Antoine Chambert-Loir

ALGÈBRE COMMUTATIVE

10 Algèbre homologique

Ce chapitre expose quelques rudiments d'algèbre homologique. Issue de la topologie algébrique où elle a des applications frappantes (le théorème de Brouwer par exemple), le formalisme algébrique qui la sous-tend a ensuite essaimé dans de nombreux domaines des mathématiques. C'est aujourd'hui en outil fondamental en algèbre commutative, en géométrie algébrique, en topologie et elle a même des applications en robotique !

10.1. Suites exactes

La notion de suite exacte permet de résumer dans un diagramme simple à écrire de nombreuses propriétés algébriques.

Définition 10.1.1. — *Soit* A *un anneau. Une* suite exacte *de* A*-modules est un diagramme*

$$\mathrm{M}_0 \xrightarrow{f_1} \mathrm{M}_1 \xrightarrow{f_2} \mathrm{M}_2 \to \cdots \to \mathrm{M}_{n-1} \xrightarrow{f_n} \mathrm{M}_n$$

où pour tout $i \in \{2; \dots; n\}$, $\operatorname{Ker} f_i = \operatorname{Im} f_{i-1}$.

En particulier, on a $f_i \circ f_{i-1} = 0$ pour tout $i \in \{2; \dots; n\}$. Un cas particulier très important est fournie par les suites de 5 modules, les deux extrémités étant nulles. On parle alors de *suite exacte courte*.

Proposition 10.1.2. — *Une suite de* A*-modules*

$$0 \to \mathrm{N} \xrightarrow{i} \mathrm{M} \xrightarrow{p} \mathrm{P} \to 0$$

est exacte si et seulement si :

- *i est injectif ;*
- *$\operatorname{Ker} p = \operatorname{Im} i$;*
- *p est surjectif.*

Alors, i induit un isomorphisme de N *sur le sous-*A*-module* $i(\mathrm{N})$ *de* M *et* p *induit un isomorphisme* $\mathrm{M}/i(\mathrm{N}) \simeq \mathrm{P}$.

Démonstration. — Il suffit d'écrire toutes les conditions. L'image de la flèche $0 \to \mathrm{N}$ est 0, c'est aussi le noyau de i, donc i est injectif. Ensuite, $\operatorname{Im} i = \operatorname{Ker} p$. Enfin, l'image de p est égale au noyau de l'homomorphisme $\mathrm{P} \to 0$, c'est-à-dire P, donc p est surjectif. Le reste de la proposition provient du théorème de factorisation. □

DÉFINITION 10.1.3. — *Un complexe est un diagramme*

$$\mathrm{M}_0 \xrightarrow{f_1} \mathrm{M}_1 \xrightarrow{f_2} \mathrm{M}_2 \to \cdots \to \mathrm{M}_{n-1} \xrightarrow{f_n} \mathrm{M}_n$$

où pour tout $i \in \{2;\dots;n\}$, $f_i \circ f_{i-1} = 0$.

DÉFINITION 10.1.4. — *Soit* A *un anneau et* $f\colon \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ *un homomorphisme de* A*-modules. Le* A*-module quotient* $\mathrm{N}/f(\mathrm{M})$ *est appelé* conoyau *de* f. *On le note* $\operatorname{Coker} f$.

Remarque 10.1.5. — On a $\operatorname{Coker} f = 0$ si et seulement si f est surjectif. Ainsi, un homomorphisme $f\colon \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ est un isomorphisme si et seulement si $\operatorname{Ker} f = 0$ et $\operatorname{Coker} f = 0$.

THÉORÈME 10.1.6 (Lemme du serpent). — *Considérons un diagramme d'homomorphismes de* A*-modules*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{N} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{M} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"'] & \mathrm{P} \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{N}' \arrow[r, "i'"] & \mathrm{M}' \arrow[r, "p'"] & \mathrm{P}' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dans lequel les deux lignes sont supposées exactes et les deux carrés commutatifs : $i' \circ f = f \circ i$ *et* $p' \circ g = h \circ p$. *Il existe alors un homomorphisme canonique* $\partial\colon \operatorname{Ker} h \to \operatorname{Coker} f$ *tel que l'on ait une suite exacte*

$$0 \to \operatorname{Ker} f \xrightarrow{i_*} \operatorname{Ker} g \xrightarrow{p_*} \operatorname{Ker} h \xrightarrow{\partial} \operatorname{Coker} f \xrightarrow{i'_*} \operatorname{Coker} g \xrightarrow{p'_*} \operatorname{Coker} h \to 0.$$

Démonstration. — a) On a $i(\operatorname{Ker} f) \subset \operatorname{Ker} g$ et $p(\operatorname{Ker} g) \subset \operatorname{Ker} h$. En effet, si $x \in \mathrm{N}$ vérifie $f(x) = 0$, alors $g(i(x)) = (g \circ i)(x) = (i' \circ f)(x) = i'(f(x)) = 0$, donc $i(x) \in \operatorname{Ker} g$. De même, si $y \in \operatorname{Ker} g$, on a $h(p(y)) = (h \circ p)(y) = (p' \circ g)(y) = p'(g(y)) = 0$, donc $p(y) \in \operatorname{Ker} h$.

On a ainsi des homomorphismes $i_*\colon \operatorname{Ker} f \to \operatorname{Ker} g$ et $p_*\colon \operatorname{Ker} g \to \operatorname{Ker} h$.

b) On a $i'(\operatorname{Im} f) \subset \operatorname{Im} g$ et $p'(\operatorname{Im} g) \subset \operatorname{Im} h$. En effet, si $x' \in \operatorname{Im} f$, soit $x \in \mathrm{N}$ tel que $x' = f(x)$. Alors, $i'(x') = (i' \circ f)(x) = (g \circ i)(x) = g(i(x))$, ce qui prouve que $i'(x')$ appartient à $\operatorname{Im} g$.

De même, si $y' \in \operatorname{Im} g$, soit $y \in \mathrm{M}$ tel que $y' = g(y)$. On a alors $p'(y') = (p' \circ g)(y) = (h \circ p)(y) = h(p(y))$ donc $p'(y')$ appartient à $\operatorname{Im} h$.

Il en résulte que le noyau de l'homomorphismes composé

$$\mathrm{N}' \xrightarrow{i'} \mathrm{M}' \rightarrow \mathrm{M}'/\operatorname{Im} g = \operatorname{Coker}(g)$$

contient $\operatorname{Im}(f)$, d'où par passage au quotient un homomorphisme canonique $i'_*\colon \operatorname{Coker}(f) = \mathrm{N}'/\operatorname{Im}(f) \rightarrow \operatorname{Coker}(g)$. De même, on en déduit un homomorphisme $p'_*\colon \operatorname{Coker}(g) \rightarrow \operatorname{Coker}(h)$, induit par p'.

c) L'homomorphisme i_* est injectif : si $i_*(x) = 0$, $i(x) = 0$ donc $x = 0$.

Comme p_* est la restriction à $\operatorname{Ker} g$ de p et comme $p \circ i = 0$, on a $p_* \circ i_* = 0$ donc $\operatorname{Im} i_* \subset \operatorname{Ker} p_*$. Réciproquement, soit $y \in \operatorname{Ker} p_*$. On a donc $y \in \operatorname{Ker} g$ et $p(y) = 0$. Comme la première ligne du diagramme est exacte, $y \in \operatorname{Im} i$. Soit ainsi $x \in \mathrm{N}$ tel que $y = i(x)$. On a $0 = g(y) = g(i(x)) = (g \circ i)(x) = (i' \circ f)(x) = i'(f(x))$. Comme i' est injectif, $f(x) = 0$ et $x \in \operatorname{Ker} f$. Par suite, $y = i(x) \in i(\operatorname{Ker} f) = i_*(\operatorname{Ker} f)$.

d) L'homomorphisme p'_* est surjectif : si $\zeta' \in \operatorname{Coker} h$, on peut écrire $\zeta' = \operatorname{cl}(z')$ avec $z' \in \mathrm{P}'$. Comme p' est surjectif, il existe $y' \in \mathrm{M}'$ tel que $z' = p'(y')$. Alors, par définition de p'_*, on a $\zeta' = p'_*(\operatorname{cl}(y'))$, si bien que $\zeta' \in \operatorname{Im} p'_*$.

