctes x, y de $\mathbb{S}_n - A$. On construit par dichotomie une suite décroissante $A = A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots$ de sous-espaces de \mathbb{S}_n homéomorphes à \mathbb{B}_k , avec $C = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$ homéomorphe à \mathbb{B}_{k-1} , et telle que l'application $H_0(\mathbb{S}_n - A) \rightarrow H_0(\mathbb{S}_n - A_k)$ (induite par l'inclusion) envoie x, y sur deux composantes connexes par arcs distinctes x_k, y_k de $\mathbb{S}_n - A_k$. Comme $H_j(\mathbb{S}_n - C) \simeq \varinjlim H_j(\mathbb{S}_n - A_k)$, les deux composantes connexes par arcs de $\mathbb{S}_n - C$ contenant x, y respectivement sont distinctes. Ceci contredit le fait que, par récurrence, $H_0(\mathbb{S}_n - C) = \mathbb{A}$. \square

Proposition 5.23 *Soit B un sous-espace de \mathbb{S}_n homéomorphe à \mathbb{S}_k , avec $0 \leq k \leq n - 1$. Alors*

$$H_j(\mathbb{S}_n - B, \mathbb{A}) = \begin{cases} \mathbb{A} \oplus \mathbb{A} & \text{si } j = 0 \text{ et } k = n - 1 \\ \mathbb{A} & \text{si } j = 0 \text{ et } k < n - 1 \\ \mathbb{A} & \text{si } j = n - k - 1 \text{ et } k < n - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur k . Si $k = 0$, alors B a deux points. Donc $\mathbb{S}_n - B$ a le type d'homotopie de \mathbb{S}_{n-1} , et le résultat est déjà connu.

On suppose le résultat vrai pour k . Soit B un sous-espace de \mathbb{S}_n homéomorphe à \mathbb{S}_{k+1} , avec $0 \leq k+1 \leq n-1$. En considérant par exemple les hémisphères nord et sud de \mathbb{S}_{k+1} , on écrit $B = B_+ \cup B_-$ avec B_{\pm} homéomorphes à \mathbb{B}_{k+1} et $C = B_+ \cap B_-$ homéomorphe à \mathbb{S}_k . En particulier, $\{\mathbb{S}_n - B_+, \mathbb{S}_n - B_-\}$ est un recouvrement ouvert de $\mathbb{S}_n - C$.

On suppose d'abord $j > 0$. La suite exacte de Mayer-Vietoris donne une suite exacte

$$H_{j+1}(\mathbb{S}_n - B_+) \times H_{j+1}(\mathbb{S}_n - B_-) \longrightarrow H_{j+1}(\mathbb{S}_n - C) \longrightarrow H_j(\mathbb{S}_n - B) \longrightarrow H_j(\mathbb{S}_n - B_+) \times H_j(\mathbb{S}_n - B_-).$$

Par le lemme 5.22, les modules aux deux extrémités sont nuls. Donc $H_{j+1}(\mathbb{S}_n - C) \simeq H_j(\mathbb{S}_n - B)$. Par récurrence, comme $k < n-1$, on a

$$H_{j+1}(\mathbb{S}_n - C) = \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } j+1 = n-k-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Comme $k+1 < n-1$ si $j+1 = n-k-1$ et $j > 0$, on a donc

$$H_j(\mathbb{S}_n - B) = \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } j = n-(k+1)-1 \text{ et } k+1 < n-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

ce qui montre le résultat.

On suppose maintenant $j = 0$. La suite exacte de Mayer-Vietoris donne une suite exacte

$$H_1(\mathbb{S}_n - B_+) \times H_1(\mathbb{S}_n - B_-) \longrightarrow H_1(\mathbb{S}_n - C) \longrightarrow H_0(\mathbb{S}_n - B) \longrightarrow H_0(\mathbb{S}_n - B_+) \times H_0(\mathbb{S}_n - B_-) \longrightarrow H_0(\mathbb{S}_n - C) \longrightarrow 0.$$

On applique l'hypothèse de récurrence et le lemme 5.22. Si $k+1 < n-1$, alors cette suite exacte s'écrit

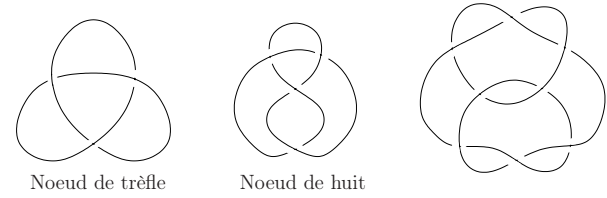
$$0 \rightarrow 0 \rightarrow H_0(\mathbb{S}_n - B) \rightarrow \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A} \rightarrow 0.$$

Donc $H_0(\mathbb{S}_n - B) \simeq \mathbb{A}$. Si $k+1 = n-1$, alors on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{A} \rightarrow H_0(\mathbb{S}_n - B) \rightarrow \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A} \rightarrow 0.$$

Donc $H_0(\mathbb{S}_n - B) \simeq \mathbb{A} \times \mathbb{A}$, ce qui termine la preuve. \square

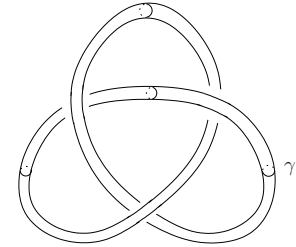
Comme première application, on étudie le cas $n = 3, k = 1$, c'est à dire le cas des cercles plongés dans \mathbb{S}_3 . Une partie K de la sphère \mathbb{S}_3 est appelée un *noeud* s'il existe $f : \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_3$ un homéomorphisme sur son image tel que $f(\mathbb{S}_1) = K$. Deux noeuds sont dit *isomorphes* s'il existe un homéomorphisme de \mathbb{S}_3 dans lui-même qui envoie l'un sur l'autre. En identifiant \mathbb{S}_3 avec le compactifié d'Alexandrov de \mathbb{R}^3 , prendre des projections sur des plans de \mathbb{R}^3 permet de représenter graphiquement des noeuds. En voici quelques exemples, on pourra consulter le livre [Rol] et ses tables pour d'autres exemples.



Corollaire 5.24 Si K est un noeud dans \mathbb{S}_3 , alors $H_j(\mathbb{S}_3 - K, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } j = 0, 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

\square

Le fait le plus important est que $H_1(\mathbb{S}_3 - K, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Un générateur de $H_1(\mathbb{S}_3 - K, \mathbb{Z})$ est fourni par un lacet γ contenu dans le bord d'un voisinage tubulaire de K , non homotope à zéro dans ce bord, mais bordant un disque contenu dans le voisinage tubulaire.



En particulier, on ne peut pas distinguer deux noeuds par l'homologie de leur complémentaire : les complémentaires de deux noeuds ont la même homologie. Mais le noeud trivial $\mathbb{S}_1 \subset \mathbb{S}_3$ et le noeud de trèfle, par exemple, ne sont pas isomorphes (voir par exemple [Rol]).

Le théorème de séparation de Jordan-Brouwer

Théorème 5.25 (Théorème de séparation de Jordan-Brouwer) Une partie de \mathbb{S}_n homéomorphe à \mathbb{S}_{n-1} sépare \mathbb{S}_n en deux composantes connexes, et est la frontière de chacune d'entre elles.

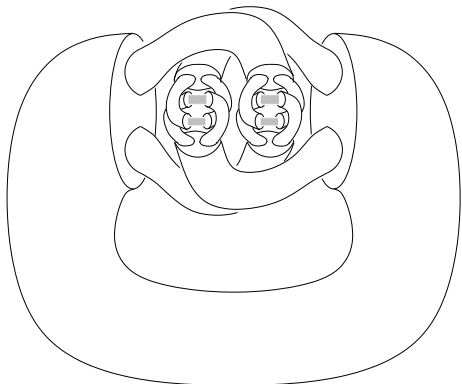
Démonstration. Soit B une partie de \mathbb{S}_n homéomorphe à \mathbb{S}_{n-1} . Comme B est compacte, $\mathbb{S}_n - B$ est un ouvert de \mathbb{S}_n . Donc les composantes connexes de $\mathbb{S}_n - B$ sont ses composantes connexes par arcs. Par la proposition 5.23, $H_0(\mathbb{S}_n - B, \mathbb{Z})$, qui est le groupe abélien libre engendré par les composantes connexes par arcs de $\mathbb{S}_n - B$, est isomorphe à $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Donc B sépare \mathbb{S}_n en deux composantes connexes, que l'on note C_1, C_2 .

Soit $i \in \{1, 2\}$. Puisque $C_i \cup B$ est fermé, la frontière $\partial C_i = \overline{C_i} - C_i$ de C_i est contenue dans B . Il suffit donc de montrer que $B \subset \partial C_i$. Soit $x \in B$, et U un voisinage quelconque de x dans \mathbb{S}_n . Par symétrie, il suffit de montrer que U contient un point de C_1 .

Puisque B est homéomorphe à \mathbb{S}_{n-1} , il existe une partie A de $U \cap B$ telle que $x \in A$ et $B - A$ est homéomorphe à \mathbb{B}_{n-1} . Par le lemme 5.22, $H_0(\mathbb{S}_n - (B - A), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$,

donc $\mathbb{S}_n - (B - A)$ est connexe par arcs. Soit $x \in C_1$, $y \in C_2$, et γ un chemin de x à y contenu dans $\mathbb{S}_n - (B - A)$. Comme C_1, C_2 sont des composantes connexes distinctes de $\mathbb{S}_n - B$, le chemin γ doit rencontrer A . Le premier point d'intersection de γ avec A appartient à la frontière de C_1 . Donc U contient un point de C_1 , ce qui montre le résultat. \square

Remarque. Les deux composantes connexes du complémentaire d'un cercle dans le plan sont homéomorphes à des disques ouverts. Mais ceci n'est pas vrai en dimension supérieure.



En effet, l'adhérence de la composante connexe bornée du complémentaire dans \mathbb{R}^3 de la *sphère à cornes d'Alexander* ci-dessus est homéomorphe à \mathbb{B}_3 . En particulier, la sphère à cornes d'Alexander est homéomorphe à \mathbb{S}_2 . Mais son complémentaire dans \mathbb{S}_3 n'est pas simplement connexe (en fait, son groupe fondamental n'est pas de type fini), voir par exemple [Rol, page 80].

Le théorème d'invariance du domaine de Brouwer

On a déjà énoncé et démontré en l'introduction (corollaire 1.1), une première version du théorème d'invariance du domaine de Brouwer, à savoir que si $n \neq m$, alors \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m ne sont pas homéomorphes. Les seuls outils utilisés étaient la valeur des groupes d'homologie des sphères (théorème 5.20), et la functorialité de l'homologie singulière. On donne ci-dessous la version plus générale.

Théorème 5.26 (Théorème d'invariance du domaine de Brouwer II) *Si U, V sont des parties de \mathbb{R}^n homéomorphes, et si U est ouvert dans \mathbb{R}^n , alors V est ouvert dans \mathbb{R}^n .*

Démonstration. L'espace \mathbb{R}^n est homéomorphe à l'ouvert de \mathbb{S}_n , complémentaire de n'importe quel point de \mathbb{S}_n . Ce théorème est donc équivalent au théorème obtenu

en remplaçant \mathbb{R}^n par \mathbb{S}_n . Soit y un point de V , et $h : U \rightarrow V$ un homéomorphisme. Soit x dans U tel que $h(x) = y$, et A un voisinage de x homéomorphe à \mathbb{B}_n , et de frontière B homéomorphe à \mathbb{S}_{n-1} . Soit $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$. Par le lemme 5.22, l'espace $\mathbb{S}_n - A'$ est connexe. Par le théorème 5.25, l'espace $\mathbb{S}_n - B'$ admet deux composantes connexes. Comme $\mathbb{S}_n - B' = (\mathbb{S}_n - A') \cup (A' - B')$ et que $\mathbb{S}_n - A'$ et $A' - B'$ sont connexes et disjoints, ce sont les composantes connexes de $\mathbb{S}_n - B'$. Donc $A' - B'$ est ouvert dans \mathbb{S}_n , car dans un espace localement connexe par arcs, comme l'est l'ouvert $\mathbb{S}_n - B'$ de \mathbb{S}_n , les composantes connexes sont ouvertes (voir l'appendice, avant la sous-section A.2). Comme $y' \in A' - B' \subset V$, ceci montre que V est ouvert. \square

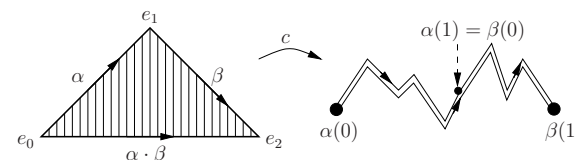
Rappelons qu'une variété topologique est un espace topologique (en général supposé métrisable, séparable), dans lequel tout point x admet un voisinage homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^n . Si X est connexe, l'entier n ci-dessus est bien défini, et est indépendant du point x . Cet entier est appelé la *dimension* de X .

5.4 Groupe fondamental et homologie : le théorème d'Hurewicz

Dans toute cette partie, l'anneau des coefficients \mathbb{A} est l'anneau des entiers \mathbb{Z} .

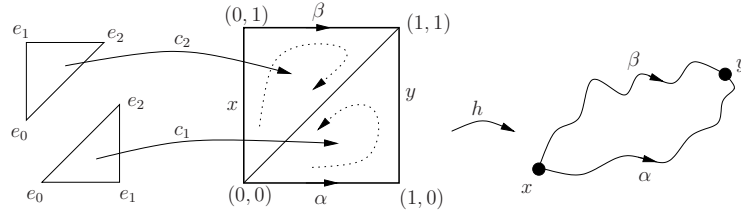
Soit X un espace topologique. On rappelle que, via l'identification de $[0, 1]$ avec Δ_1 par $t \mapsto (1-t)e_0 + te_1$, on identifie un chemin dans X avec un 1-simplexe singulier de X .