On a $p'_* \circ i'_* = 0$. En effet, par définition de i'_*, si $x' \in \mathrm{N}'$, $i'_*(\operatorname{cl}(x')) = \operatorname{cl}(i'(x'))$, d'où

$$p'_*(i'_*(\operatorname{cl}(x')) = p'_*(\operatorname{cl}(i'(x'))) = \operatorname{cl}(p'(i'(x'))) = 0.$$

Réciproquement, si $p'_*(\operatorname{cl}(y')) = 0$, on a $\operatorname{cl}(p'(y')) = 0$, d'où $p'(y') \in \operatorname{Im} h$. On écrit $p'(y') = h(z)$ avec $z \in \mathrm{P}$. Comme p est surjectif, il existe $y \in \mathrm{M}$ tel que $z = p(y)$ et $p'(y') = h(p(z)) = p'(g(z))$. Ainsi, $y' - g(z)$ appartient à $\operatorname{Ker} p'$, donc est de la forme $i'(x')$ pour $x' \in \mathrm{N}'$. Finalement,

$$\operatorname{cl}(y') = \operatorname{cl}(g(z) + i'(x')) = \operatorname{cl}(i'(x')) = i'_*(x'),$$

d'où $\operatorname{Ker} p'_* = \operatorname{Im} i'_*$.

e) Nous allons maintenant construire l'homomorphisme ∂. La restriction à $p^{-1}(\operatorname{Ker} h) = \operatorname{Ker}(h \circ p)$ de g fournit un homomorphisme $\operatorname{Ker}(h \circ p) \rightarrow \mathrm{M}$ dont l'image est contenue dans le noyau de p' (si $h(p(y)) = 0$, $p'(g(y)) = 0$). Puisque $\operatorname{Ker} p' = \operatorname{Im} i'$ et comme $i'\colon \mathrm{N}' \rightarrow \operatorname{Im} i'$ est un isomorphisme, il en résulte un homomorphisme canonique $p^{-1}(\operatorname{Ker} h) \rightarrow \mathrm{N}'$ que l'on compose ensuite avec la surjection canonique $\mathrm{N}' \rightarrow \operatorname{Coker}(f)$, d'où un homomorphisme $\gamma\colon p^{-1}(\operatorname{Ker} h) \rightarrow \operatorname{Coker}(f)$.

Si $y = i(x) \in i(\mathrm{N})$, on a $g(y) = i'(f(x))$, donc $\gamma(y) = \operatorname{cl}(f(x)) = 0$. Ainsi, $\operatorname{Ker} \gamma$ contient $i(\mathrm{N})$, d'où par passage au quotient un homomorphisme bien défini

$$\partial\colon \operatorname{Ker} h = p^{-1}(\operatorname{Ker} h)/p^{-1}(0) = p^{-1}(\operatorname{Ker} h)/i(\mathrm{N}) \xrightarrow{\gamma} \operatorname{Coker}(f).$$

Concrètement, l'image d'un élément z de $\operatorname{Ker} h$ par l'homomorphisme ∂ est obtenue de la façon suivante. Comme p est surjectif, il existe $y \in \mathrm{M}$ tel que $z = p(y)$. Alors, $0 = h(z) = h(p(y)) = p'(g(y))$, donc $g(y) \in \operatorname{Ker} p' = \operatorname{Im} i'$. Il existe ainsi $x' \in N'$ tel que $g(y) = i'(x')$. Alors, $\partial(z)$ est la classe de x' dans $\operatorname{Coker}(f) = N'/\operatorname{Im} f$.

f) Montrons que $\operatorname{Im} p_* = \operatorname{Ker} \partial$.

Soit $z \in \operatorname{Im} p_*$, d'où $y \in \operatorname{Ker} g$ tel que $p(y) = z$. Autrement dit, $g(y) = 0$ et avec les notations du paragraphe précédent, $x' = 0$, d'où $\partial(z) = 0$ et $z \in_k er\partial$.

Réciproquement, si $z \in \operatorname{Ker} \partial$, on a $x' \in \operatorname{Im} f$, donc $x' = f(x)$ pour un certain $x \in N$ et $g(y) = i'(x') = g(i(x))$. On a donc $y - i(x) \in \operatorname{Ker} g$. Par suite, $z = p(y) = p(y - i(x)) \in p(\operatorname{Ker} g) = \operatorname{Im} p_*$.

g) Enfin, montrons que $\operatorname{Im} \partial = \operatorname{Ker} i'_*$.

Soit $z \in N$; avec les mêmes notations, $i'(\partial(z)) = i'(\operatorname{cl}(x')) = \operatorname{cl}(i'(x')) = \operatorname{cl}(g(y)) = 0$, donc $\partial(z) \in \operatorname{Ker} i'_*$ et $\operatorname{Im} \partial \subset \operatorname{Ker} i'_*$.

Réciproquement, soit $\xi' \in \operatorname{Ker} i'_*$. On peut écrire $\xi' = \operatorname{cl}(x')$. On a alors $i'_*(\xi') = \operatorname{cl}(i'(x'))$. Par suite, $i'(x') \in \operatorname{Im} g$. Si $i'(x') = g(y)$ avec $y \in M$, on a par définition $\partial(p(y)) = \operatorname{cl}(x') = \xi'$ si bien que $\operatorname{Ker} i'_* \subset \operatorname{Im} \partial$.

Le théorème est donc démontré. □

Corollaire 10.1.7. — *a) Si f et h sont injectives, g aussi. Si f et h sont surjectives, g aussi.*

b) Si f est surjective et g injective, h est injective Si g est surjective et h injective, f est surjective..

Démonstration. — a) Si f et h sont injectives, la suite exacte du diagramme du serpent commence par $0 \to 0 \xrightarrow{i_*} \operatorname{Ker} g \xrightarrow{p_*} 0$. Nécessairement, $\operatorname{Ker} g = 0$. Si f et h sont surjectives, elle se termine par $0 \xrightarrow{i'_*} \operatorname{Coker} g \xrightarrow{p'_*} 0$, donc $\operatorname{Coker} g = 0$ et f est injective.

b) Si f est surjective et g injective, on a $\operatorname{Ker} g = 0$ et $\operatorname{Coker} f = 0$. Par suite, le milieu de la suite exacte s'écrit $0 \xrightarrow{p_*} \operatorname{Ker} h \xrightarrow{\partial} 0$, donc h est injective. Enfin, si g est surjective et h injective, on a $\operatorname{Ker} h = 0$, $\operatorname{Coker} g = 0$, d'où une suite exacte $0 \xrightarrow{\partial} \operatorname{Coker} f \xrightarrow{i'_*} 0$, donc f est surjective. □

Exercice 10.1.8. — Démontrer directement le corollaire précédent.

10.2. Suites exactes scindées. Modules projectifs et injectifs

Lemme 10.2.1. — *Soit A un anneau. et considérons une suite exacte courte de A-modules*

$$0 \to N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} P \to 0.$$

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) *il existe $q\colon P \to M$ tel que $p \circ q = \mathrm{Id}_P$ (p a un inverse à droite);*

(2) *il existe $j\colon M \to N$ tel que $j \circ i = \mathrm{Id}_N$ (i a un inverse à gauche);*

(3) *$i(\mathrm{N})$ a un supplémentaire dans* M.

DÉFINITION 10.2.2. — *Une suite exacte courte qui vérifie les conditions du lemme 10.2.1 précédent est dite* scindée.

Démonstration. — (1)$\Rightarrow$(3). — Soit $\mathrm{Q} = q(\mathrm{P})$ l'image de q dans M et montrons que Q est un supplémentaire de $i(\mathrm{N})$. Tout d'abord, si $m = i(x)+q(y)$, pour $x \in \mathrm{N}$ et $y \in \mathrm{P}$, on a $p(m) = p(i(x)) + p(q(y)) = y$. Ainsi, si $m = i(x) + q(y) = 0$, alors $y = p(m) = 0$ puis $i(x) = 0$ — donc aussi $x = 0$ puisque i est injectif. Cela montre que $i(\mathrm{N})$ et Q sont en somme directe. De plus, si $m \in \mathrm{M}$, posons $y = p(m)$. Alors, $p(m - q(y)) = p(m) - p(q(p(m))) = p(m) - p(m) = 0$, donc $m - q(y) \in i(\mathrm{N})$. Cela montre que $\mathrm{M} = i(\mathrm{N}) + \mathrm{Q}$. Ainsi, $\mathrm{M} = i(\mathrm{N}) \oplus \mathrm{Q}$ et Q est un supplémentaire de $i(\mathrm{N})$ dans M.

(3)$\Rightarrow$(1). — Soit Q un supplémentaire de $i(\mathrm{N})$ dans M. Considérons l'homomorphisme $p' \colon \mathrm{Q} \to \mathrm{P}$ obtenu par restriction à Q de p. On a $\operatorname{Ker} p' = \operatorname{Ker} p \cap \mathrm{Q} = i(\mathrm{N}) \cap \mathrm{Q} = 0$ puisque Q et $i(\mathrm{N})$ sont en somme directe. Donc p' est injectif. De plus, si $x \in \mathrm{P}$, soit $y \in \mathrm{M}$ tel que $x = p(y)$. On peut écrire $y = i(z) + z'$ avec $z \in \mathrm{N}$ et $z' \in \mathrm{Q}$. Alors, $x = p(i(z)) + p(z') = p(z')$ et p' est surjectif. Par suite, p' est un isomorphisme et l'homomorphisme réciproque $q \colon \mathrm{P} \to \mathrm{Q}$ vérifie bien $p \circ q = \mathrm{Id}_{\mathrm{P}}$.

(2)$\Rightarrow$(3).— Soit Q le noyau de j. Si $x \in \mathrm{Q} \cap i(\mathrm{N})$, on peut écrire $x = i(y)$ avec $y \in \mathrm{N}$ et $0 = j(x) = j(i(y)) = y$, donc $y = 0$ et $x = 0$. Ainsi, Q et $i(\mathrm{N})$ sont en somme directe. De plus, si $x \in \mathrm{M}$, posons $y = x - i(j(x))$. Alors, $j(y) = j(x) - j(i(j(x)) = 0$ donc $y \in \mathrm{Q}$. Ceci prouve que $\mathrm{Q} + i(\mathrm{N}) = \mathrm{M}$. Ainsi, $\mathrm{M} = \mathrm{Q} \oplus i(\mathrm{N})$.

(3)$\Rightarrow$(2). — Soit Q un supplémentaire de $i(\mathrm{N})$ dans M. Considérons l'application $j \colon \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ qui associe à $m = x + i(y)$ avec $x \in \mathrm{Q}$ et $y \in \mathrm{N}$ l'élément $y \in \mathrm{N}$. Elle est bien définie car i est injectif. De plus, c'est un homomorphisme. Enfin, un élément $i(y) \in i(\mathrm{N})$ se décompose $i(y) = 0 + i(y)$, donc $j(i(y)) = y$ et $j \circ i = \mathrm{Id}_{\mathrm{N}}$. □

Remarque 10.2.3. — Comme tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel possède un supplémentaire, toute suite exacte de modules sur un corps est scindée.

DÉFINITION 10.2.4. — *On dit qu'un* A*-module* P *est* projectif *si toute suite exacte courte*

$$0 \to \mathrm{N} \to \mathrm{M} \to \mathrm{P} \to 0$$

est scindée.

Autrement dit, P est projectif si et seulement si tout homomorphisme surjectif $f \colon \mathrm{M} \to \mathrm{P}$ admet un inverse à droite.

THÉORÈME 10.2.5. — *Soit* P *un* A*-module. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) P *est projectif ;*

(2) P *est un facteur direct d'un* A*-module libre ;*

(3) *pour tout homomorphisme surjectif* $p\colon \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ *et tout homomorphisme* $f\colon \mathrm{P} \to \mathrm{N}$, *il existe un homomorphisme* $g\colon \mathrm{P} \to \mathrm{M}$ *tel que* $f = p \circ g$.

Rappelons qu'un facteur direct d'un module est un sous-module qui possède un supplémentaire. D'autre part, l'énoncé (3) du théorème est souvent pris comme définition des modules projectifs.

Démonstration. — (1)⇒(2). — Supposons que P est projectif. Soit S une famille génératrice dans P et soit $\mathrm{L} = \mathrm{A}^{(\mathrm{S})}$ le A-module libre de base S. On a un homomorphisme canonique $p\colon \mathrm{L} \to \mathrm{P}$ tel que e_s (vecteur de $\mathrm{A}^{(\mathrm{S})}$ dont toutes les coordonnées valent 0 sauf la coordonnée s qui vaut 1) a pour image s. Soit N le noyau de p, d'où une suite exacte courte $0 \to \mathrm{N} \to \mathrm{L} \to \mathrm{P} \to 0$. Comme P est supposé projectif, N admet un supplémentaire Q dans L. Dans la démonstration du lemme 10.2.1, on a montré que la restriction à Q de l'homomorphisme p est un isomorphisme $\mathrm{Q} \simeq \mathrm{P}$. Par suite, P est (isomorphe à) un facteur direct du A-module libre L.

(2)⇒(3). — Supposons maintenant qu'il existe un A-module libre L contenant P et un sous-module Q de L tel que $\mathrm{P} \oplus \mathrm{Q} = \mathrm{L}$. Fixons une base S de L.

Soit $p\colon \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ un homomorphisme surjectif et $f\colon \mathrm{P} \to \mathrm{N}$ un homomorphisme quelconque. On veut montrer qu'il existe $g\colon \mathrm{P} \to \mathrm{M}$ tel que $p \circ g = f$.

On définit un homomorphisme $\varphi\colon \mathrm{L} \to \mathrm{N}$ par $\varphi(x+y) = f(p)$ si $x \in \mathrm{P}$ et $y \in \mathrm{Q}$. Par construction, la restriction de φ à P est égale à f. Pour tout $s \in \mathrm{S}$, soit alors m_s un élément de M tel que $p(m_s) = \varphi(s)$ (il en existe car p est surjectif). Alors, la propriété universelle des modules libres implique qu'il existe un unique homomorphisme $\gamma\colon \mathrm{L} \to \mathrm{M}$ tel que $\gamma(s) = m_s$. Pour tout $s \in \mathrm{S}$, on a alors $p \circ \gamma(s) = p(m_s) = \varphi(s)$, donc S formant une base de L, $p \circ \gamma = \varphi$. Soit g la restriction de φ à P. Elle vérifie $p \circ g = \varphi|_{\mathrm{P}} = f$.

(3)⇒(1). — Soit $p\colon \mathrm{M} \to \mathrm{P}$ un homomorphisme surjectif. On applique l'hypothèse de (3) avec $\mathrm{N} = \mathrm{P}$ et $f = \mathrm{Id}_{\mathrm{P}}$. Il existe alors $g\colon \mathrm{P} \to \mathrm{M}$ tel que $p \circ g = \mathrm{Id}_{\mathrm{P}}$, autrement dit p a un inverse à droite. Cela prouve que P est un module projectif. □

En particulier, les modules libres sont projectifs.