Lemme 5.27 *Si α, β sont deux chemins composables dans X , alors il existe une 2-chaîne singulière à coefficients entiers $c \in C_2(X, \mathbb{Z})$ telle que $\alpha \cdot \beta = \alpha + \beta - \partial c$.*



Démonstration. On pose $c : \Delta_2 \rightarrow X$ l'unique application telle que $c((1-s)e_1 + se_2) = \beta(s)$, $c((1-s)e_0 + se_2) = (\alpha \cdot \beta)(s)$, $c((1-s)e_0 + se_1) = \alpha(s)$, et c est constante sur les segments parallèles à $[e_1, \frac{1}{2}(e_0 + e_2)]$. Il est immédiat de vérifier que c est continue, avec $\partial c = \beta - \alpha \cdot \beta + \alpha$. \square

Lemme 5.28 *Si α, β sont deux chemins homotopes dans X , alors il existe une 2-chaîne singulière à coefficients entiers $c \in C_2(X, \mathbb{Z})$ telle que $\alpha = \beta + \partial c$.*



Démonstration. Soit $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ une homotopie (relativement extrémités) entre α et β . On note c_1, c_2 les 2-simplexes singuliers de $[0, 1] \times [0, 1]$, qui sont les uniques applications affines telles que $c_1(e_0) = (0, 0), c_1(e_1) = (1, 0), c_1(e_2) = (1, 1)$ et $c_2(e_0) = (0, 0), c_2(e_1) = (0, 1), c_2(e_2) = (1, 1)$. Pour $z \in X$, on note $c_z : \Delta_2 \rightarrow X$ le 2-simplexe singulier de X constant en z , dont le bord ∂c_z est $(1 - 1 + 1)\epsilon_z = \epsilon_z$ respectivement, avec ϵ_z le chemin constant en z . On pose alors $c = h \circ c_1 - h \circ c_2 - c_x + c_y$, qui est une 2-chaîne singulière à coefficients entiers. Il est immédiat de vérifier que $\partial c = \alpha - \beta$. \square

Proposition 5.29 Soit X un espace topologique pointé en $x \in X$. L'application $\tilde{\phi}$ de l'ensemble des lacets en x dans $H_1(X, \mathbb{Z})$, qui à un lacet α associe la classe d'homologie du 1-simplexe singulier α , passe au quotient en un morphisme de groupes $\phi : \pi_1(X, x) \rightarrow H_1(X, \mathbb{Z})$, appelé morphisme de Hurewicz.

Démonstration. D'abord, tout lacet α est un 1-simplexe singulier qui est un 1-cycle, car $\partial \alpha = \alpha(1) - \alpha(0) = 0$, donc $\tilde{\phi}$ est bien définie.

L'application $\tilde{\phi}$ passe au quotient par le lemme 5.28. Elle est compatible avec les lois de compositions $\tilde{\phi}(\alpha \cdot \beta) = \tilde{\phi}(\alpha) + \tilde{\phi}(\beta)$ par le lemme 5.27. Enfin, si $\bar{\alpha}$ est le chemin inverse de α , alors, comme $\alpha \cdot \bar{\alpha}$ est homotope au lacet constant en x , et comme un 1-simplexe singulier constant est un bord, il découle des lemmes 5.27 et 5.28 que $\tilde{\phi}(\bar{\alpha}) = -\tilde{\phi}(\alpha)$. Le résultat s'en déduit. \square

Avant d'énoncer le théorème de Hurewicz, on donne quelques rappels de théorie des groupes.

Soit G un groupe. Le sous-groupe des commutateurs $[G, G]$ (auss appelé sous-groupe dérivé) de G est le sous-groupe de G engendré par les commutateurs $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ avec x, y dans G . Par exemple, si G est abélien, alors son sous-groupe des commutateurs est trivial.

On rappelle que $[G, G]$ est distingué, car $a[x, y]a^{-1} = [axa^{-1}, aya^{-1}]$. Le quotient $G/[G, G]$ s'appelle l'abélianisé de G . C'est le "plus grand quotient abélien" de G , au sens que si H est un groupe abélien, et si $f : G \rightarrow H$ est un morphisme de groupes, alors il existe un morphisme de groupes $\tilde{f} : G/[G, G] \rightarrow H$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ G/[G, G] & & \end{array} .$$

Par exemple, l'abélianisé du groupe libre engendré par S est le groupe abélien libre engendré par S :

$$L(x_1, \dots, x_n) / [L(x_1, \dots, x_n), L(x_1, \dots, x_n)] = \mathbb{Z}^n .$$

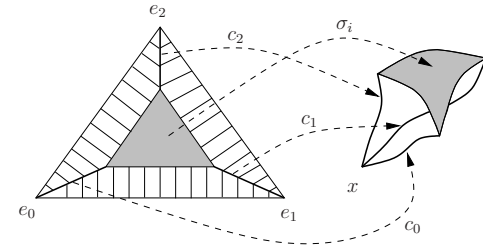
Théorème 5.30 (Théorème de Hurewicz) Si X est un espace topologique, connexe par arcs, pointé en x , alors le morphisme de Hurewicz $\phi : \pi_1(X, x) \rightarrow H_1(X, \mathbb{Z})$ est surjectif, et de noyau le sous-groupe des commutateurs de $\pi_1(X, x)$.

Le premier groupe d'homologie de X à coefficients entiers s'identifie donc à l'abélianisé du groupe fondamental de X . En particulier, lorsque $\pi_1(X, x)$ est abélien, alors $H_1(X, \mathbb{Z})$ est isomorphe à $\pi_1(X, x)$. Si X est simplement connexe, alors $H_1(X, \mathbb{Z}) = 0$.

Démonstration. Pour montrer que ϕ est surjective, montrons que tout 1-cycle singulier $\sum_{i=1}^k n_i \sigma_i$ de X est homologue à un lacet. Quitte à dupliquer les σ_i en changeant les noms, on peut supposer que $n_i = \pm 1$. Comme $-\sigma$ est homologue à $\bar{\sigma}$, on peut supposer que $n_i = 1$. Si σ_i n'est pas un lacet, comme $\partial(\sum_{i=1}^k \sigma_i) = 0$, il existe j tel que σ_i et σ_j sont compossables. Comme $\sigma_i + \sigma_j$ est homologue à $\sigma_i \cdot \sigma_j$, et par récurrence, on peut donc supposer que chaque σ_i est un lacet. Comme X est connexe par arcs, soit α_i un chemin d'origine x et d'extrémité l'origine de σ_i . Comme $\alpha_i \cdot \sigma_i \cdot \bar{\alpha}_i$ est homologue à σ_i , on peut supposer que chaque σ_i est un lacet en x_0 . Alors $\sum_{i=1}^k \sigma_i$ est homologue à $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \dots \cdot \sigma_k$.

Le sous-groupe des commutateurs de $\pi_1(X, x)$ est contenu dans $\ker \phi$, car $H_1(X, \mathbb{Z})$ est abélien. Réciproquement, montrons que, pour tout lacet α homologue à zéro, l'image de la classe d'homotopie de α dans l'abélianisé de $\pi_1(X, x)$ est triviale. Soit $\sum_{i=1}^k n_i \sigma_i$ un 2-cycle singulier tel que $\partial(\sum_{i=1}^k n_i \sigma_i) = \alpha$.

Chaque σ_i est homotope, donc homologue, à un 2-simplexe singulier dont les trois sommets sont égaux à x . En effet, on note λ_t l'homothétie euclidienne de rapport t et de centre le barycentre de Δ_2 . On considère les chemins c_0, c_1, c_2 joignant x à chaque sommet $\sigma_i(e_0), \sigma_i(e_1), \sigma_i(e_2)$ de σ_i .



Pour s dans $[0, 1]$, on considère alors l'application continue h_s de Δ_2 dans X , qui vaut $\sigma_i \circ \lambda_{\frac{1-s}{2}}^{-1}$ sur $\lambda_{\frac{1+s}{2}}(\Delta_2)$, qui vaut c_j en $(1-t)e_j + t\lambda_{\frac{1+s}{2}}(e_j)$ pour $j = 0, 1, 2$, et,

qui sur chaque composante connexe C de $\Delta_2 - (\lambda_{\frac{1+\varepsilon}{2}}(\Delta_2) \cup \cup_{j=0,1,2}[e_j, \lambda_{\frac{1+\varepsilon}{2}}(e_j)])$, est constant sur les segments perpendiculaires au côté de Δ_2 contenu dans l'adhérence de C .

On peut donc supposer que les sommets de σ_i sont égaux à x . Comme ci-dessus, on peut supposer que $n_i = \pm 1$. Pour $j = 0, 1, 2$, soit σ_{ij} la j -ème face de σ_i , de sorte que $\partial\sigma_i = \sigma_{i0} - \sigma_{i1} + \sigma_{i2}$. Comme $\alpha = \partial(\sum_{i,j} (-1)^j n_i \sigma_{ij})$, il est possible de regrouper les σ_{ij} , sauf un, par paires pour lesquels les deux coefficients $(-1)^j n_i$ valent $+1$ et -1 . Le σ_{ij} restant vaut α . On remarque que chaque σ_{ij} est un lacet en x . On note entre crochets les images des classes d'homotopie de lacets dans le groupe abélien $\pi_1(X, x) / [\pi_1(X, x), \pi_1(X, x)]$, et on utilise la notation additive. Alors, comme les termes s'annulent par paires sauf un, on a $[f] = \sum_{i,j} (-1)^j n_i [\sigma_{ij}]$. Or le lacet $\sigma_{i0} \cdot \overline{\sigma_{i1}} \cdot \sigma_{i2}$ est homotope à zéro (car il borde σ_i). Donc $[f] = \sum_i n_i ([\sigma_{i0}] - [\sigma_{i1}] + [\sigma_{i2}]) = 0$. \square

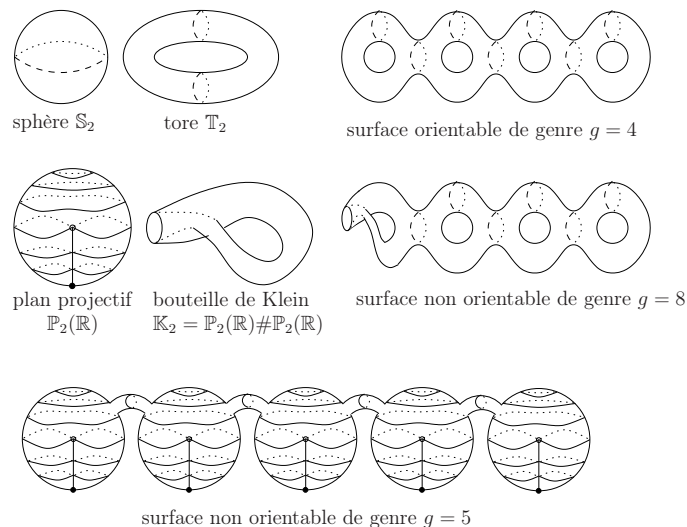
Exemples. (1) Comme le groupe fondamental du cercle est \mathbb{Z} , on retrouve que $H_1(\mathbb{S}_1, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Comme le groupe fondamental du tore $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ est \mathbb{Z}^n , on a $H_1(\mathbb{T}^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^n$.

(2) Comme le groupe fondamental de l'espace projectif réel $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour $n \geq 2$, on a $H_1(\mathbb{P}_n(\mathbb{R}), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Comme le groupe fondamental de l'espace projectif complexe $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ est trivial pour $n \geq 1$, on a $H_1(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = 0$.

(3) Comme le groupe fondamental de l'espace lenticulaire $L_{n,p} = U_p \backslash \mathbb{S}_{2n+1}$ est $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour $n, p \geq 1$, on a $H_1(L_{n,p}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

(4) Si X est le bouquet de n cercles, alors son groupe fondamental est isomorphe au groupe libre de rang n , donc $H_1(X, \mathbb{Z})$ est isomorphe à \mathbb{Z}^n . Si X est un graphe, alors par la proposition 4.13, le groupe $H_1(X, \mathbb{Z})$ est un groupe abélien libre, de type fini si X est fini.

On rappelle la classification des surfaces compactes (voir par exemple [Gra]). Une surface est une variété topologique de dimension 2. On montre que toute surface admet une unique structure, à homéomorphisme près, de variété lisse (i.e. de variété différentielle C^∞).



Si S, S' sont des surfaces connexes, et D, D' deux disques fermés dans S, S' respectivement, on appelle *somme connexe* de S, S' toute surface obtenue par recollement $S'' = (S - D) \amalg_f (S' - D')$ avec $f : \partial D \rightarrow \partial D'$ un homéomorphisme. On montre qu'à homéomorphisme près, ceci ne dépend pas des choix de D, D', f , et on note $S'' = S \# S'$.

Théorème 5.31 (Théorème de classification des surfaces compactes connexes)

Toute surface compacte connexe est homéomorphe à la somme connexe d'un nombre fini $g \geq 0$ de tores ou d'un nombre fini non nul $g \geq 1$ de plan projectifs. (Voir l'exercice ??.) \square

On convient que la somme connexe d'un ensemble vide de surfaces est la sphère \mathbb{S}_2 (car si S est une surface, alors $S \# \mathbb{S}_2$ est difféomorphe à S).

On appelle g le *genre* de la surface compacte connexe. L'exercice suivant montre que le genre d'une surface est un invariant d'homologie (et en particulier est bien défini).

Exercice E.54 Montrer que le groupe fondamental d'une surface Σ_g compacte connexe, qui est somme connexe de $g \geq 0$ tores, admet une présentation

$$\langle a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g : [a_1, b_1][a_2, b_2] \dots [a_g, b_g] = 1 \rangle$$

et que $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ est isomorphe à \mathbb{Z}^{2g} .

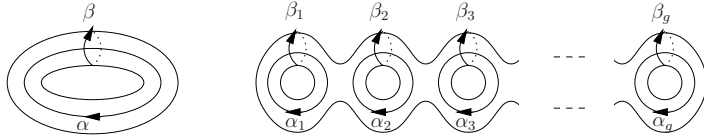
Montrer que le groupe fondamental d'une surface Σ'_g compacte connexe, qui est somme connexe de $g \geq 1$ plans projectifs, admet une présentation

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_g : a_1^2 a_2^2 \dots a_g^2 = 1 \rangle$$

et que $H_1(\Sigma'_g, \mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^{g-1} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

En déduire que deux sommes connexes finies de tores sont homéomorphes si et seulement si elles ont même nombre de tores, et que deux sommes connexes finies non nul de plan projectifs sont homéomorphes si et seulement si elles ont le même nombre de plans projectifs.

On rappelle que les lacets d'un espace topologique sont des 1-cycles. La résolution de l'exercice précédent permet de montrer que l'ensemble des classes d'homologies des lacets $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g$ ci-dessous sur une somme connexe de g tores est une base du groupe abélien libre $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$.