Exercice 10.2.6. — a) Soit P un A-module projectif. Si P est de type fini, montrer qu'il existe un A-module libre de type fini L dont P est un facteur direct.

b) On suppose que A est un anneau principal. Montrer que tout A-module projectif de type fini est libre.

Définition 10.2.7. — *On dit qu'un* A*-module* I *est injectif si tout homomorphisme injectif* $i\colon \mathrm{I} \to \mathrm{M}$ *admet un inverse à gauche.*

Ceci revient bien sûr à dire que toute suite exacte courte

$$0 \to \mathrm{I} \to \mathrm{M} \to \mathrm{N} \to 0$$

est scindée. C'est en quelque sorte la définition duale de celle des modules projectif. Comme le fait remarquer Matsumura dans [5], il n'y a pas de notion duale des modules libres, si bien que l'on n'a pas de caractérisation des modules injectifs complètement analogue à celle fournie par le théorème 10.2.5 pour les modules projectifs.

THÉORÈME 10.2.8. — *Soit* I *un* A*-module. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(1) I *est injectif ;*

(2) *pour tout idéal* $\mathfrak{a}$ *de* A *et tout homomorphisme injectif* $f\colon \mathfrak{a} \to \mathrm{I}$*, il existe un homomorphisme* $g\colon \mathrm{A} \to \mathrm{I}$ *tel que* $f = g|_{\mathfrak{a}}$ *;*

(3) *pour tout homomorphisme injectif* $i\colon \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ *et tout homomorphisme* $f\colon \mathrm{M} \to \mathrm{I}$*, il existe un homomorphisme* $g\colon \mathrm{N} \to \mathrm{I}$ *tel que* $f = g \circ i$.

Là encore, c'est souvent la troisième de ces conditions qui est prise comme définition des modules injectifs.

Démonstration. — $(3)\Rightarrow(2)$. — Il suffit de poser $\mathrm{M} = \mathfrak{a}$ et $\mathrm{N} = \mathrm{A}$.

$(3)\Rightarrow(1)$. — Si $i\colon \mathrm{I} \to \mathrm{M}$ est injectif, appliquons l'hypothèse (3) à l'homomorphisme identique $\mathrm{I} \to \mathrm{I}$. On obtient un homomorphisme $g\colon \mathrm{M} \to \mathrm{I}$ tel que $g \circ i = \mathrm{Id}_{\mathrm{I}}$. Ainsi, I est injectif.

$(1)\Rightarrow(3)$. — Soit $i\colon \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ un homomorphisme injectif et $f\colon \mathrm{M} \to \mathrm{I}$ un homomorphisme. On veut montrer qu'il existe $g\colon \mathrm{N} \to \mathrm{I}$ tel que $f = g \circ i$.

Soit $\mathrm{P} \subset \mathrm{N} \times \mathrm{I}$ le sous-module image de l'homomorphisme $\mathrm{M} \to \mathrm{N} \times \mathrm{I}$ tel que $m \mapsto (i(m), -f(m))$ et soit $\varphi\colon \mathrm{I} \to \mathrm{N} \times \mathrm{I} \to (\mathrm{N} \times \mathrm{I})/\mathrm{P}$ l'homomorphisme composé tel que $x \mapsto \mathrm{cl}(0, x)$. Si $\varphi(x) = 0$, il existe $m \in \mathrm{M}$ tel que $(0, x) = (i(m), -f(m))$. Comme i est injectif, $m = 0$ et $x = 0$. Ainsi, φ est injectif.

Par hypothèse, il existe un homomorphisme $\psi\colon (\mathrm{N} \times \mathrm{I})/\mathrm{P} \to \mathrm{I}$ tel que $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathrm{I}}$. Soit alors $g\colon \mathrm{N} \to \mathrm{I}$ l'homomorphisme défini par $g(x) = \psi(\mathrm{cl}(x, 0))$. Si $x \in \mathrm{M}$, on a

$$g(i(x)) = \psi(\mathrm{cl}(i(x), 0)) = \psi(\mathrm{cl}(0, f(x))) = \psi(\varphi(f(x))) = f(x).$$

Ainsi, $g \circ i = f$, ce qu'il fallait démontrer.

$(2)\Rightarrow(1)$. — Soit $i\colon \mathrm{I} \to \mathrm{M}$ un homomorphisme injectif. On veut prouver qu'il existe $f\colon \mathrm{M} \to \mathrm{I}$ qui est un inverse à gauche de i, c'est-à-dire tel que $f \circ i = \mathrm{Id}_{\mathrm{I}}$.

Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des couples $(\mathrm{N}, f_{\mathrm{N}})$ où N est un sous-module de M contenant I et f_{N} un homomorphisme $\mathrm{N} \to \mathrm{I}$ vérifiant $f_{\mathrm{N}} \circ i = \mathrm{Id}_{\mathrm{I}}$. Comme i est injectif, c'est un isomorphisme $\mathrm{I} \to i(\mathrm{I})$ et l'isomorphisme réciproque définit un élément $(i(\mathrm{I}), i^{-1})$ de $\mathscr{F}$. Par conséquent, $\mathscr{F}$ n'est pas vide.

On définit un ordre $\prec$ sur $\mathscr{F}$ en posant

$$(\mathrm{N}, f_{\mathrm{N}}) \prec (\mathrm{N}', f_{\mathrm{N}'}) \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{N} \subset \mathrm{N}' \quad \text{et} \quad f_{\mathrm{N}'}|_{\mathrm{N}} = f_{\mathrm{N}}.$$

Muni de cette relation d'ordre, $\mathscr{F}$ est inductif. En effet, si $(\mathrm{N}_\alpha, f_\alpha)$ est une famille totalement ordonnée dans $\mathscr{F}$, la réunion $\mathrm{N} = \bigcup \mathrm{N}_\alpha$ est un sous-module de M et on peut définir $f_{\mathrm{N}} \colon \mathrm{N} \to \mathrm{I}$ en posant, si α est tel que $x \in \mathrm{N}_\alpha$, $f_{\mathrm{N}}(x) = f_{\mathrm{N}_\alpha}(x)$. Si $x \in \mathrm{N}_\alpha$ et $x \in \mathrm{N}_\beta$, on peut supposer, quitte à échanger α et β, que $(\mathrm{N}_\alpha, f_{\mathrm{N}_\alpha}) \prec (\mathrm{N}_\beta, f_{\mathrm{N}_\beta})$. Alors, $\mathrm{N}_\alpha \subset \mathrm{N}_\beta$ et $f_{\mathrm{N}_\beta}|_{\mathrm{N}_\alpha}$, d'où $f_{\mathrm{N}_\beta}(x) = f_{\mathrm{N}_\alpha}(x)$, ce qui prouve que f_{N} est bien défini.

D'après le lemme de Zorn, $\mathscr{F}$ admet un élément maximal $(\mathrm{N}, f_{\mathrm{N}})$. Supposons par l'absurde que $\mathrm{N} \neq \mathrm{M}$. Soit alors $m \in \mathrm{M} \setminus \mathrm{N}$ et soit $\mathfrak{a} = (\mathrm{N} : m)$ l'ensemble des $a \in \mathrm{A}$ tels que $am \in \mathrm{N}$. Notons $\mathrm{N}' = \mathrm{N} + \mathrm{A}m$. C'est un sous-module de M qui contient strictement N.

Soit $\varphi \colon \mathfrak{a} \to \mathrm{I}$ l'homomorphisme défini par $a \mapsto f_{\mathrm{N}}(am)$ si $a \in \mathfrak{a}$. Par l'hypothèse (2), il existe un homomorphisme $\psi \colon \mathrm{A} \to \mathrm{I}$ tel que $\psi(a) = f_{\mathrm{N}}(am)$ si $a \in \mathfrak{a}$.

On définit alors un homomorphisme $g \colon \mathrm{N}' \to \mathrm{I}$ en posant, si $x \in \mathrm{N}$ et $a \in \mathrm{A}$, $g(x + am) = f_{\mathrm{N}}(x) - \psi(a)$. C'est une application bien définie : si $x + am = x' + a'm$, $(a' - a)m = x - x'$ appartient à N, donc $a' - a \in \mathfrak{a}$ et

$$\begin{aligned}\big(f_{\mathrm{N}}(x') - \psi(a')\big) - \big(f_{\mathrm{N}}(x) - \psi(a)\big) &= f_{\mathrm{N}}(x' - x) - \psi(a' - a) \\ &= f_{\mathrm{N}}(x' - x) - f_{\mathrm{N}}((a' - a)m) = 0.\end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que c'est un homomorphisme. De plus, on a $g|_{\mathrm{N}} = f_{\mathrm{N}}$, donc aussi $g \circ i = \mathrm{Id}_{\mathrm{I}}$, si bien que le couple (N', g) définit un élément de $\mathscr{F}$. Mais ceci contredit l'hypothèse que N était maximal.

Par suite, un élément maximal de $\mathscr{F}$ est de la forme $(\mathrm{M}, f_{\mathrm{M}})$ où $f_{\mathrm{M}} \colon \mathrm{M} \to \mathrm{I}$ est un homomorphisme tel que $f_{\mathrm{M}} \circ i = \mathrm{Id}_{\mathrm{I}}$.

Ceci clôt la démonstration du théorème. □

Corollaire 10.2.9. — *Soit* A *un anneau principal et* M *un* A*-module. Alors,* M *est injectif si et seulement si pour tout* $a \in \mathrm{A}$, $a \neq 0$, *l'homomorphisme* $\mu_a \colon \mathrm{M} \to \mathrm{M}$, $x \mapsto ax$ *est surjectif.*

Démonstration. — Supposons que M est injectif et soit $a \in \mathrm{A}$, $a \neq 0$. Soit $x \in \mathrm{M}$ et considérons l'homomorphisme $(a) \to \mathrm{M}$ défini par $ab \mapsto bx$ (c'est là qu'on utilise que $a \neq 0$, le fait que a soit simplifiable suffirait). Comme M est injectif, la propriété (2) du théorème 10.2.8 montre qu'il existe un homomorphisme $f \colon \mathrm{A} \to \mathrm{M}$ tel que $f(ab) = bx$ si $b \in \mathrm{A}$. Alors, $f(1)$ est un élément de M tel que $af(1) = f(a) = x$. Ainsi, l'homomorphisme μ_a est surjectif.

Réciproquement, supposons que cette propriété est satisfaite. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de A et $f \colon \mathfrak{a} \to \mathrm{M}$ un homomorphisme. Comme A est principal, il existe $a \in$

A tel que $\mathfrak{a} = (a)$. Si $a = 0$, tout homomorphisme $g\colon \mathrm{A} \to \mathrm{M}$ convient, par exemple l'homomorphisme nul. Supposons maintenant que $a \neq 0$. Alors, pour tout $b \in \mathrm{A}$, $f(ab) = bf(a)$. Par hypothèse, il existe $x \in \mathrm{M}$ tel que $ax = f(a)$. Alors, l'homomorphisme $g\colon \mathrm{A} \to \mathrm{M}$ tel que $g(b) = bx$ pour tout $b \in \mathrm{A}$ vérifie $g(ab) = abx = bf(a) = f(ab)$ pour tout $b \in \mathrm{A}$. Ainsi, la restriction de g à l'idéal (a) est bien égale à f. Ceci prouve que M est injectif. ☐

Exemple 10.2.10. — Le **Z**-module **Q**/**Z** est un **Z**-module injectif.

10.3. Foncteurs exacts

Rappelons qu'un foncteur F de la catégorie des A-modules dans elle-même est une « application » qui associe à tout module M un module $F(\mathrm{M})$ et à tout homomorphisme $f\colon \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ un homomorphisme $F(f)\colon F(\mathrm{M}) \to F(\mathrm{N})$ de sorte que l'application $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{N}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(F(\mathrm{M}),F(\mathrm{N}))$ est un homomorphisme de A-algèbres (non commutatives) :

– on a $F(\mathrm{Id}_{\mathrm{M}}) = \mathrm{Id}_{F(\mathrm{M})}$ pour tout module M ;

– l'application $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{N}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(F(\mathrm{M}),F(\mathrm{N}))$ est un homomorphisme de A-modules ;

– pour tout couple d'endomorphisme $f\colon \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ et $g\colon \mathrm{N} \to \mathrm{P}$, $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Un tel foncteur est aussi appelé *foncteur covariant*.

Un foncteur *contravariant* est une application du même genre mais qui renverse le sens des flèches : à un homomorphisme $f\colon \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ est associé un homomorphisme $F(f)\colon F(\mathrm{N}) \to F(\mathrm{M})$ et l'on a $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$.

Exemple 10.3.1 (Foncteurs Hom). — Soit P un A-module fixé. Pour tout A-module M, considérons le A-module $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{P},\mathrm{M})$. Si $f\colon \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ est un homomorphisme, on considère l'homomorphisme $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{P},\mathrm{M}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{P},\mathrm{N})$ tel que $\varphi \mapsto f \circ \varphi$. Cela définit un foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{P},\bullet)$.

Si on considère en revanche les A-modules $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{P})$ et pour $f\colon \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ l'homomorphisme $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{N},\mathrm{P}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{P})$ défini par $\varphi \mapsto \varphi \circ f$, on définit un foncteur contravariant $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\bullet,\mathrm{P})$.

Remarque 10.3.2. — Considérons $f\colon \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ et $g\colon \mathrm{N} \to \mathrm{P}$ deux homomorphismes tels que $g \circ f = 0$, de sorte que le diagramme $\mathrm{M} \xrightarrow{f} \mathrm{N} \xrightarrow{g} \mathrm{P}$ est un complexe. Alors, pour tout foncteur covariant F, on a $F(g) \circ F(f) = F(g \circ f) = F(0) = 0$ si bien que le diagramme $F(\mathrm{M}) \xrightarrow{F(f)} F(\mathrm{N}) \xrightarrow{F(g)} F(\mathrm{P})$ est encore un complexe.

Une remarque analogue vaut bien entendu pour les foncteurs contravariants.

Définition 10.3.3. — *Un foncteur covariant F est dit* exact à gauche *si pour toute suite exacte*

$$0 \to \mathrm{M} \to \mathrm{N} \to \mathrm{P},$$

la suite

$$0 \to F(\mathrm{M}) \to F(\mathrm{N}) \to F(\mathrm{P})$$

est exacte.

On dit qu'il est exact à droite *si pour toute suite exacte*

$$\mathrm{M} \to \mathrm{N} \to \mathrm{P} \to 0,$$

la suite

$$F(\mathrm{M}) \to F(\mathrm{N}) \to F(\mathrm{P}) \to 0$$

est exacte.

On dit enfin qu'il est exact *s'il est à la fois exact à droite et à gauche.*

Pour un foncteur contravariant, on a une notion analogue : un foncteur contravariant F est dit *exact à droite* si pour toute suite exacte $0 \to \mathrm{M} \to \mathrm{N} \to \mathrm{P}$, la suite $F(\mathrm{P}) \to F(\mathrm{N}) \to F(\mathrm{M}) \to 0$ est exacte. Il est *exact à gauche* si pour toute suite exacte $\mathrm{M} \to \mathrm{N} \to \mathrm{P} \to 0$, la suite $0 \to F(\mathrm{P}) \to F(\mathrm{N}) \to F(\mathrm{M})$ est exacte. Il est enfin *exact* s'il est à la fois exact à droite et exact à gauche.