5.5 Autres exercices

Exercice E.55 (1) Soient (C_*, ∂_*) et (C'_*, ∂'_*) deux complexes de chaînes. On note $(f_n : C'_n \rightarrow C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de morphismes d'anneaux. Quand est-ce que la suite

$$(C_n \oplus C'_n, \begin{pmatrix} \partial_n & f_n \\ 0 & \partial'_n \end{pmatrix})_{n \in \mathbb{N}}$$

est un complexe de chaînes? Que peut-on alors dire de son homologie?

(2) Soit $\{(\alpha C_*, \alpha \partial_*)\}_{\alpha \in A}$ une famille de complexes de chaînes. On définit leur somme directe de manière évidente

$$\bigoplus_{\alpha \in A} (\alpha C_*, \alpha \partial_*) = \left(\bigoplus_{\alpha \in A} \alpha C_n, \bigoplus_{\alpha \in A} \alpha \partial_n \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Montrer que $H_*\left(\bigoplus_{\alpha \in A} (\alpha C_*, \alpha \partial_*)\right) = \bigoplus_{\alpha \in A} H_*(\alpha C_*, \alpha \partial_*)$.

Exercice E.56 Soient X et Y deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une application continue.

(1) Si X et Y sont non vides et connexes par arcs, montrer que $f_* : H_0(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_0(Y, \mathbb{Z})$ est un isomorphisme.

(2) Plus généralement, en identifiant $H_0(W, \mathbb{Z})$ avec le groupe abélien libre engendré par l'ensemble des composantes connexes par arcs d'un espace topologique W , montrer que $f_* : H_0(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_0(Y, \mathbb{Z})$ est l'unique morphisme de groupes envoyant une composante connexe par arcs C de X sur l'unique composante connexe par arcs de Y contenant $f(C)$.

Exercice E.57 Soit (X, A) une paire d'espaces topologiques. Montrer que l'inclusion $A \hookrightarrow X$ induit un isomorphisme sur tous les groupes d'homologie si et seulement si $H_n(X, A) = 0$ pour tout n dans \mathbb{N} .

Exercice E.58 Si X est une variété topologique, et si x est un point de X , calculer $H_n(X, X - \{x\})$.

Exercice E.59 Soit S une surface compacte connexe, somme connexe de $g \geq 0$ tores, et privée d'un ensemble fini de points. Calculer $H_n(S, \mathbb{Z})$ pour tout n dans \mathbb{N} .

Exercice E.60 Pour p, n, m dans \mathbb{N} , calculer $H_n(\mathbb{S}_p \times \mathbb{S}_m, \mathbb{Z})$.

Exercice E.61 Soit X l'espace topologique $\mathbb{S}_2 \times \mathbb{S}_1$ privé d'un ensemble fini de points. Calculer $H_n(X, \mathbb{Z})$ pour tout n dans \mathbb{N} .

Exercice E.62 Soit X un espace topologique et x un point de X . On note SX la suspension de X (voir l'appendice). Montrer que $H_n(X)$ est isomorphe à $H_{n+1}(SX)$ pour $n \geq 1$, et que $H_1(SX)$ est isomorphe au quotient $H_0(X)/i_*(H_0(\{x\}))$ (avec $i : \{x\} \hookrightarrow X$ l'inclusion).

Exercice E.63 Soient X, Y deux espaces topologiques pointés, tels que le point base admette un voisinage ouvert qui se rétracte par déformation forte sur ce point. On note $X \vee Y$ la somme connexe pointée de X et Y . Calculer $H_n(X \vee Y, \mathbb{Z})$ pour tout n dans \mathbb{N} en fonction des $H_k(X, \mathbb{Z}), H_k(Y, \mathbb{Z})$.

Exercice E.64 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note x_k un point fixé quelconque de la sphère \mathbb{S}_k . On note

$$X = \left(\prod_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{S}_k \right) / \sim$$

l'espace topologique quotient de l'espace topologique somme disjointe des sphères \mathbb{S}_k , par la relation d'équivalence engendrée par $x_i \sim x_j$ pour tous $i, j \in \mathbb{N}$. Calculer $H_n(X, \mathbb{Z})$ pour tout n dans \mathbb{N} .

Exercice E.65 Soient p, q, r, s des entiers tels que $ps - rq = 1$. L'anneau des coefficients est \mathbb{Z} .

a) Si $g : \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$ est l'application définie par $e^{i\theta} \mapsto (e^{ip\theta}, e^{iq\theta})$, calculer $g_* : H_k(\mathbb{S}_1) \rightarrow H_k(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1)$ pour tout k dans \mathbb{N} .

b) Soit $f : \mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$ l'application définie par $(e^{i\theta}, e^{i\theta'}) \mapsto (e^{i(p\theta+r\theta')}, e^{i(q\theta+s\theta')})$. Montrer que f est un homéomorphisme, et calculer $f_* : H_k(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1) \rightarrow H_k(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1)$ pour tout k dans \mathbb{N} .

c) Soient $M_1 = M_2 = \mathbb{B}_2 \times \mathbb{S}_1$ et $M = M_1 \cup_f M_2$ l'espace topologique recollement de M_1 et M_2 le long de f . Calculer $H_k(M)$ pour tout k dans \mathbb{N} .

d) Calculer le groupe fondamental de M .

Exercice E.66 On note $\mathbb{S}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ le cercle, et $T = \mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$ le tore. Le groupe à deux éléments $G = \{\pm 1\}$ agit sur T par

$$(\epsilon, (w, z)) = (w^\epsilon, z^\epsilon)$$

avec $z, z' \in \mathbb{S}_1$ et $\epsilon \in G$. On note $S = G \backslash T$ l'espace topologique quotient et $\pi : T \rightarrow S$ la projection canonique.

Calculer $H_1(T - \{x_1, \dots, x_k\}, \mathbb{Z})$, avec x_1, \dots, x_k des points deux à deux distincts de T .

Exercice E.67 On note $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ la projection canonique, et A l'homéomorphisme du tore \mathbb{T}^2 défini par

$$A \circ \pi(u, v) = \pi(au + bv, cu + dv)$$

avec $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice 2-2 à coefficients entiers de déterminant 1.

On considère l'espace topologique quotient

$$M_A = (\mathbb{T}^2 \times [0, 1]) / \sim$$

de l'espace topologique produit $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$, par la relation d'équivalence engendrée par $(x, 1) \sim (Ax, 0)$ pour tout x dans \mathbb{T}^2 .

(1) Montrer que M_A est une variété topologique compacte connexe de dimension 3.

(2) Calculer $H_n(M_A, \mathbb{Z})$ pour tout n dans \mathbb{N} .

Application numérique : $A = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$.

5.6 Indications pour la résolution des exercices

Exercice E.52 Utiliser l'exercice E.55 (2).

Exercice E.57 Appliquer la suite exacte longue relative pour la paire (X, A) .

Exercice E.58 Utiliser le théorème d'excision, ainsi qu'un voisinage U de x dans X qui est homéomorphe à la boule \mathbb{B}_n .

Exercice E.59 On pourra montrer que la surface trouée S a le même type d'homotopie qu'un bouquet de cercles.

Exercice E.60 Utiliser la suite exacte de Mayer-Vietoris, en enlevant un point dans chacun des facteurs.

Exercice E.62 Utiliser la suite exacte de Mayer-Vietoris, en enlevant les pôles nord et sud de la suspension.

Exercice E.63 Utiliser la suite exacte de Mayer-Vietoris, en enlevant le complémentaire dans $X \vee Y$ d'un tel voisinage du point de recollement respectivement dans X et dans Y .

Exercice E.64 Méthode 1. Comme X a deux composantes connexes par arcs, on a $H_0(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$. On note y_k un point de \mathbb{S}_k différent de x_k pour tout $k \in \mathbb{N}$, et on note toujours y_k son image dans X par la projection canonique $\pi : \coprod \mathbb{S}_k \rightarrow X$. On remarque que la restriction de π à \mathbb{S}_k est un homéomorphisme sur son image, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Pour calculer $H_n(X, \mathbb{Z})$ pour $n \geq 1$, on pose $U = X - \{y_k : k \neq n\}$ et V la réunion des images par π de $\mathbb{S}_k - \{x_k\}$ dans X pour $k \neq n$. Alors U, V sont ouverts (car leurs images réciproques par π le sont), avec V somme disjointe d'espaces contractiles, U se rétractant par déformation forte sur $\pi(\mathbb{S}_n)$, et $U \cap V$ ayant le type d'homotopie de la somme disjointe de \mathbb{S}_{k-1} pour $k \neq n$. La suite exacte de Mayer-Vietoris

$$H_n(U \cap V) \rightarrow H_n(U) \times H_n(V) \rightarrow H_n(X^{(p)}) \rightarrow H_{n-1}(U \cap V) \rightarrow H_{n-1}(U) \times H_{n-1}(V)$$

a sa flèche de gauche nulle, car la composante connexe par arcs de $U \cap V$ ayant le type d'homotopie de \mathbb{S}_n est homotope à zéro dans U et dans V . Donc, pour $n = 1$, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow H_1(X) \rightarrow \bigoplus_{k \neq n} H_0(\mathbb{S}_{k-1}) \rightarrow (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \oplus \bigoplus_{k \neq n} H_0(\mathbb{S}_k - \{x_k\})$$

de flèche de gauche injective, et pour $n > 1$

$$0 \rightarrow H_n(\pi(\mathbb{S}_n)) \rightarrow H_n(X) \rightarrow 0.$$

Donc l'inclusion induit un isomorphisme $H_n(\pi(\mathbb{S}_n)) \simeq H_n(X)$. D'où

$$H_n(X, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} + \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ \mathbb{Z} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Méthode 2. Dans ce qui suit, l'anneau des coefficients est \mathbb{Z} . On note $X^{(p)}$ le sous-espace de X image de $\coprod_{k=0}^n \mathbb{S}_k$. On vérifie que la topologie faible sur X définie par la famille des $X^{(p)}$ coïncide avec la topologie quotient de la topologie somme disjointe. Tout compact de X est donc contenu dans un $X^{(p)}$ pour p assez grand. Donc pour tout n dans \mathbb{N} , on a

$$\varinjlim_p H_n(X^{(p)}) = H_n(X).$$

On calcule alors $H_n(X^{(p)})$ et le morphisme $H_n(X^{(p-1)}) \rightarrow H_n(X^{(p)})$ induit par l'inclusion, par récurrence sur p . Si $p = 0$, alors $X^{(p)}$ est discret avec deux éléments, donc $H_n(X^{(0)}) = \begin{cases} \mathbb{Z} + \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

On suppose le résultat vrai pour $p - 1 \geq 0$. Soit y_p un point de \mathbb{S}_p différent de x_p , et y son image dans $X^{(p)}$. Soit $U = X - \{y\}$ et V l'image de $\mathbb{S}_p - \{x_p\}$ dans $X^{(p)}$. Alors U, V sont ouverts, avec V contractile, U se rétractant par déformation forte sur $X^{(p-1)}$, et $U \cap V$ ayant le type d'homotopie de \mathbb{S}_{p-1} . La suite exacte de Mayer-Vietoris

$$H_n(U \cap V) \rightarrow H_n(U) \times H_n(V) \rightarrow H_n(X^{(p)}) \rightarrow H_{n-1}(U \cap V) \rightarrow H_{n-1}(U) \times H_{n-1}(V)$$

donne donc une suite exacte

$$\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \rightarrow H_0(X^{(p)}) \rightarrow 0$$

avec flèche de gauche $(x, y) \rightarrow (x + y, 0, x + y)$, donc $H_0(X^{(p)}) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$. Pour $n \geq 1$ et $n \neq p, p - 1$, elle donne aussi une suite exacte

$$0 \rightarrow H_n(X^{(p-1)}) \rightarrow H_n(X^{(p)}) \rightarrow 0.$$

Pour $n = p > 1$, on a, par récurrence, une suite exacte

$$0 \rightarrow H_p(X^{(p)}) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

avec flèche de droite nulle, car $U \cap V$ est homotope à un point dans U . Pour $n = p = 1$, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow H_1(X^{(1)}) \rightarrow \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$$

avec flèche de droite $(x, y) \rightarrow (x + y, 0, x + y)$, donc $H_1(X^{(1)}) = \mathbb{Z}$. Pour $n = p - 1 \geq 1$, on a, par récurrence, une suite exacte

$$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow H_{p-1}(X^{(p)}) \rightarrow 0$$

avec la flèche de gauche nulle, car $U \cap V$ est homotope à un point dans U . D'où

$$H_n(X, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} + \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ \mathbb{Z} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Exercice E.65 a) L'application $g_* : H_0(\mathbb{S}_1) \rightarrow H_0(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1)$ est l'identité de \mathbb{Z} dans \mathbb{Z} . L'application $g_* : H_1(\mathbb{S}_1) \rightarrow H_1(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1)$ est $x \mapsto (px, qx)$ de \mathbb{Z} dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. L'application $g_* : H_k(\mathbb{S}_1) \rightarrow H_k(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1)$ est l'application nulle pour $k \geq 2$.

b) L'application $f_* : H_0(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1) \rightarrow H_0(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1)$ est l'identité de \mathbb{Z} dans \mathbb{Z} . L'application $f_* : H_1(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1) \rightarrow H_1(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1)$ est l'application linéaire de matrice $\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. L'application $f_* : H_2(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1) \rightarrow H_2(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1)$ est l'identité de \mathbb{Z} dans \mathbb{Z} , et l'application $g_* : H_k(\mathbb{S}_1) \rightarrow H_k(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1)$ est l'application nulle pour $k \geq 3$.

c) Utiliser Mayer-Vietoris.

d) Utiliser van Kampen (et vérifiez que le calcul du H_1 fait en c) est le bon, par le théorème de Hurewicz).

Exercice E.66 Si $k = 0$, on a vu en cours que $\pi_1(T) = \mathbb{Z}^2$ et $H_1(T, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2$. On suppose donc que $k \geq 1$. On renvoie à la solution de l'exercice E.32 pour le calcul de $\pi_1(T - \{x_1, \dots, x_k\})$.

Par le théorème de Hurewicz, $H_1(T - \{x_1, \dots, x_k\}, \mathbb{Z})$ étant l'abélianisé de $*_{k+1} \mathbb{Z}$, est un groupe abélien libre de rang $k + 1$:

$$H_1(T - \{x_1, \dots, x_k\}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{k+1}.$$

Exercice E.67 (1) Tout d'abord, A est bien défini, car a, b, c, d sont entiers, est continu par passage au quotient d'application continue, et est un homéomorphisme car son inverse est l'application obtenue en prenant la matrice inverse, qui est aussi à coefficients entiers.