Proposition 10.3.4. — *Soit* A *un anneau et soit* L *un* A*-module.*

a) Le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{L}, \bullet)$ *est exact à gauche. Il est exact si et seulement si* L *est un* A*-module projectif.*

b) Le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\bullet, \mathrm{P})$ *est exact à gauche. Il est exact si et seulement si* L *est un* A*-module injectif.*

Démonstration. — a) Considérons une suite exacte

$$0 \to \mathrm{M} \xrightarrow{f} \mathrm{N} \xrightarrow{g} \mathrm{P}$$

et soit

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{L}, \mathrm{M}) \xrightarrow{f\circ} \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{L}, \mathrm{N}) \xrightarrow{g\circ} \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{L}, \mathrm{P})$$

le complexe obtenu en lui appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{L}, \bullet)$. Nous devons montrer que cette suite est exacte.

Exactitude en $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{L}, \mathrm{M})$. Si $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{L}, \mathrm{M})$ vérifie $f \circ \varphi = 0$, cela signifie que pour tout $x \in \mathrm{L}$, $f(\varphi(x)) = 0$. Comme f est injectif, $\varphi(x) = 0$ et $\varphi = 0$.

Exactitude en $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{L}, \mathrm{N})$. On doit montrer que pour tout homomorphisme $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{L}, \mathrm{N})$ tel que $g \circ \varphi = 0$, il existe $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{L}, \mathrm{M})$ tel que $\varphi = f \circ \psi$. Or, si $x \in \mathrm{L}$, $g(\varphi(x)) = 0$. Par suite, $\varphi(x) \in \mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Im}\, f$. Ainsi, φ est un homomorphisme $\mathrm{L} \to f(\mathrm{M})$. Comme $f \colon \mathrm{M} \to f(\mathrm{M})$ est un isomorphisme, on peut poser $\psi = f^{-1} \circ \varphi$. Alors, $f \circ \psi = \varphi$.

a′) Le foncteur $\mathrm{Hom}_A(L, \bullet)$ est exact à droite si pour toute suite exacte

$$0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0,$$

la suite

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(L, M) \xrightarrow{f\circ} \mathrm{Hom}_A(L, N) \xrightarrow{g\circ} \mathrm{Hom}_A(L, P) \to 0$$

est exacte. Seule l'exactitude en $\mathrm{Hom}_A(L, P)$ n'a pas été vérifiée. Cela revient à dire que pour tout homomorphisme $\varphi \colon L \to P$, il existe un homomorphisme $\psi \colon L \to N$ tel que $\varphi = g \circ \psi$. D'après le théorème 10.2.5, cette condition signifie exactement que L est un A-module projectif.

b) Considérons une suite exacte

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$$

et soit

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(P, L) \xrightarrow{\circ g} \mathrm{Hom}_A(N, L) \xrightarrow{\circ f} \mathrm{Hom}_A(M, L)$$

le complexe obtenu en luis appliquant le foncteur contravariant $\mathrm{Hom}_A(\bullet, L)$. Nous devons montrer que cette suite est exacte.

Exactitude en $\mathrm{Hom}_A(P, L)$. Soit $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(P, L)$ tel que $\varphi \circ g = 0$. Cela implique que le noyau de φ contient $g(N) = P$, donc $\varphi = 0$.

Exactitude en $\mathrm{Hom}_A(N, L)$. Soit $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(N, L)$ tel que $\varphi \circ f = 0$. On cherche $\psi \in \mathrm{Hom}_A(P, L)$ tel que $\varphi = \psi \circ g$. Or, dire que $\varphi \circ f = 0$ signifie exactement que $\mathrm{Ker}\,\varphi$ contient $\mathrm{Im}\, f$. Par passage au quotient, on en déduit un unique homomorphisme $\psi_0 \colon N/\mathrm{Im}\, f \to L$ tel que $\varphi(x) = \psi_0(\mathrm{cl}(x))$ pour tout $x \in N$. Par définition d'une suite exacte, g définit un isomorphisme $N/\mathrm{Im}\, f \to P$, on peut ainsi définir ψ comme la composition

$$\psi_0 \circ g^{-1} \colon P \xrightarrow{\sim} N/\mathrm{Im}\, f \xrightarrow{\psi_0} L.$$

b′) Il faut démontrer que L est un A-module injectif si et seulement si le foncteur $\mathrm{Hom}_A(L, \bullet)$ envoie une suite exacte sur une suite exacte. Seule reste à vérifier l'exactitude au dernier cran, c'est-à-dire que si $f \colon M \to N$ est injectif, l'homomorphisme $\circ f \colon \mathrm{Hom}_A(N, L) \to \mathrm{Hom}_A(M, L)$ est surjectif. Il faut ainsi démontrer que pour tout homomorphisme $\varphi \colon M \to L$, il existe un homomorphisme $\psi \colon N \to L$ tel que $\psi \circ f = \varphi$. D'après le théorème 10.2.8, cette condition est vérifiée si et seulement si L est injectif. □

10.3.5. Foncteur de localisation. — Soit A un anneau et soit S une partie multiplicative de A. Si M est un A-module, on sait depuis le chapitre 6 lui associer un $S^{-1}A$-module $S^{-1}M$. De plus, si $f \colon M \to N$ est un homomorphisme de A-modules, on dispose, *cf.* la proposition 6.5.5 d'un (unique) homomorphisme $S^{-1}f \colon S^{-1}M \to S^{-1}N$ tel que $(S^{-1}f)(m/s) = f(m)/s$ pour tout $m \in M$ et tout $s \in S$. De plus, $S^{-1}(f \circ g) = S^{-1}f \circ S^{-1}g$. Ainsi, la localisation est un foncteur de la catégorie de A-modules dans celle des $S^{-1}A$-modules. On le considère ici seulement comme un foncteur sur la catégorie des A-modules.

PROPOSITION 10.3.6 (Exactitude de la localisation). — *Soit* A *un anneau et soit* S *une partie multiplicative de* A. *Le foncteur de localisation par rapport à* S *est un foncteur exact : si* $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$ *est une suite exacte de* A*-modules, la suite* $0 \to S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}N \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}P \to 0$ *est encore exacte.*

Démonstration. — Identifions M à un sous-module de N via f et P au quotient N/M via g. D'après la proposition 6.5.8, l'homomorphisme $S^{-1}f$ est injectif et le quotient $S^{-1}N/S^{-1}M$ s'identifie à $S^{-1}(N/M) = S^{-1}P$ par l'application de $S^{-1}N$ dans $S^{-1}P$ donnée par

$$\mathrm{cl}(n/s) \mapsto \mathrm{cl}(n)/s = \mathrm{cl}(g(n))/s = (S^{-1}g)(n/s).$$

□

10.4. Modules différentiels. Homologie et cohomologie

DÉFINITION 10.4.1. — *Soit* A *un anneau. Un* A*-module différentiel est un couple* (M, d) *formé d'un* A*-module* M *et d'un endomorphisme appelé* différentielle $d : M \to M$ *tel que* $d^2 = 0$.

Un morphisme de modules différentiels $f : (M, d_M) \to (N, d_N)$ *est un homomorphisme* $f : M \to N$ *tel que* $d_N \circ f = f \circ d_M$.

DÉFINITION 10.4.2. — *Si* (M, d) *est un* A*-module différentiel, on définit trois* A*-modules :*

- *le module des cycles :* $Z(M) = \operatorname{Ker} d$ *;*
- *le module des bords :* $B(M) = \operatorname{Im} d$ *;*
- *le module d'homologie de* M *:* $H(M) = Z(M)/B(M) = \operatorname{Ker}(d)/\operatorname{Im}(d)$.