L'espace topologique produit $X = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ est une variété topologique séparée. Le groupe $G = \mathbb{Z}$ agit librement et proprement sur X par $(n, (x, t)) \mapsto (A^n(x), t + n)$. Donc le quotient $G \backslash X$ est un espace topologique séparé, qui est une variété topologique car cette propriété est invariante par homéomorphisme local surjectif, connexe car image d'un connexe par une application continue et compacte car séparée et image du compact $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$ par une application continue.

(2) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note T_t (qui est homéomorphe au tore) l'image (compacte) de $\mathbb{T}^2 \times \{t\}$ par la projection canonique dans $G \backslash X$. On a $T_t = T_{t+k}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Soit U, V l'ouvert complémentaire de $T_{\frac{1}{2}}, T_0$ dans $G \backslash X$ respectivement. L'inclusion de $T_{\frac{1}{4}}$ dans U et V induit une équivalence d'homotopie, donc un isomorphisme en homologie. L'inclusion de la réunion disjointe $T_{\frac{1}{4}} \cup T_{\frac{3}{4}}$ dans $U \cap V$ est aussi une équivalence d'homotopie. La réunion de U et V est $G \backslash X$.

On utilise dans la suite l'anneau de coefficients \mathbb{Z} . Par la suite exacte de Mayer-Vietoris, on a une suite exacte

$$H_k(U) \oplus H_k(V) \rightarrow H_k(U \cup V) \rightarrow H_{k-1}(U \cap V),$$

donc pour $k \geq 4$, on a $H_k(G \backslash X) = 0$. (Ceci découle aussi du fait que $G \backslash X$ est une variété compacte sans bord de dimension 3.)

Toujours par le théorème de Mayer-Vietoris, on a une suite exacte

$$H_3(U) \oplus H_3(V) \rightarrow H_3(U \cup V) \xrightarrow{\phi_7} H_2(U \cap V) \xrightarrow{\phi_6},$$

$$H_2(U) \oplus H_2(V) \xrightarrow{\phi_5} H_2(U \cup V) \xrightarrow{\phi_4} H_1(U \cap V) \xrightarrow{\phi_3},$$

$$H_1(U) \oplus H_1(V) \xrightarrow{\phi_2} H_1(U \cup V) \xrightarrow{\phi_1} H_1(U \cap V) \xrightarrow{\phi_0} H_0(U) \oplus H_0(V).$$

Comme $H_3(U) = H_3(V) = 0$, l'application ϕ_7 est injective, et l'application ϕ_6 est l'application $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \rightarrow (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ définie par $(p, q) \mapsto (p + q, -(p + q))$. Donc $H_3(G \backslash X) = \mathbb{Z}$. (Ceci découle aussi de la dualité de Poincaré en montrant que $G \backslash X$ est orientable, car X l'est et l'action de G préserve l'orientation.)

On note $f : T_{\frac{3}{4}} \rightarrow T_{\frac{1}{4}}$ l'homéomorphisme $(x, \frac{3}{4}) \mapsto (Ax, \frac{1}{4})$ et $g : T_{\frac{3}{4}} \rightarrow T_{\frac{1}{4}}$ l'homéomorphisme $(x, \frac{3}{4}) \mapsto (x, \frac{1}{4})$. Alors le diagramme suivant est commutatif, où les flèches non indiquées sont les applications induites par les inclusions, et C_1, C_2 sont les composantes connexes de $U \cap V$:

$$\begin{array}{ccc} H_1(U \cap V) & \xrightarrow{\phi_3=(i_*, -j_*)} & H_1(U) \oplus H_1(V) \\ \parallel & & \uparrow \qquad \uparrow \\ H_1(C_1) \oplus H_1(C_2) & \begin{pmatrix} id & f_* \\ -id & -g_* \end{pmatrix} & H_1(T_{\frac{1}{4}}) \oplus H_1(T_{\frac{3}{4}}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H_1(T_{\frac{1}{4}}) \oplus H_1(T_{\frac{3}{4}}) & & \end{array}$$

On remarque que ϕ_0 est l'application $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \rightarrow (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ définie par $(p, q) \mapsto (p + q, -(p + q))$.

Par exactitude de la suite de Mayer-Victoris, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \text{im } \phi_2 = \ker \phi_1 \rightarrow H_1(G \setminus X) \rightarrow \text{im } \phi_1 = \ker \phi_0 = \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

[A suivre]

6 Homologie cellulaire

Le but de ce chapitre est d'introduire, pour la sous-catégorie des CW-complexes de la catégorie des espaces topologiques, une théorie de l'homologie, qui soit facile à calculer, tout en donnant le même résultat que l'homologie singulière.

6.1 Le complexe de chaînes cellulaires

On note \mathbb{A} un anneau commutatif unitaire, appelé *anneau des coefficients*.

Homologie relative du p -squelette par rapport au $(p-1)$ -squelette.

Lemme 6.1 *Pour tous entiers $i, p \in \mathbb{N}$,*

$$H_i(\mathbb{B}_p, \mathbb{S}_{p-1}; \mathbb{A}) = \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } i = p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. On pose par convention $\mathbb{S}_{-1} = \emptyset$. Le résultat découle du calcul suivant le corollaire 5.11, et du calcul de l'homologie des sphères 5.20. \square

On rappelle que pour tout p dans \mathbb{N} , si X est un CW-complexe (voir la partie 4.3), alors $X^{(p)}$ désigne le p -squelette de X , avec $X^{(-1)} = \emptyset$.

Théorème 6.2 *Si X est un CW-complexe, avec $(e_\alpha)_{\alpha \in A_p}$ la famille de ses cellules ouvertes de dimension p , alors*

$$H_i(X^{(p)}, X^{(p-1)}; \mathbb{A}) = \begin{cases} \bigoplus_{\alpha \in A_p} \mathbb{A} & \text{si } i = p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Plus précisément, soit u un générateur de $H_p(\mathbb{B}_p, \mathbb{S}_{p-1})$ (qui est libre de rang 1 par le lemme 6.1). Pour tout α dans A_p , soit $g_\alpha : \mathbb{B}_p \rightarrow \overline{e_\alpha}$ l'application caractéristique pour la cellule ouverte e_α de X , qui est un morphisme de paires d'espaces topologiques $g_\alpha : (\mathbb{B}_p, \mathbb{S}_{p-1}) \rightarrow (X^{(p)}, X^{(p-1)})$. Alors

$$\{(g_\alpha)_*(u) : \alpha \in A_p\}$$

est une base (dite *base canonique*) du module $H_p(X^{(p)}, X^{(p-1)}; \mathbb{A})$, qui est donc libre.

Démonstration. Si $p = 0$, alors $X^{(p)}$ est un espace discret, et $X^{(p-1)}$ est vide, donc le résultat est immédiat. On suppose $p \geq 1$.

On considère le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} (\prod_{\alpha \in A_p} \mathbb{B}_p, \prod_{\alpha \in A_p} \mathbb{S}_{p-1}) & \longrightarrow & (\prod_{\alpha \in A_p} \mathbb{B}_p, \prod_{\alpha \in A_p} \mathbb{B}_p - \{0\}) & \longleftarrow & (\prod_{\alpha \in A_p} \overset{\circ}{\mathbb{B}}_p, \prod_{\alpha \in A_p} \overset{\circ}{\mathbb{B}}_p - \{0\}) \\ \downarrow \Pi g_\alpha & & \downarrow \Pi g_\alpha & & \downarrow \Pi g_\alpha \\ (X^{(p)}, X^{(p-1)}) & \longrightarrow & (X^{(p)}, X^{(p)} - \bigcup_{\alpha \in A_p} \{g_\alpha(0)\}) & \longleftarrow & (\bigcup_{\alpha \in A_p} e_\alpha, \bigcup_{\alpha \in A_p} (e_\alpha - \{g_\alpha(0)\})) \end{array}$$

Les flèches horizontales de gauche sont des équivalences d'homotopie de paires, donc induisent un isomorphisme en homologie relative.

Les flèches horizontales de droite induisent des isomorphismes en homologie relative, par le théorème d'excision (Théorème 5.15) : en posant successivement (l'ensemble des indices étant A_p)

$$X = \coprod \mathbb{B}_p, \quad A = \coprod (\mathbb{B}_p - \{0\}), \quad U = \coprod \mathbb{S}_{p-1}$$

et

$$X = X^{(p)}, \quad A = X^{(p)} - \bigcup \{g_\alpha(0)\}, \quad U = X^{(p-1)},$$

on vérifie que $\bar{U} = U \subset \overset{\circ}{A} = A$.

Comme la flèche verticale de droite est un homéomorphisme de paires d'espaces topologiques, on en déduit que

$$H_i(X^{(p)}, X^{(p-1)}) \simeq H_i\left(\prod_{\alpha \in A_p} \mathbb{B}_p, \prod_{\alpha \in A_p} \mathbb{S}_{p-1}\right) = \bigoplus_{\alpha \in A_p} H_i(\mathbb{B}_p, \mathbb{S}_{p-1}),$$

et le résultat découle du lemme 6.1. \square

En particulier, si X est un CW-complexe fini, ayant n_p cellules ouvertes de dimension p , alors

$$H_i(X^{(p)}, X^{(p-1)}; \mathbb{A}) = \begin{cases} \mathbb{A}^{n_p} & \text{si } i = p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On donne ci-dessous une série de résultats destinés à mieux faire comprendre le théorème précédent : le p -squelette d'un CW-complexe, dans lequel on a écrasé en un point le $(p-1)$ -squelette, est un bouquet de sphères de dimension p , dont les groupes homologie se calculent aisément : en dimension non nulle, ce sont les sommes directes des groupes d'homologie de ces sphères.

Si X est un espace topologique et si Y est un sous-espace de X , on notera pour simplifier dans tout ce chapitre X/Y l'espace topologique quotient $X/\langle Y \rangle$ (voir la partie A.2).

Lemme 6.3 *Soit X un CW-complexe, p un élément de \mathbb{N} et $(e_\alpha)_{\alpha \in A_p}$ la famille des cellules ouvertes de dimension p de X . Alors $X^{(p)}/X^{(p-1)}$ est homéomorphe au bouquet d'une famille de sphères de dimension p indexée par A .*

Plus précisément, l'espace $S_\alpha = \bar{e}_\alpha / \partial e_\alpha$ est homéomorphe à une sphère de dimension p , que l'on munit du point base $\partial e_\alpha / \partial e_\alpha$. Alors l'inclusion $\coprod_{\alpha \in A_p} \bar{e}_\alpha \hookrightarrow X^{(p)}$ induit par passage au quotient un homéomorphisme

$$\bigvee_{\alpha \in A_p} S_\alpha \xrightarrow{\sim} X^{(p)}/X^{(p-1)}.$$

Démonstration. Ceci découle de la proposition 4.7. \square

Lemme 6.4 *Si X est un bouquet de sphères de dimension $p \geq 1$, indexées par l'ensemble non vide A , alors*

$$H_i(X, \mathbb{A}) = \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } i = 0 \\ \bigoplus_{\alpha \in A} \mathbb{A} & \text{si } i = p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(La convention naturelle que le bouquet de sphères indexées par un ensemble vide est réduite à un point fait que le résultat reste valable si A est vide.)

Démonstration. Tout compact de X est contenu dans une union finie de sphères du bouquet, et $\bigoplus_A \mathbb{A}$ est la limite inductive de ses sous-modules de type fini. Donc, par la proposition 5.21, il suffit de montrer le résultat quand A est fini. On raisonne par récurrence sur le cardinal de A . Si celui-ci est 1, alors X est une sphère de dimension p , et le résultat est déjà connu. Si $\text{Card}(A) > 1$, on prend U un voisinage d'une sphère S_0 dans le bouquet, se rétractant par déformation forte sur S_0 , et V le complémentaire d'un point de S_0 différent du point base. Alors U a le type d'homotopie de la sphère de dimension p , V le type d'homotopie d'un bouquet ayant $\text{Card}(S) - 1$ sphères, et $U \cap V$ a le type d'homotopie d'un point. La suite exacte de Mayer-Vietoris, appliquée à l'espace X muni du recouvrement ouvert $\{U, V\}$ conclut alors. \square

On note par abus x le singleton $\{x\}$.

Lemme 6.5 *Si X est un espace topologique et x un point de X , alors l'inclusion $(X, \emptyset) \rightarrow (X, x)$ induit un isomorphisme*

$$H_n(X) \simeq H_n(X, x)$$

si $n \neq 0$. De plus, $H_0(X, x)$ est le module libre engendré par les composantes connexes par arcs de X ne contenant pas x .

Démonstration. La suite exacte longue d'homologie relative de la paire (X, x) (Théorème 5.10) donne une suite exacte

$$H_n(x) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(X, x) \longrightarrow H_{n-1}(x).$$

En utilisant le calcul de l'homologie du point, le résultat en découle. \square

Remarque. Voici une autre preuve du théorème 6.2, pour $p \geq 1$.

Comme $\mathbb{S}_{p-1} \subset \mathbb{B}_p$ est un rétracte par déformation forte de $\mathbb{B}_p - \{0\}$, le $(p-1)$ -squelette $X^{(p-1)}$ est un rétracte par déformation forte d'un voisinage de $X^{(p-1)}$ dans $X^{(p)}$ (obtenu par exemple en enlevant un point exactement par cellule ouverte de dimension p de X).

Par récurrence et l'exercice E.A.96, le p -squelette d'un CW-complexe est un espace normal.

Par la proposition 5.17, on a

$$H_i(X^{(p)}, X^{(p-1)}) \simeq H_i(X^{(p)}/X^{(p-1)}, X^{(p-1)}/X^{(p-1)}).$$

Le théorème 6.2 découle alors des lemmes 6.4 et 6.5.

Le complexe de chaînes cellulaires

Soit X un CW-complexe. Pour tout p dans \mathbb{N} , on pose

$$D_p(X) = D_p(X, \mathbb{A}) = H_p(X^{(p)}, X^{(p-1)}).$$

On identifiera par la suite $D_p(X)$ avec le module libre engendré par les p -cellules ouvertes de X , par l'unique morphisme de modules libres envoyant $(g_\alpha)_*(u)$ sur e_α , avec les notations suivant le théorème 6.2. Comme $X^{(-1)} = \emptyset$, $D_0 = H_0(X^{(0)})$ est le module libre engendré par les sommets de X .

On note $\partial : D_p(X) \rightarrow D_{p-1}(X)$ le morphisme composé de

$$H_p(X^{(p)}, X^{(p-1)}) \xrightarrow{-\delta} H_{p-1}(X^{(p-1)}) \xrightarrow{(j_{p-1})_*} H_{p-1}(X^{(p-1)}, X^{(p-2)})$$

avec δ le morphisme de bord de la suite exacte longue de la paire $(X^{(p)}, X^{(p-1)})$, et $j_k : X^{(k)} \rightarrow (X^{(k)}, X^{(k-1)})$ l'inclusion.

Lemme 6.6

$$\partial \circ \partial = 0.$$

Démonstration. Par la suite exacte longue d'homologie relative de la paire $(X^{(p)}, X^{(p-1)})$, la suite

$$H_p(X^{(p)}) \xrightarrow{(j_p)_*} H_p(X^{(p)}, X^{(p-1)}) \xrightarrow{\delta} H_{p-1}(X^{(p-1)})$$

est exacte. Donc $\partial \circ \partial = (j_{p-1})_* \circ \delta \circ (j_p)_* \circ \delta = 0$. \square

Donc $(D_*(X), \partial)$ est un complexe de chaînes, appelé le *complexe de chaînes cellulaires* de X .

Le n -ème groupe d'homologie de ce complexe de chaînes, $H_n(D_*(X))$, est appelé le n -ème *groupe d'homologie cellulaire* de X . (C'est un module sur l'anneau \mathbb{A}).

Remarque. Si X est un CW-complexe de dimension finie d , alors son n -ème groupe d'homologie cellulaire est nul pour $n > d$. Si X est un CW-complexe fini, alors son n -ème groupe d'homologie cellulaire est de type fini pour tout n .

Une application $f : X \rightarrow Y$ entre deux CW-complexes est dite *cellulaire* si elle est continue, et si $f(X^{(p)}) \subset Y^{(p)}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Théorème 6.7 Soient X, Y deux CW-complexes, et A un sous-CW-complexe de X . Toute application continue de X dans Y , cellulaire sur A , est homotope relativement à A à une application cellulaire.

Démonstration. Voir par exemple [Hat, Theorem 4.8]. \square

Les remarques suivantes découlent en particulier de ce théorème. Mais leurs preuves sont plus faciles, et essentiellement contenues dans les preuves des propositions 4.15 et 4.16.

- Un CW-complexe X est connexe si et seulement si son 1-squelette $X^{(1)}$ l'est.
- Tout chemin dans X entre deux sommets de X est homotope (relativement extrémités) à un chemin contenu dans $X^{(1)}$.
- Toute homotopie dans X (relativement extrémités) entre deux chemins contenus dans $X^{(1)}$ est homotope (relativement au bord de $[0, 1] \times [0, 1]$) à une homotopie (relativement extrémités) contenue dans $X^{(2)}$ entre ces deux chemins.

Si X, Y sont deux CW-complexes, toute application cellulaire $f : X \rightarrow Y$ induit par restriction, pour tout p dans \mathbb{N} , un morphisme de paires $f : (X^{(p)}, X^{(p-1)}) \rightarrow (Y^{(p)}, Y^{(p-1)})$. Celui-ci induit en homologie un morphisme de modules $f_p : D_p(X) = H_p(X^{(p)}, X^{(p-1)}) \rightarrow H_p(Y^{(p)}, Y^{(p-1)}) = D_p(Y)$. Par la functorialité de l'opérateur bord dans la suite exacte longue d'homologie relative, f_* est un morphisme de complexes de chaînes de $(D_*(X), \partial)$ dans $(D_*(Y), \partial)$.

Ce morphisme de complexes de chaînes induit en homologie un morphisme de modules

$$f_* : H_n(D_*(X)) \rightarrow H_n(D_*(Y))$$

pour tout n dans \mathbb{N} .

Pour pouvoir expliciter les morphismes de bord du complexe de chaînes cellulaires, on commence par définir la notion de degré d'une application d'une sphère dans elle-même.

Degré des applications de la sphère

Pour $n \geq 1$, soit $f : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{S}_n$ une application continue, et $f_* : H_n(\mathbb{S}_n) \rightarrow H_n(\mathbb{S}_n)$ l'application induite sur le n -ème groupe d'homologie. Comme $H_n(\mathbb{S}_n, \mathbb{A})$ est isomorphe à \mathbb{A} , si ξ est un générateur de $H_n(\mathbb{S}_n)$, alors il existe $d \in \mathbb{A}$ tel que $f_*(\xi) = d\xi$. Cet élément d ne dépend pas du choix du générateur, car tout autre générateur est de la forme $u\xi$, avec u un élément inversible de \mathbb{A} , et $f_*(u\xi) = d(u\xi)$. On appelle d le *degré* de f (à coefficient dans \mathbb{A}), et on le note $\deg(f)$.

Remarque. On utilise en général l'anneau des coefficients $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$, auquel cas le degré est un entier. Pour $n = 1$, l'entier $\deg(f)$ s'interprète alors intuitivement comme le nombre de fois que le cercle source \mathbb{S}_1 s'enroule sur le cercle but \mathbb{S}_1 , à homotopie près.

Remarque. Les propriétés suivantes du degré sont immédiates, et laissées en exercice.

- Si f s'étend continuellement en une application continue de \mathbb{B}_{n+1} dans \mathbb{S}_n , alors on a $\deg(f) = 0$. En particulier, le degré d'une application constante est nulle.
- Si f est homotope à g , alors $\deg(f) = \deg(g)$. En particulier, le degré d'une application non surjective est nul.

- Le degré de l'identité est 1.
- Si $f, g : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{S}_n$ sont deux applications continues, alors

$$\deg(f \circ g) = \deg(f) \deg(g) .$$

Proposition 6.8 Pour $n \geq 1$, le degré de l'application antipodale $-id : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{S}_n$ est $(-1)^{n+1}$.

Démonstration. On considère d'abord la réflexion $r : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{S}_n$ définie par $r(x_0, x_1, \dots, x_n) = (-x_0, x_1, \dots, x_n)$. Pour $n = 0$, l'application $r_* : H_0(\mathbb{S}_0) \rightarrow H_0(\mathbb{S}_0)$ est l'application $(x, y) \mapsto (y, x)$, car r échange les deux points de \mathbb{S}_0 , qui forment une base de $H_0(\mathbb{S}_0)$.

Par naturalité de l'opérateur bord δ de la suite exacte de Mayer-Vietoris associée au recouvrement de \mathbb{S}_n par ses hémisphères nord U et sud V (qui sont préservés par r), on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_{n+1}(\mathbb{S}_{n+1}) & \xrightarrow{\delta} & H_n(\mathbb{S}_n) \\ \downarrow r_* & & \downarrow r_* \\ H_{n+1}(\mathbb{S}_{n+1}) & \xrightarrow{\delta} & H_n(\mathbb{S}_n) \end{array} .$$

Si $n = 0$ (voir la preuve du théorème 5.20), alors δ est injective, d'image le noyau de l'application $H_0(\mathbb{S}_0) \rightarrow H_0(U) \times H_0(V)$, qui est $(x, y) \mapsto (x + y, -(x + y))$, donc $\text{im } \delta = \{(x, -x) : x \in \mathbb{A}\}$. Par conséquent $r_* : H_1(\mathbb{S}_1) \rightarrow H_1(\mathbb{S}_1)$ est $-id$.

Si $n > 0$, alors δ est un isomorphisme, donc par récurrence, $r_* : H_n(\mathbb{S}_n) \rightarrow H_n(\mathbb{S}_n)$ est $-id$. En particulier, le degré de r est -1 .

Maintenant, toute rotation de \mathbb{S}_n est homotope à l'identité. Deux réflexions sont conjuguées par une rotation, donc sont homotopes, donc ont le même degré. L'application antipodale est la composée de $n + 1$ réflexions (sur chacun des hyperplans de coordonnées). Ceci montre le résultat. \square

Calcul des morphismes de bords cellulaires

Soit X un CW-complexe, $(e_\alpha)_{\alpha \in A_p}$ la famille des cellules ouvertes de dimension p de X , pour p dans \mathbb{N} . On note $g_\alpha : \mathbb{B}_p \rightarrow X^{(p-1)}$ l'application caractéristique et $f_\alpha = g_{\alpha|_{\partial \mathbb{B}_p}} : \mathbb{S}_{p-1} \rightarrow X^{(p-1)}$ l'application d'attachement de la cellule e_α . On identifie \mathbb{S}_p avec l'espace quotient $\mathbb{B}_p/\mathbb{S}_{p-1}$ par un homéomorphisme quelconque fixé. On note $\pi^{(p)} : X^{(p)} \rightarrow X^{(p)}/X^{(p-1)}$ la projection canonique. Pour tout α dans A_p , l'application g_α induit par passage au quotient un homéomorphisme $\tilde{g}_\alpha : \mathbb{S}_p = \mathbb{B}_p/\mathbb{S}_{p-1} \rightarrow \bar{e}_\alpha/\partial e_\alpha$. On note S_α la sphère $\bar{e}_\alpha/\partial e_\alpha$ pointée en $\partial e_\alpha/\partial e_\alpha$, et $\pi_\alpha : \bigvee_{\beta \in A_p} S_\beta \rightarrow S_\alpha$ l'application qui écrase sur le point base les sphères du bouquet différentes de S_α . Enfin, soit $\phi : \bigvee_{\alpha \in A_p} S_\alpha \rightarrow X^{(p)}/X^{(p-1)}$ l'homéomorphisme obtenu par le lemme 6.3.

Si $p \geq 2$, pour tout i dans A_p et j dans A_{p-1} , on considère la composition des applications

$$\mathbb{S}_{p-1} \xrightarrow{f_i} X^{(p-1)} \xrightarrow{\pi^{(p-1)}} X^{(p-1)}/X^{(p-2)} \xrightarrow{\phi^{-1}} \bigvee_{\beta \in A_{p-1}} S_\beta \xrightarrow{\pi_j} S_j \xrightarrow{\tilde{g}_j^{-1}} \mathbb{S}_{p-1}$$

et on note $d_{i,j}$ son degré.

Si $p = 1$, pour toute arête e_i de X , et tout sommet e_j de X , alors par convention, $d_{i,j}$ vaut 1 si e_j est l'extrémité de e_i , -1 si e_j est l'origine de e_i , et 0 sinon.

Remarque. (1) En termes imagés, lorsque $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$, l'entier $d_{i,j}$ mesure le nombre de fois que le bord de la i -ème cellule de dimension p s'enroule autour de la j -ème cellule de dimension $p - 1$ par l'application d'attachement.

(2) Le degré d'une application non surjective est nul. Un compact du $(p - 1)$ -squelette de X ne contient qu'un nombre fini de centres $g_\beta(0)$ de cellules ouvertes e_β de dimension $p - 1$. L'image de l'application d'attachement d'une cellule de dimension p est compacte, car X est séparé. Donc pour i dans A_p fixé, seuls un nombre fini de $d_{i,j}$ sont non nuls lorsque j parcourt A_{p-1} .

Proposition 6.9 Le morphisme de bord $\partial : D_p(X) = H_p(X^{(p)}, X^{(p-1)}) \rightarrow D_{p-1}(X) = H_{p-1}(X^{(p-1)}, X^{(p-2)})$ est le morphisme

$$\begin{array}{ccc} \partial : \bigoplus_{i \in A_p} \mathbb{A} e_i & \longrightarrow & \bigoplus_{j \in A_{p-1}} \mathbb{A} e_j \\ e_i & \longmapsto & \sum_{j \in A_{p-1}} d_{i,j} e_j \end{array} .$$

Démonstration. C'est immédiat si $p = 0$, car $\partial : D_0(X) \rightarrow D_{-1}(X)$ est l'application nulle. Si $p = 1$, alors $\partial : H_1(X^{(1)}, X^{(0)}) \rightarrow H_0(X^{(0)})$ est l'opérateur bord de la suite exacte longue d'homologie relative, et le résultat découle de la définition des $d_{i,j}$.

On suppose donc $p \geq 1$ et on calcule $\partial : D_{p+1}(X) \rightarrow D_p(X)$. Soient i dans A_{p+1} et j dans A_p . Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_{p+1}(X^{(p+1)}, X^{(p)}) & \xrightarrow{\delta} & H_p(X^{(p)}) \\ \uparrow (g_i)_* & & \uparrow (f_i)_* \\ H_{p+1}(\mathbb{B}_{p+1}, \mathbb{S}_p) & \xrightarrow{\delta} & H_p(\mathbb{S}_p) \end{array}$$

est commutatif, par functorialité de l'opérateur bord de la suite exacte longue d'homologie relative. De plus, la flèche horizontale basse est un isomorphisme, car $p \geq 1$.

On considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H_p(X^{(p)}) & \xrightarrow{(j_p)_*} & H_p(X^{(p)}, X^{(p-1)}) & \xleftarrow{(g_j)_*} & H_p(\mathbb{B}_p, \mathbb{S}_{p-1}) \\ \downarrow (\pi^{(p)})_* & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ H_p(X^{(p)}/X^{(p-1)}) & \xrightarrow{\simeq} & H_p(X^{(p)}/X^{(p-1)}, *) & & H_p(\mathbb{B}_p/\mathbb{S}_{p-1}, *) \\ & & (\pi_j \circ \phi^{-1})_* \searrow & & \uparrow \sim \\ & & H_p(S_j) & \xleftarrow{(\tilde{g}_j)_*} & H_p(\mathbb{B}_p/\mathbb{S}_{p-1}) \end{array} ,$$

avec $*$ désignant le singleton Z/Z dans l'espace topologique quotient Y/Z pour Z une partie de Y . Chaque flèche marquée \simeq est le morphisme induit par la projection

canonique $(Y, Z) \rightarrow (Y/Z, *)$, qui est un isomorphisme par la proposition 5.17. Chaque flèche marquée \sim est le morphisme induit par l'inclusion $U = (U, \emptyset) \hookrightarrow (U, *)$, qui est un isomorphisme car $p \geq 1$, par le lemme 6.5.

Enfin, après identification de $H_p(\bigvee_{\beta \in A_p} S_\beta)$ avec le module libre engendré par les S_β , le morphisme $(\pi_j)_* : H_p(\bigvee_{\beta \in A_p} S_\beta) \rightarrow H_p(S_j)$ est l'application j -ème coordonnée. \square

6.2 Homologie cellulaire et homologie singulière

Le but de cette partie est de montrer que les homologies cellulaires et singulières des CW-complexes coïncident, de manière fonctorielle.