LEMME 10.4.3. — *Un homomorphisme de modules différentiels* $f : (M, d_M) \to (N, d_N)$ *induit des homomorphismes* $Z(M) \to Z(N)$, $B(M) \to B(N)$ *d'où un homomorphisme* $H(f) : H(M) \to H(N)$.

Démonstration. — Comme $f \circ d_M = d_N \circ f$, si $d_M(x) = 0$, alors $d_N(f(x)) = f(d_M(x)) = 0$, donc l'image de $\operatorname{Ker} d_M$ par f est contenue dans $\operatorname{Ker} d_N$: $f(Z(M)) \subset Z(N)$.

De même, $f(B(M)) \subset B(N)$ puisque $f(d_M(x)) = d_N(f(x))$ pour tout $x \in M$.

Il en résulte par passage au quotient un homomorphisme canonique $H(f) : H(M) = Z(M)/B(M) \to Z(N)/B(N) = H(N)$. □

DÉFINITION 10.4.4. — *Un* A*-module différentiel gradué est un module différentiel* (M, d) *tel que*

– M *est la somme directe d'une famille* $(\mathrm{M}_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ *(*M *est* gradué*);*

– *il existe un entier* r *tel que l'endomorphisme* d *est de* degré r *: pour tout* $n \in \mathbf{Z}$*, on a* $d(\mathrm{M}_n) \subset \mathrm{M}_{n+r}$.

Dans ce cas, on note $\mathrm{Z}_n(\mathrm{M}) = \mathrm{Z}(\mathrm{M}) \cap \mathrm{M}_n$, $\mathrm{B}_n(\mathrm{M}) = \mathrm{B}(\mathrm{M}) \cap \mathrm{M}_n$ *et* $\mathrm{H}_n(\mathrm{M}) = \mathrm{Z}_n(\mathrm{M})/\mathrm{B}_n(\mathrm{M})$.

LEMME 10.4.5. — *Soit* (M, d) *un* A*-module différentiel gradué. On a alors les égalités*

$$\mathrm{Z}(\mathrm{M}) = \bigoplus_n \mathrm{Z}_n(\mathrm{M}), \quad \mathrm{B}(\mathrm{M}) = \bigoplus \mathrm{B}_n(\mathrm{M}) \quad \textit{et} \quad \mathrm{H}(\mathrm{M}) = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathrm{H}_n(\mathrm{M}).$$

Autrement dit, cycles, bords et homologie de M *sont automatiquement gradués.*

Démonstration. — Comme $\mathrm{Z}_n(\mathrm{M})$ est un sous-module de M_n et comme les M_n sont en somme directe, les modules $\mathrm{Z}_n(\mathrm{M})$ sont aussi en somme directe. D'autre part, si $x \in \mathrm{Z}(\mathrm{M})$, on peut écrire $x = \sum x_n$ où pour tout n, $x_n \in \mathrm{M}_n$. Alors, $0 = \partial(x) = \sum \partial(x_n)$. Si r est le degré de l'homomorphisme ∂, on a donc que pour tout x, $\partial(x_n)$ appartient à M_{n+r}. Comme les M_n sont en somme directe, $\partial(x_n) = 0$ pour tout n et $x \in \sum \mathrm{Z}_n(\mathrm{M})$.

De même, les $\mathrm{B}_n(\mathrm{M})$ sont en somme directe. Si $x \in \mathrm{B}(\mathrm{M})$, écrivons $x = \partial(y)$ avec $y \in \mathrm{M}$. On peut écrire $y = \sum\limits_n y_n$ avec $y_n \in \mathrm{M}_n$ pour tout n. Alors, $x = \partial(y) = \sum\limits_n \partial(y_n)$. Pour tout n, $\partial(y_n) \in \mathrm{M}_{n+r} \cap \operatorname{Im} \partial = \mathrm{B}_{n+r}(\mathrm{M})$. si bien que x appartient à $\sum\limits_n \mathrm{B}_n(\mathrm{M})$. Comme chacun des $\mathrm{Z}_n(\mathrm{M})$ est contenu dans M_n, la somme est nécessairement directe.

Enfin, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{H}(\mathrm{M}) = \mathrm{Z}(\mathrm{M})/\mathrm{B}(\mathrm{M}) &= \left(\bigoplus_n \mathrm{Z}_n(\mathrm{M})\right) \Big/ \left(\bigoplus_n \mathrm{B}_n(\mathrm{M})\right) \\ &= \bigoplus_n (\mathrm{Z}_n(\mathrm{M})/\mathrm{B}_n(\mathrm{M})) = \bigoplus_n \mathrm{H}_n(\mathrm{M}). \end{aligned}$$

□

Remarque 10.4.6. — Considérons un complexe de A-modules

$$\dots \xrightarrow{d_{n-1}} \mathrm{M}_{n-1} \xrightarrow{d_n} \mathrm{M}_n \xrightarrow{d_{n+1}} \mathrm{M}_{n+1} \to \dots$$

Définissons alors $\mathrm{M} = \bigoplus \mathrm{M}_n$ et soit $d \in \operatorname{End}(\mathrm{M})$ l'endomorphisme défini par les d_n : si $x \in \mathrm{M}_{n-1}$, $d(x) = d_n(x)$.

Alors, (M, d) est un A-module différentiel gradué dont la différentielle est de degré 1. De plus, $\mathrm{H}_n(\mathrm{M}) = \operatorname{Ker} d_{n+1}/\operatorname{Im} d_n$. La tradition veut qu'on note plutôt $\mathrm{H}^n(\mathrm{M})$ et qu'on appelle ces modules *modules de cohomologie* du complexe.

10.4.7. Complexe de de Rham d'un ouvert de $\mathbf{R}^2$. — Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^2$. Si $0 \leq p \leq 2$, soit $\Omega^p(\mathrm{U})$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des formes différentielles de degré p sur U. Pour $p = 0$, $\Omega^0(\mathrm{U})$ est l'espace vectoriel des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur U. Pour $p = 1$, une forme différentielle ω de degré 1 s'écrit

$$\omega = \mathrm{A}(x, y)\,\mathrm{d}x + \mathrm{B}(x, y)\,\mathrm{d}y$$

où A et B sont des fonctions $\mathscr{C}^\infty$. Enfin, une forme différentielle α de degré 2 s'écrit

$$\alpha = \mathrm{A}(x, y)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

On a un homomorphisme « différentielle extérieure » défini ainsi :

$$d\colon \Omega^0(\mathrm{U}) \to \Omega^1(\mathrm{U}) \qquad f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

$$d\colon \Omega^1(\mathrm{U}) \to \Omega^2(\mathrm{U}) \qquad \mathrm{A}(x, y)\,\mathrm{d}x + \mathrm{B}(x, y)\,\mathrm{d}y \mapsto \left(\frac{\partial \mathrm{B}(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{A}(x, y)}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

et d est nul sur $\Omega^2(\mathrm{U})$.

On constate que $d \circ d = 0$. Le seul calcul nécessaire est celui de $d^2(f)$ pour $f \in \Omega^0(\mathrm{U})$ et

$$d^2(f) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

et le théorème de Schwarz implique que $d^2(f) = 0$.

On a ainsi défini un complexe, appelé *complexe de de Rham de* U :

$$0 \to \Omega^0(\mathrm{U}) \xrightarrow{d} \Omega^1(\mathrm{U}) \xrightarrow{d} \Omega^2(\mathrm{U}) \to 0.$$

On peut alors calculer ses groupes de cohomologie, notés $\mathrm{H}^i_{\mathrm{DR}}(\mathrm{U})$ Un théorème fondamental de de Rham affirme que ce sont des espaces vectoriels de même dimension que les espaces de cohomologie fournis par la théorie singulière.