Théorème 6.10 *Pour tout CW-complexe X et tout n dans \mathbb{N} , il existe un isomorphisme de modules*

$$H_n(D_*(X)) \xrightarrow{\sim} H_n(X)$$

de sorte que, pour toute application cellulaire $f : Y \rightarrow Z$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_n(D_*(Y)) & \xrightarrow{\sim} & H_n(Y) \\ \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ H_n(D_*(Z)) & \xrightarrow{\sim} & H_n(Z) \end{array}$$

Démonstration. Étape 1. Si $k \leq p$, l'inclusion $X^{(p+1)} \rightarrow X$ induit un isomorphisme de modules $H_k(X^{(p+1)}) \rightarrow H_k(X)$.

Démonstration. Par la suite exacte longue d'homologie relative,

$$H_{k+1}(X^{(p+i+1)}, X^{(p+i)}) \rightarrow H_k(X^{(p+i)}) \rightarrow H_k(X^{(p+i+1)}) \rightarrow H_k(X^{(p+i+1)}, X^{(p+i)})$$

est une suite exacte. Par le théorème 6.2, le module de gauche est nul si $k \leq p$ et $i \geq 1$, et le module de droite est nul si $k \leq p$. Donc $H_k(X^{(p+i)}) \simeq H_k(X^{(p+i+1)})$. Comme tout compact de X est contenu dans $X^{(p+i)}$ pour i suffisamment grand, la proposition 5.21 implique que $\varinjlim_i H_k(X^{(p+i)}) \simeq H_k(X)$. Le résultat en découle. \square

Étape 2. Le morphisme de modules $j_* : H_p(X^{(p+1)}) \rightarrow H_p(X^{(p+1)}, X^{(p-2)})$ induit par l'inclusion est un isomorphisme.

Démonstration. Comme $X^{(-1)} = \emptyset$, il suffit de montrer que le morphisme

$$H_p(X^{(p+1)}, X^{(i-1)}) \rightarrow H_p(X^{(p+1)}, X^{(i)})$$

est un isomorphisme pour $i = 0, \dots, p-2$. On utilise pour cela le lemme suivant

Lemme 6.11 *Si X est un espace topologique et $A \subset B \subset X$, alors les inclusions $i : (B, A) \rightarrow (X, A)$ et $j : (X, A) \rightarrow (X, B)$ induisent une suite exacte de complexes de chaînes*

$$0 \longrightarrow C_*(B, A) \longrightarrow C_*(X, A) \longrightarrow C_*(X, B) \longrightarrow 0$$

qui induit une suite exacte longue en homologie

$$\dots \xrightarrow{\delta} H_p(B, A) \xrightarrow{i_*} H_p(X, A) \xrightarrow{j_*} H_p(X, B) \xrightarrow{\delta} H_{p-1}(B, A) \longrightarrow \dots$$

(appelée suite exacte longue du triplet).

Démonstration. Par passage au quotient, on a un morphisme surjectif

$$C_*(X)/C_*(A) \longrightarrow C_*(X)/C_*(B),$$

dont le noyau est $C_*(B)/C_*(A)$. Le résultat découle alors des rappels d'algèbre homologique. \square

Remarque. Il est immédiat de montrer que la suite exacte longue du triplet est fonctorielle, au sens suivant. Soit $f : X \rightarrow X'$ une application continue, et $A' \subset B'$ deux parties de X' telles que $f(A) \subset A'$ et $f(B) \subset B'$. Alors f induit trois morphismes de paires d'espaces topologiques $f|_B : (B, A) \rightarrow (B', A')$, $f : (X, A) \rightarrow (X', A')$, $f : (X, B) \rightarrow (X', B')$. Le triplet $((f|_B)_*, f_*, f'_*)$ est un morphisme de suites exactes courtes de complexes de chaînes entre $0 \rightarrow C_*(B, A) \rightarrow C_*(X, A) \rightarrow C_*(X, B) \rightarrow 0$ et $0 \rightarrow C_*(B', A') \rightarrow C_*(X', A') \rightarrow C_*(X', B') \rightarrow 0$. Il donne donc en homologie un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & H_p(B, A) & \longrightarrow & H_p(X, A) & \longrightarrow & H_p(X, B) & \xrightarrow{\delta} & H_{p-1}(B, A) & \dots \\ & \downarrow (f|_B)_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & & \\ \dots & H_p(B', A') & \longrightarrow & H_p(X', A') & \longrightarrow & H_p(X', B') & \xrightarrow{\delta} & H_{p-1}(B', A') & \dots \end{array}$$

On applique maintenant ce lemme au triplet $X = X^{(p+1)}$, $B = X^{(i)}$, $A = X^{(i+1)}$. On a donc une suite exacte

$$H_p(X^{(i)}, X^{(i+1)}) \xrightarrow{i_*} H_p(X^{(p+1)}, X^{(i+1)}) \xrightarrow{j_*} H_p(X^{(p+1)}, X^{(i)}) \xrightarrow{\delta} H_{p-1}(X^{(i)}, X^{(i+1)})$$

dont les modules aux extrémités sont nuls si $p-1 > i$. Ceci démontre l'étape 2. \square

Étape 3. On considère le quadruplet $(X^{(p+1)}, X^{(p)}, X^{(p-1)}, X^{(p-2)})$, et le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} H_p(X^{(p-1)}, X^{(p-2)}) & & H_p(X^{(p+1)}, X^{(p-2)}) & \longrightarrow & H_p(X^{(p+1)}, X^{(p)}) \\ & \searrow & \ell_* \nearrow & & \\ & & H_p(X^{(p)}, X^{(p-2)}) & & \\ & m_* \nearrow & & & \searrow k_* \\ H_{p+1}(X^{(p+1)}, X^{(p)}) & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & H_p(X^{(p)}, X^{(p-1)}) & \xrightarrow{\partial_p} & H_{p-1}(X^{(p-1)}, X^{(p-2)}) \end{array}$$

qui est commutatif, par construction de ∂_{p+1} . Les modules en haut à droite et en haut à gauche sont nuls. La suite exacte du triplet $(X^{(p)}, X^{(p-1)}, X^{(p-2)})$ implique que $\ker \partial_p = \text{im } k_*$ et que k_* est injective.

La suite exacte du triplet $(X^{(p+1)}, X^{(p)}, X^{(p-2)})$ implique que $\text{im } m_* = \ker \ell_*$ et que ℓ_* est surjective.

Comme $k_* : H_p(X^{(p)}, X^{(p-2)}) \rightarrow \text{im } k_*$ est un isomorphisme, le module $\text{im } k_*$ est surjecte par $\ell_* \circ k_*^{-1}$ sur $H_p(X^{(p+1)}, X^{(p-2)})$.

Par commutativité, on a $\partial_{p+1} = k_* \circ m_*$ et donc $\text{im } \partial_{p+1} = \ker \ell_* \circ k_*^{-1}$. Par conséquent,

$$H_p(D_*(X)) = \ker \partial_p / \text{im } \partial_{p+1} = \text{im } k_* / \ker \ell_* \circ k_*^{-1} \simeq \text{im } \ell_* \circ k_*^{-1} = H_p(X^{(p+1)}, X^{(p-2)}).$$

Par les étapes 1 et 2, ce dernier module est isomorphe à $H_p(X)$.

La functorialité de l'isomorphisme $H_p(D_*(X)) \simeq H_p(X)$ est claire. Le théorème 6.10 en découle. \square

Corollaire 6.12 *Si X est un CW-complexe de dimension finie n , alors $H_i(X) = 0$ pour $i > n$. Si X est un CW-complexe fini, et si l'anneau des coefficients \mathbb{A} est un corps, alors $H_i(X)$ est de dimension finie pour tout i dans \mathbb{N} . Si X est un CW-complexe fini, et si $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$, alors $H_i(X)$ est un groupe abélien de type fini pour tout i dans \mathbb{N} .*

Démonstration. Ceci découle de l'isomorphisme entre homologie cellulaire et homologie singulière de X , et des résultats de finitude pour l'homologie cellulaire. \square

Caractéristique d'Euler des CW-complexes.

Soit X un espace topologique, avec $H_i(X, \mathbb{R})$ de dimension finie pour tout i dans \mathbb{N} , et nulle si i est assez grand. On appelle *caractéristique d'Euler* de X la caractéristique d'Euler-Poincaré du complexe des chaînes singulières de X , c'est-à-dire l'entier

$$\chi(X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \dim H_k(X, \mathbb{R}).$$

On remarque que la caractéristique d'Euler est un invariant topologique et même homotopique : si deux espaces topologiques X et Y ont le même type d'homotopie, alors $\chi(X) = \chi(Y)$.

Corollaire 6.13 *Soit X un CW-complexe fini, ayant n_i cellules ouvertes de dimension i , alors*

$$\chi(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i n_i.$$

Démonstration. Ceci découle de l'isomorphisme entre homologie cellulaire et homologie singulière de X et des rappels d'algèbre homologique (proposition 5.3). \square

Exemples. (1) Si X est contractile, alors $\chi(X) = 1$. En particulier $\chi(\mathbb{B}_n) = 1$.

$$(2) \chi(\mathbb{S}_n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

$$(3) \chi(\mathbb{T}_n) = 0.$$

(4) La caractéristique d'Euler d'une surface compacte connexe Σ qui est somme connexe de g tores (donc de genre g) est $2 - 2g$, car Σ est homéomorphe à un CW-complexe obtenu par recollement d'une 2-cellule sur un bouquet de $2g$ cercles (ayant $2g$ arêtes et 1 sommet), voir l'exemple (4) de la partie 4.3.

(5) Soit X un graphe connexe fini. Alors la caractéristique d'Euler de X vaut $\chi(X) = n_0 - n_1$ avec n_0 le nombre de sommets de X et n_1 le nombre d'arêtes de X (voir aussi l'exercice E.43).

6.3 Homologie des espaces projectifs

On rappelle que l'espace projectif réel $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ est construit par récurrence avec $\mathbb{P}_0(\mathbb{R})$ un point et $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$ obtenu par recollement d'une seule cellule de dimension $n+1$ sur $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ avec pour application d'attachement $f_{n+1} : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ la projection canonique, qui est un revêtement à 2 feuillets.

Donc le complexe de chaînes cellulaires de $X = \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, à coefficients dans l'anneau des coefficients \mathbb{A} , est :

$$D_0(X) = \mathbb{A} \xleftarrow{\partial_1} \mathbb{A} \leftarrow \dots \leftarrow \mathbb{A} \xleftarrow{\partial_n} D_n(X) = \mathbb{A} \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow \dots$$

En prenant $\mathbb{A} = \mathbb{R}$, le calcul de la caractéristique d'Euler de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ est alors immédiat :

$$\chi(\mathbb{P}_n(\mathbb{R})) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On effectue maintenant le calcul des morphismes de bord du complexe de chaînes cellulaires de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 6.14 *Le morphisme $\partial_p : D_p(\mathbb{P}_n(\mathbb{R})) = \mathbb{A} \rightarrow D_{p-1}(\mathbb{P}_n(\mathbb{R})) = \mathbb{A}$ est la multiplication par $1 + (-1)^{p+1}$.*

Démonstration. La projection canonique $f_{p+1} : \mathbb{S}_p \rightarrow \mathbb{P}_p(\mathbb{R})$ induit par passage au quotient une application continue $\tilde{f}_{p+1} : \mathbb{S}_p/\mathbb{S}_{p-1} \rightarrow \mathbb{P}_p(\mathbb{R})/\mathbb{P}_{p-1}(\mathbb{R})$. L'espace $\mathbb{P}_p(\mathbb{R})/\mathbb{P}_{p-1}(\mathbb{R})$ s'identifie à la sphère \mathbb{S}_p et le quotient $\mathbb{S}_p/\mathbb{S}_{p-1}$ s'identifie au bouquet de deux sphères $\mathbb{S}_p \vee \mathbb{S}_p$. L'application $\tilde{f}_{p+1} : \mathbb{S}_p \vee \mathbb{S}_p \rightarrow \mathbb{S}_p$ est l'application qui vaut l'identité sur la première sphère et l'application antipodale sur la deuxième. Par la proposition 6.8, le degré de l'application antipodale est $(-1)^{p+1}$. Le degré de la composition

$$\mathbb{S}_p \xrightarrow{f_{p+1}} \mathbb{P}_p(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_p(\mathbb{R})/\mathbb{P}_{p-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{S}_p$$

est donc $1 + (-1)^{p+1}$, car la projection canonique $\mathbb{S}_p \rightarrow \mathbb{S}_p/\mathbb{S}_{p-1} = \mathbb{S}_p \vee \mathbb{S}_p$ induit en homologie l'application de $H_p(\mathbb{S}_p) = \mathbb{A}$ dans $H_p(\mathbb{S}_p \vee \mathbb{S}_p) = \mathbb{A} \times \mathbb{A}$ définie par $x \mapsto (x, x)$.

Comme le p -squelette de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ est $\mathbb{P}_p(\mathbb{R})$, le résultat découle alors de la proposition 6.9. \square

Le calcul de l'homologie (cellulaire, donc singulière) de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ est alors immédiat. On note \mathbb{A}_2 le noyau de la multiplication par 2 de \mathbb{A} dans \mathbb{A} .

Corollaire 6.15 Pour p, n dans \mathbb{N} , on a

$$H_p(\mathbb{P}_n(\mathbb{R}), \mathbb{A}) = \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } p = 0 \text{ ou } p = n \text{ impair} \\ \mathbb{A}/2\mathbb{A} & \text{si } p \text{ impair avec } 1 \leq p \leq n-1 \\ \mathbb{A}_2 & \text{si } p \text{ pair avec } 1 \leq p \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} . \quad \square$$

Par exemple, si $\mathbb{A} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alors $H_p(\mathbb{P}_n(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } p \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$

Si $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$, alors $H_p(\mathbb{P}_n(\mathbb{R}), \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } p = 0 \text{ ou } p = n \text{ impair} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } p \text{ impair avec } 1 \leq p \leq n-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$

De même, l'espace projectif complexe $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ est construit par récurrence avec $\mathbb{P}_0(\mathbb{C})$ un point et $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})$ obtenu par recollement d'une seule cellule de dimension $2n+2$ sur $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ avec pour application d'attachement $\mathbb{S}_{2n+1} \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ la projection canonique.

Donc le complexe de chaînes cellulaires de $X = \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, à coefficients dans l'anneau des coefficients \mathbb{A} , est :

$$D_0(X) = \mathbb{A} \leftarrow 0 \leftarrow \mathbb{A} \leftarrow 0 \leftarrow \dots \leftarrow D_{2n-1}(X) = 0 \leftarrow D_{2n}(X) = \mathbb{A} \leftarrow 0 \leftarrow 0 \dots$$

En prenant $\mathbb{A} = \mathbb{R}$, le calcul de la caractéristique d'Euler de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ est alors immédiat :

$$\chi(\mathbb{P}_n(\mathbb{C})) = n + 1 .$$

Comme les opérateurs bords du complexe de chaînes cellulaires de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ sont nuls, le calcul de l'homologie des espaces projectifs complexes est alors immédiat :

Théorème 6.16 Pour p, n dans \mathbb{N} , on a

$$H_p(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}), \mathbb{A}) = \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } p \text{ pair et } 0 \leq p \leq 2n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} . \quad \square$$

6.4 Autres exercices

Exercice E.68 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note x_k un point fixé quelconque de la sphère \mathbb{S}_k . On note

$$X = \left(\prod_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{S}_k \right) / \sim$$

l'espace topologique quotient de l'espace topologique somme disjointe des sphères \mathbb{S}_k , par la relation d'équivalence engendrée par $x_i \sim x_j$ pour tous i, j dans \mathbb{N} . Calculer $H_n(X, \mathbb{Z})$ pour tout n dans \mathbb{N} .

Exercice E.69 Soit n un entier positif non nul.

a) Montrer que si $a : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{S}_n$ est l'application antipodale $x \mapsto -x$, et si $f, g : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{S}_n$ sont deux applications continues telles que $f(x) \neq g(x)$ pour tout x dans \mathbb{S}_n , alors f et $a \circ g$ sont homotopes.

b) En déduire le théorème de Borsuk-Ulam : si $f : \mathbb{S}_{2n} \rightarrow \mathbb{S}_{2n}$ est une application continue, alors il existe un point x de \mathbb{S}_{2n} tel que $f(x) = \pm x$.

c) Montrer qu'il n'existe pas d'application continue f de \mathbb{S}_{2n} dans \mathbb{S}_{2n} telle que x et $f(x)$ sont orthogonaux pour tout x dans \mathbb{S}_{2n} .

d) Montrer le théorème de peignage des sphères : il existe un champ de vecteurs qui ne s'annule pas sur \mathbb{S}_n si et seulement si n est impair.

Exercice E.70 a) Montrer que le cercle $\mathbb{S}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ admet une structure de CW-complexe X_n dont le 0-squelette est $U_n = \{e^{2i\pi \frac{k}{n}} : k = 0, \dots, n-1\}$.

b) Calculer le complexe de chaînes cellulaires de ce CW-complexe.

c) En déduire, pour tout n dans \mathbb{N} , quel est le degré de l'application de \mathbb{S}_1 dans \mathbb{S}_1 définie par $z \mapsto z^n$.

Exercice E.71 Soient n, k deux éléments de \mathbb{N} avec $n \geq 2$.

a) Montrer qu'il existe une application continue $f : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{S}_n$ de degré k .

b) Montrer qu'il existe un espace topologique simplement connexe X tel que $H_n(X, \mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, et $H_i(X, \mathbb{Z}) = 0$ si $i \neq 0, n$.

c) Montrer que pour tout groupe abélien de type fini G , il existe un espace topologique simplement connexe X tel que $H_n(X, \mathbb{Z}) \simeq G$, et $H_i(X, \mathbb{Z}) = 0$ si $i \neq 0, n$. Un tel espace X est appelé *espace de Moore*.

Exercice E.72 a) Si X et Y sont des CW-complexes finis, montrer que

$$\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y) .$$

b) Si X est un CW-complexe fini, union de deux sous-complexes A et B , montrer que

$$\chi(X) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B) .$$

c) Si X est un CW-complexe, et $p : \bar{X} \rightarrow X$ un revêtement, montrer que \bar{X} admet une unique structure de CW-complexe telle que p soit cellulaire et tout relèvement par p d'une cellule ouverte de X est une cellule ouverte de \bar{X} .

d) Si X est un CW-complexe fini, et $p : \bar{X} \rightarrow X$ un revêtement à n feuillettes, montrer que

$$\chi(\bar{X}) = n\chi(X) .$$

6.5 Indications pour la résolution des exercices

Exercice E.68 Il s'agit bien du même exercice que l'exercice E.64, mais voici une autre solution, plus courte, utilisant l'homologie cellulaire.

Pour $k \geq 1$, la sphère \mathbb{S}_k admet une structure de CW-complexe, ayant un sommet x_k et une cellule de dimension k , avec application d'attachement constante en x_k . Donc X admet une structure de CW-complexe, ayant deux sommets x, y avec x la classe commune des points x_k , et pour tout $k \geq 1$, une cellule de dimension k , avec application d'attachement constante en x . On vérifie que la topologie faible sur X définie par la famille des p -squelettes $X^{(p)}$ coïncide avec la topologie quotient de la topologie somme disjointe (soit $\pi : \coprod \mathbb{S}_k \rightarrow X$ la projection canonique; alors U est un ouvert de X si et seulement si $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert de $\coprod \mathbb{S}_k$, si et seulement si $\pi^{-1}(U) \cap \coprod_{k=0}^p \mathbb{S}_k$ est un ouvert de $\coprod_{k=0}^p \mathbb{S}_k$ pour tout p , si et seulement si $U \cap X^{(p)}$ est un ouvert de $X^{(p)}$ pour tout p).

Le complexe de chaînes cellulaires de X à coefficients entiers est donc

$$\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \xleftarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \xleftarrow{\partial_2} \mathbb{Z} \xleftarrow{\partial_3} \mathbb{Z} \xleftarrow{\partial_4} \dots$$

Comme le degré d'une application constante de \mathbb{S}_m dans \mathbb{S}_m est 0, les morphismes de bords ∂_k sont nuls pour $k \geq 1$.

$$\text{Donc } H_n(X, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} + \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ \mathbb{Z} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Exercice E.69 a) Utiliser l'image du segment $[f(x), a \circ g(x)]$ par la rétraction radiale de $\mathbb{B}_{n+1} - \{0\}$ sur \mathbb{S}_n .

- b) Par l'absurde, en considérant les degrés.
- c) Utiliser b).
- d) Utiliser c).

Exercice E.70 a) Les 1-cellules sont $t \mapsto e^{2i\pi \frac{k+t}{n}}$.

b) Il s'agit de

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{A}^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} & \longleftarrow & \mathbb{A}^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & 0 \dots \\ (x_{i+1} - x_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} & \longleftarrow & (x_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} & & & & \end{array}$$

c) L'application $z \mapsto z^n$ est cellulaire du cercle X_n dans le cercle X_1 .

Exercice E.71 a) Utiliser le cas $n = 1$ démontré dans l'exercice ci-dessus, et utiliser les suspensions : si $f : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{S}_n$ est une application continue, alors $Sf : S\mathbb{S}_n \simeq \mathbb{S}_{n+1} \rightarrow S\mathbb{S}_n \simeq \mathbb{S}_{n+1}$ est encore continue (voir l'appendice pour les notations).

b) Considérer l'espace X obtenu par recollement de \mathbb{B}_{n+1} sur \mathbb{S}_n par une application $f : \partial\mathbb{B}_{n+1} = \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{S}_n$ continue de degré k .

c) Utiliser le théorème de structure des groupes abéliens de type fini, et considérer un espace somme connexe pointée (voir exercice E.63).

7 Cohomologie singulière et cellulaire

Soit \mathbb{A} un anneau commutatif unitaire. Par module, on entendra module sur l'anneau \mathbb{A} . Soit M un module fixé, appelé *module des coefficients*. Les cas $A = M = \mathbb{Z}$ et $A = M = k$ avec k un corps sont particulièrement importants.

7.1 Le foncteur Hom et les complexes de cochaînes

Si N est un module, on note $\text{Hom}(N, M)$ (ou $\text{Hom}_{\mathbb{A}}(N, M)$) le module des morphismes de modules de N dans M . Le module $\text{Hom}(N, \mathbb{A})$ est appelé le *dual* de N . Si $f : N \rightarrow N'$ est un morphisme de modules, on note ${}^t f : \text{Hom}(N', M) \rightarrow \text{Hom}(N, M)$ le morphisme de modules ${}^t f : \phi \mapsto \phi \circ f$. On vérifie que ${}^t id = id$, et ${}^t(f \circ g) = {}^t g \circ {}^t f$. On a donc défini un foncteur (contravariant) de la catégorie des modules dans elle-même, noté $\text{Hom}(\cdot, M)$.

Si N, N' sont des modules, on a une bijection de l'ensemble des applications bilinéaires de $N \times N'$ dans M dans l'ensemble des morphismes de modules de N dans $\text{Hom}(N', M)$, qui à une application bilinéaire ϕ associe le morphisme de modules (dit *induit par ϕ*) $x \mapsto \{y \mapsto \phi(x, y)\}$.

On remarque aussi que

$$\text{Hom}\left(\bigoplus_{\alpha} N_{\alpha}, M\right) \simeq \prod_{\alpha} \text{Hom}(N_{\alpha}, M).$$

Proposition 7.1 Si $C \xrightarrow{f} C' \xrightarrow{g} C'' \rightarrow 0$ est une suite exacte de modules, alors $\text{Hom}(C, M) \xleftarrow{{}^t f} \text{Hom}(C', M) \xleftarrow{{}^t g} \text{Hom}(C'', M) \leftarrow 0$ est une suite exacte de modules.

Si f est injective et si C'' est un module libre, alors ${}^t f$ est surjectif

Remarque. On résume cette proposition en disant que le foncteur $\text{Hom}(\cdot, M)$ est exact à droite. Remarque que par exemple, avec $A = M = \mathbb{Z}$, la suite $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$ est exacte, mais que le morphisme $\text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ avec $f \mapsto \{x \mapsto f(2x)\}$ n'est pas surjective.

Démonstration. Si c'' est dans $\ker {}^t g$, alors $c''(g(x')) = 0$ pour tout x' dans C' . Donc si g est surjective, alors ${}^t g$ est injective.

Si $g \circ f = 0$, alors ${}^t g \circ {}^t f = 0$, donc $\text{im } {}^t g$ est contenu dans $\ker {}^t f$. Réciproquement, si c' est dans $\ker {}^t f$, alors $c'(f(x)) = 0$ pour tout x dans C . Donc, si $\ker g$ est contenu dans $\text{im } f$, alors c' est nulle sur $\ker g$. On définit le morphisme de modules $c'' : C'' \rightarrow M$ par $c''(x) = c'(y)$ si $g(y) = x$ (ce qui est possible car g est surjective et ne dépend pas des choix car c' s'annule sur $\ker g$). Alors ${}^t g(c'') = c'$, ce qui montre que $\ker {}^t f$ est contenu dans $\text{im } {}^t g$.

Si C'' est libre, en considérant une base de C'' , on construit un morphisme de modules $h : C'' \rightarrow C'$ tel que $g \circ h = \text{id}$. On montre alors facilement par exactitude que C' est la somme directe de $h(C'')$ et de $f(C)$. Si f est injective, pour tout c dans

$\text{Hom}(C, M)$, on définit $c' : C' \rightarrow M$ par $c'(f(x)) = c(x)$ pour tout x dans C et c' s'annule sur $h(C'')$. Alors ${}^t f(c') = c$, donc ${}^t f$ est surjective. \square

Soit $C = (C_p, \partial_p)_{p \in \mathbb{N}}$ un complexe de chaînes. On note $\text{Hom}(C, M)$ (ou $\text{Hom}_{\mathbb{A}}(C, M)$ quand on veut préciser l'anneau de base) le complexe de cochaînes $(C^p, \partial^p)_{p \in \mathbb{N}}$, avec $C^p = \text{Hom}(C_p, M)$ et $\partial^p = {}^t \partial_{p+1}$. La vérification que $\partial^{p+1} \circ \partial^p = 0$ pour tout p dans \mathbb{N} est immédiate. Si $(f_p : C_p \rightarrow D_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est un morphisme de complexes de chaînes, alors $(f^p = {}^t f_p : \text{Hom}(D_p, M) \rightarrow \text{Hom}(C_p, M))_{p \in \mathbb{N}}$ est un morphisme de complexes de cochaînes. On a donc défini un foncteur (contravariant) de la catégorie des complexes de chaînes dans la catégorie des complexes de chaînes, encore noté $\text{Hom}(\cdot, M)$.

La cohomologie du complexe de cochaînes $\text{Hom}(C, M)$ est notée

$$H^*(C, M).$$

Exemples. (1) Si (X, Y) est une paire d'espaces topologiques, et $C_*(X, Y; \mathbb{A})$ est le complexe de chaînes singulières relatives à coefficients dans \mathbb{A} , alors le complexe de cochaînes $C^*(X, Y) = C^*(X, Y; M) = \text{Hom}(C_*(X, Y; \mathbb{A}), M)$ est appelé le *complexe de cochaînes singulières relatives à coefficients dans \mathbb{A}* . L'opérateur bord $\partial : C^n(X) \rightarrow C^{n+1}(X)$ est donné par

$$\partial c(\sigma) = c(\partial \sigma) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i c(\partial_i \sigma) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i c(\sigma|_{((e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_{n+1}))})$$

pour toute cochaîne singulière c dans $C^n(X)$ et tout $(n+1)$ -simplexe singulier $\sigma : \Delta_{n+1} \rightarrow X$ (avec les notations de la proposition 5.7).

Le module n -ème groupe de cohomologie de $C^*(X, Y)$ est noté

$$H^n(X, Y) = H^n(X, Y; M),$$

et appelé le *n -ème groupe de cohomologie singulière relative de (X, Y) à coefficients dans M* . Pour $Y = \emptyset$, ce module est noté $H^n(X) = H^n(X, M)$, et appelé le *n -ème groupe de cohomologie singulière de X à coefficients dans M* .

(2) Soit X un CW-complexe, et $D_*(X, \mathbb{A})$ le complexe de chaînes cellulaires de X à coefficients dans \mathbb{A} (voir la partie 6.1). Le module n -ème groupe de cohomologie du complexe de cochaînes $\text{Hom}(D_*(X, \mathbb{A}), M)$ est appelé le *n -ème groupe de cohomologie cellulaire de X à coefficients dans M* . On le note $D^*(X) = D^*(X, M)$.

Proposition 7.2 *Si C est un complexe de chaînes, alors*

$$\begin{array}{ccc} H^n(C, M) \times H_n(C, \mathbb{A}) & \longrightarrow & M \\ ([c], [z]) & \longmapsto & c(z) \end{array}$$

est une application bilinéaire (appelée produit de Kronecker).

Démonstration. Pour toutes cochaînes c, c' et toutes chaînes σ, σ' , on a, en utilisant le fait que le bord et le cobord sont duaux,

$$(c + \partial c')(\sigma + \partial \sigma') = c(z) + c'(\partial \sigma) + \partial c(\sigma') + c'(\partial \circ \partial \sigma').$$

En particulier, si c est un cocycle, et σ un cycle, alors $(c + \partial c')(\sigma + \partial \sigma') = c(z)$. Donc le produit de Kronecker est bien défini. Il est immédiat qu'il est bilinéaire. \square

Exercice E.73 *Si $\mathbb{A} = M = \mathbb{Z}$, montrer que le produit de Kronecker induit une application*

$$\theta : H^n(C, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(H_n(C, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$$

qui est surjective.

Proposition 7.3 *On suppose que $\mathbb{A} = M = k$ est un corps. On note $E' = \text{Hom}(E, k)$ l'espace vectoriel dual d'un espace vectoriel E sur k .*

Si C est un complexe de chaînes d'espaces vectoriels de dimension finie, alors l'application $\theta : H^n(C, k) \rightarrow H_n(C, k)'$ induite par le produit de Kronecker est un isomorphisme. En particulier, $H^n(C, k)$ et $H_n(C, k)$ sont isomorphes.

Démonstration. On rappelle que $(E/F)' = \{f \in E' : f|_F = 0\}$ si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E .

Si C^n est une n -cochaîne et σ_{n+1} une $(n+1)$ -chaîne, alors $\partial^n c^n(\sigma_{n+1}) = c^n(\partial_{n+1} \sigma_{n+1})$. Donc l'espace vectoriel des cocycles Z^n est le sous-espace vectoriel de $C^n = C'_n$ des formes linéaires s'annulant sur l'espace vectoriel des bords B_n . D'après le rappel, $Z^* = (C_*/B_*)'$. Comme les espaces sont de dimension finie, on a donc $(Z^*)' = C_*/B_*$. Donc

$$(H^*)' = (Z^*/B^*)' = \{f \in (Z^*)' : f \circ \partial^* = 0\} = \{x \in C_*/B_* : \partial_* x = 0\} = Z_*/B_* = H_*.$$

Comme un espace vectoriel de dimension finie et son dual sont isomorphes, le résultat en découle. \square

Corollaire 7.4 *Si X est un CW-complexe fini, et k un corps, alors on a un isomorphisme naturel entre le n -ème groupe de cohomologie cellulaire et le dual du n -ème groupe d'homologie cellulaire de X à coefficients dans k :*

$$H^n(D_*(X), k) \simeq H_n(D_*(X), k)' \simeq H_n(D_*(X), k). \quad \square$$

7.2 Propriétés de la cohomologie

Les propriétés suivantes de la cohomologie singulière et cellulaire sont analogues à celles de l'homologie singulière et cellulaire. Elles se démontrent en appliquant le foncteur $\text{Hom}(\cdot, M)$ aux divers complexes de chaînes singulières et cellulaires (qui sont des modules libres), et en utilisant la proposition 7.1. Le détail des preuves est laissé en exercice (c'est un excellent exercice de révision!), voir aussi [Hat].

Fonctorialité de la cohomologie

Un morphisme de paires d'espaces topologiques $f : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$ induit un morphisme de complexes de chaînes $f_* : C_*(X, Y) \rightarrow C_*(X', Y')$. Le morphisme de complexes de cochaînes $f^* : C^*(X', Y') \rightarrow C^*(X, Y)$ induit en cohomologie un morphisme de modules $f^* : H^*(X', Y') \rightarrow H^*(X, Y)$. On a clairement $id^* = id$ et $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$. Donc $H^*(\cdot, \cdot; M)$ est un foncteur contravariant de la catégorie des paires d'espaces topologiques dans la catégorie des modules.

De même, $H^*(\cdot, M)$ est un foncteur contravariant de la catégorie des espaces topologiques dans la catégorie des modules, ainsi que $H^*(D^*(\cdot), M)$.

Cohomologie du point et en degré 0

La cohomologie de l'espace réduit à un point se calcule facilement :

$$H^n(\{x\}, M) = \begin{cases} M & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Si $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ est la famille des composantes connexes par arcs d'un espace topologique X , alors

$$H^n(X) = \prod_{\alpha \in A} H^n(X_\alpha).$$

Ceci découle d'une propriété du foncteur Hom rappelé au début de cette partie 7.1.

Si X est un espace topologique connexe par arcs, alors

$$H^0(X, M) = \text{Hom}(H_0(X, M), M) = M.$$

Invariance homotopique

Si $f, g : X \rightarrow Y$ sont deux applications continues entre deux espaces topologiques, qui sont homotopes, alors $f_* = g_* : H^n(Y) \rightarrow H^n(X)$ pour tout n . Donc deux espaces topologiques ayant même type d'homotopie ont leurs groupes de cohomologie singulière isomorphes. En particulier, si X est un espace contractile, alors

$$H^n(X, M) = \begin{cases} M & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Suite exacte longue relative de cohomologie

Soit (X, Y) une paire d'espaces topologiques. Si $i : Y \rightarrow X$ et $j : (X, \emptyset) \rightarrow (X, Y)$ sont les inclusions, alors

$$0 \leftarrow C^*(Y) \xleftarrow{i^*} C^*(X) \xleftarrow{j^*} C^*(X, Y) \leftarrow 0$$

est, par la proposition 7.1 appliquée à la suite exacte courte analogue en homologie, une suite exacte courte de complexes de cochaînes.

Donc, pour toute paire d'espaces topologiques (X, Y) , il existe pour tout n dans \mathbb{N} un morphisme de modules

$$\delta : H^n(X, Y) \rightarrow H^{n+1}(Y)$$

tels que

1. pour tout morphisme de paires $f : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$, on a

$$\delta \circ f_* = f_* \circ \delta,$$

2. si $i : Y \rightarrow X$ et $j : X = (X, \emptyset) \rightarrow (X, Y)$ sont les inclusions, alors la suite de modules et de morphismes de modules

$$\dots \leftarrow H^{n+1}(X, Y) \xleftarrow{\delta} H^n(Y) \xleftarrow{i_*} H^n(X) \xleftarrow{j_*} H^n(X, Y) \xleftarrow{\delta} H^{n-1}(Y) \leftarrow \dots$$

est exacte.

Excision

Soit X un espace topologique, A un sous-espace de X , et $U \subset A$ avec $\overline{U} \subset \overset{\circ}{A}$. L'inclusion des paires d'espaces topologiques $(X - U, A - U) \rightarrow (X, A)$ induit un isomorphisme (dit *d'excision*) en cohomologie : pour tout n dans \mathbb{N} ,

$$H^n(X, A) \simeq H^n(X - U, A - U).$$

Suite exacte de Mayer-Vietoris

Soit X un espace topologique, U, V deux ouverts de X recouvrant X , et

$$\begin{array}{ccc} U \cap V & \xrightarrow{i_1} & U \\ i_2 \downarrow & & \downarrow j_1 \\ V & \xrightarrow{j_2} & X \end{array}$$

le diagramme commutatif des inclusions. Il existe une suite exacte longue de modules, dite suite exacte de Mayer-Vietoris de X ,

$$\dots \rightarrow H^{n+1}(X) \xleftarrow{\delta} H^n(U \cap V) \xrightarrow{((i_1)_* - (i_2)_*)} H^n(U) \times H^n(V) \xrightarrow{(j_1)_* + (j_2)_*} H^n(X)$$

$$\xleftarrow{\delta} H^{n-1}(U \cap V) \rightarrow \dots$$

qui est naturel pour les applications continues, au sens que pour tout espace topologique X' , muni d'un recouvrement ouvert $\{U', V'\}$, pour toute application continue $f : X \rightarrow X'$ telle que $f(U) \subset U', f(V) \subset V'$, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & H^n(U \cap V) & \xrightarrow{((i_1)_* - (i_2)_*)} & H^n(U) \times H^n(V) & \xrightarrow{(j_1)_* + (j_2)_*} & H^n(X) & \xleftarrow{\delta} & H^{n-1}(U \cap V) \dots \\ & \downarrow (f_{U \cap V})_* & & \downarrow (f_U)_* \times (f_V)_* & & \downarrow f_* & & \downarrow (f_{U \cap V})_* \\ \dots & H^n(U' \cap V') & \xrightarrow{((i'_1)_* - (i'_2)_*)} & H^n(U') \times H^n(V') & \xrightarrow{(j'_1)_* + (j'_2)_*} & H^n(X') & \xleftarrow{\delta} & H^{n-1}(U' \cap V') \dots \end{array}$$

Théorème de Hurewicz

Si X est un espace topologique connexe par arcs et x un point base de X , si $\mathbb{A} = M = \mathbb{Z}$, alors l'application

$$\begin{array}{ccc} H^1(X, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \text{Hom}(\pi_1(X, x), \mathbb{Z}) \\ [c] & \longmapsto & \{ [\alpha] \mapsto c(\widehat{\alpha}) \} \end{array} ,$$

avec $\widehat{\alpha}$ le 1-cycle singulier identifié au lacet α , avec $[\alpha]$ la classe d'homotopie du lacet α , et avec $[c]$ la classe de cohomologie du 1-cocycle c . Par le théorème de Hurewicz en homologie, on a donc

$$H^1(X, \mathbb{Z}) \simeq \text{Hom}(H_1(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \simeq \text{Hom}(\pi_1(X, x), \mathbb{Z}) .$$

7.3 Autres exercices

Exercice E.74 Soit X une variété topologique séparée de dimension d , et x_1, \dots, x_k des points deux à deux distincts de X . Calculer $H^n(X, X - \{x_1, \dots, x_k\}; \mathbb{Z})$ pour tout n dans \mathbb{N} .

7.4 Indications pour la résolution des exercices

Exercice E.74 Dans ce qui suit, le module des coefficients est \mathbb{Z} . Comme X est une variété topologique séparée de dimension d , il existe U_1, \dots, U_k des voisinages ouverts deux à deux disjoints de x_1, \dots, x_k , qui sont homéomorphes à la boule ouverte de dimension d . On pose $A = X - \{x_1, \dots, x_k\}$ et $U = X - \bigcup_{i=1}^k U_i$. Alors U est fermé, A ouvert, et $U \subset A$. Pour tout n dans \mathbb{N} , par le théorème d'excision, $H^n(X, A) \simeq H^n(X - U, A - U) = H^n(\bigcup_{i=1}^k U_i, \bigcup_{i=1}^k U_i - \{x_i\}) = \bigoplus_{i=1}^k H^n(U_i, U_i - \{x_i\})$. Par invariance homotopique de la cohomologie relative,

$$H^n(U_i, U_i - \{x_i\}) \simeq H^n(\overline{U_i}, \overline{U_i} - \{x_i\}) \simeq H^n(\mathbb{B}_d, \mathbb{B}_d - \{0\}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} ,$$

par un résultat du cours. Donc

$$H^n(X, X - \{x_1, \dots, x_k\}) = \begin{cases} \mathbb{Z}^k & \text{si } n = d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

A Annexe : rappels de topologie générale

Les références pour cet appendice sont [Bou, Dug, Dix, Pau2]. On suppose connues, essentiellement pour des exemples, les notions d'espaces vectoriels normés et d'espaces métriques. Les preuves qui ne sont pas données ci-dessous sont les mêmes que dans le cas particulier des espaces métriques, ou sont laissées en exercice.

A.1 Généralités

Une *espace topologique* est un ensemble X muni d'un ensemble \mathcal{O} de parties de X tel que

1. toute intersection finie d'éléments de \mathcal{O} appartient à \mathcal{O} ,
2. toute union d'éléments de \mathcal{O} appartient à \mathcal{O} .

Par abus, on note souvent X le couple (X, \mathcal{O}) . Par convention, une intersection vide de parties d'un ensemble E est égal à E , et une union vide de parties de E est égale à la partie vide. Donc \emptyset et X appartiennent à \mathcal{O} . Les éléments de \mathcal{O} sont appelés les *ouverts* de X , et \mathcal{O} une *topologie* sur l'ensemble X . Les complémentaires des ouverts s'appellent les *fermés*. Toute union finie de fermés est fermée, toute intersection de fermés est fermée, \emptyset et X sont fermés. Étant donné un ensemble de parties d'un ensemble E , stable par intersections et par unions finies, l'ensemble des complémentaires de ces parties est une topologie sur E .

Une bijection $f : X \rightarrow Y$ entre deux espaces topologiques est un *homéomorphisme* si l'image réciproque par f de la topologie de Y est la topologie de X . Deux espaces topologiques X, Y sont *homéomorphes* s'il existe un homéomorphisme de X dans Y . « Être homéomorphe à » est une relation d'équivalence sur tout ensemble d'espaces topologiques. Une propriété P sur les espaces topologiques est dite *invariante par homéomorphismes* si tout espace topologique homéomorphe à un espace topologique ayant la propriété P admet aussi la propriété P .

Exemple 1 : Si X est un ensemble, alors $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$ est une topologie sur X , dite *topologie grossière*. L'espace (X, \mathcal{O}) est alors dit *grossier*. L'ensemble $\mathcal{P}(X)$ de toutes les parties de X est une topologie sur X , appelée *topologie discrète*. L'espace topologique $(X, \mathcal{P}(X))$ est alors dit *discret*. « Être grossier » et « être discret » sont des propriétés invariantes par homéomorphismes.

Exemple 2 : Si (X, d) est un espace métrique, en notant $B(x, r)$ la boule ouverte de centre $x \in X$ et de rayon $r > 0$, alors l'ensemble des parties U de X telles que

$$\forall x \in U, \exists r > 0, \quad B(x, r) \subset U$$

est une topologie sur X , appelée *topologie induite par la distance*. Sauf mention contraire, tout espace métrique sera muni de la topologie induite par sa distance.

Exemple 3 : Soit k un corps commutatif, et $\mathbb{A}_n(k) = k^n$. Un *fermé de Zariski* de $\mathbb{A}_n(k)$ est une partie de la forme

$$F = \{x \in k^n : \forall i \in I, P_i(x) = 0\},$$