Calculons $\mathrm{H}^0(\Omega^\bullet)$. Si $f \in \mathrm{Z}^0(\Omega^\bullet)$, f est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur U telle que $df = 0$, c'est-à-dire $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Ainsi, f est constante sur chaque composante connexe de U Comme $\mathrm{B}^0 = 0$, on a $\mathrm{H}^0_{\mathrm{DR}}(\mathrm{U}) = \mathbf{R}^{\pi_0(\mathrm{U})}$, $\pi_0(\mathrm{U})$ désignant le nombre de composantes connexes de U.

Si U est simplement connexe (par exemple, U contractible, ou U étoilé, ou simplement $\mathrm{U} = \mathbf{R}^2$), le lemme de Poincaré affirme qu'une forme différentielle ω sur U telle que $d\omega = 0$ (on dit que ω est fermée) est exacte : il existe f telle que $\omega = df$. (Vous avez peut-être rencontré la formulation plus commune en physique ou en calcul différentiel élémentaire : *un champ de vecteurs dont le rotationnel est nul est un gradient.*)

On peut le démontrer très simplement dans le cas où U est étoilé, disons par rapport à l'origine $0 \in \mathbf{R}^2$. Si $\omega = \mathrm{A}(x,y)\,\mathrm{d}x + \mathrm{B}(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$ vérifie $d\omega = 0$, posons

$$f(x,y) = \int_0^1 (x\mathrm{A}(tx,ty) + y\mathrm{B}(tx,ty))\,\mathrm{d}t.$$

Alors — voir un cours d'intégration — f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur U et on obtient $\partial f/\partial x$ et $\partial f/\partial y$ en dérivant sous le signe somme. On obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \int_0^1 \left(\mathrm{A}(tx,ty) + tx\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x}(tx,ty) + ty\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial x}(tx,ty)\right)\,\mathrm{d}t.$$

Comme $d\omega = 0$, $\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial x} = \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}$ si bien que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \int_0^1 \left(\mathrm{A}(tx,ty) + tx\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}(tx,ty) + ty\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial x}(tx,ty)\right)\,\mathrm{d}t.\\ &= \int_0^1 \left(\mathrm{A}(tx,ty) + t\frac{d}{dt}(\mathrm{A}(tx,ty))\right)\,\mathrm{d}t.\\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt}(t\mathrm{A}(tx,ty)) = [t\mathrm{A}(tx,ty)]_0^1\\ &= \mathrm{A}(x,y).\end{aligned}$$

De même, on démontre que $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathrm{B}(x,y)$ si bien que $df = \omega$.

THÉORÈME 10.4.8. — *Soit* A *un anneau et soit* $0 \to \mathrm{M} \xrightarrow{f} \mathrm{N} \xrightarrow{g} \mathrm{P} \to 0$ *une suite exacte de modules différentiels. Cela signifie que cette suite est une suite exacte de* A*-modules ainsi que les deux égalités*

$$d_\mathrm{N} \circ f = f \circ d_\mathrm{M} \quad \text{et} \quad d_\mathrm{P} \circ g = g \circ d_\mathrm{N}.$$

Il existe alors un homomorphisme $\partial \colon \mathrm{H(P)} \to \mathrm{H(M)}$ *tel que l'on ait un « triangle exact » :*

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{H(P)} \arrow[dl, "\partial"'] & \\ \mathrm{H(M)} \arrow[rr, "\mathrm{H}(f)"] & & \mathrm{H(N)} \arrow[ul, "\mathrm{H}(g)"'] \end{tikzcd}$$

Ceci signifie les trois égalité :

$$\operatorname{Ker}\partial = \operatorname{Im}\mathrm{H}(g), \quad \operatorname{Ker}\mathrm{H}(g) = \operatorname{Im}\mathrm{H}(f), \quad \operatorname{Ker}\mathrm{H}(f) = \operatorname{Im}\partial.$$

Démonstration. — a) Montrons que $\operatorname{Ker}\mathrm{H}(g) = \operatorname{Im}\mathrm{H}(f)$. Comme $g \circ f = 0$, on a $\mathrm{H}(g) \circ \mathrm{H}(f) = \mathrm{H}(g \circ f) = 0$ et $\operatorname{Im}\mathrm{H}(f) \subset \operatorname{Ker}\mathrm{H}(g)$. Réciproquement, soit $\xi \in \operatorname{Ker}\mathrm{H}(g)$. On peut écrire $\xi = \mathrm{cl}(x)$ avec $x \in \operatorname{Ker} d_\mathrm{N}$. Alors, $\mathrm{H}(g)(\xi) = \mathrm{cl}(g(x))$, si bien qu'il existe $y \in \mathrm{P}$ tel que $g(x) = d_\mathrm{P}(y)$. Puisque l'homomorphisme $g \colon \mathrm{N} \to \mathrm{P}$ est surjectif, il existe $z \in \mathrm{N}$ tel que $y = g(z)$. Alors, $g(x) = d_\mathrm{P}(y) = d_\mathrm{P}(g(z)) = g(d_\mathrm{N}(z))$ si bien que $x - d_\mathrm{N}(z)$ appartient à $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$. Soit $t \in \mathrm{M}$ tel que

$x - d_{\mathrm{N}}(z) = f(t)$. On a alors $\xi = \mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(d_{\mathrm{N}}(z) + f(t)) = \mathrm{cl}(f(t)) = \mathrm{H}(f)(\mathrm{cl}(t))$. Par suite, $\mathrm{Ker}\,\mathrm{H}(g) \subset \mathrm{Im}\,\mathrm{H}(f)$, d'où l'égalité.

b) Consruisons ensuite l'homomorphisme ∂. Soit $\xi \in \mathrm{H}(\mathrm{P})$. Écrivons $\xi = \mathrm{cl}(x)$ avec $x \in \mathrm{Ker}\, d_{\mathrm{P}}$. Comme g est surjectif, il existe $y \in \mathrm{M}$ tel que $x = g(y)$. Alors, $0 = d_{\mathrm{P}}(x) = d_{\mathrm{P}}(g(y)) = g(d_{\mathrm{N}}(y))$ si bien qu'il existe $z \in \mathrm{M}$ tel que $d_{\mathrm{N}}(y) = f(z)$. On a $f(d_{\mathrm{M}}z) = d_{\mathrm{N}}(f(z)) = d_{\mathrm{N}}d_{\mathrm{N}}(y) = 0$ puisque d_{N}^2. Comme f est injectif, $d_{\mathrm{M}}z = 0$. Posons ainsi $\partial(\xi) = \mathrm{cl}(z) \in \mathrm{H}(\mathrm{M})$.

Il faut vérifier que cette application est bien définie. Or, $z \in \mathrm{M}$ a été choisi de sorte que soient vérifiées les relations $f(z) = d_{\mathrm{N}}(y)$, $x = g(y)$ et $\xi = \mathrm{cl}(x)$. Si on a fait d'autres choix : $\xi = \mathrm{cl}(x')$, $x' = g(y')$ et $f(z') = d_{\mathrm{N}}(y')$, alors :

– il existe $x'' \in \mathrm{P}$ tel que $x = x' + d_{\mathrm{P}}x''$. Choisissons aussi $y'' \in \mathrm{N}$ tel que $x'' = g(y'')$;

– $g(y' - y) = x' - x = d_{\mathrm{P}}(x'') = d_{\mathrm{P}}(g(y'')) = g(d_{\mathrm{N}}(y''))$, si bien qu'il existe $z'' \in \mathrm{M}$ tel que $y' - y = d_{\mathrm{N}}(y'') + f(z'')$;

– alors, $f(z' - z) = d_{\mathrm{N}}(y') - d_{\mathrm{N}}(y) = d_{\mathrm{N}}(d_{\mathrm{N}}(y'') + f(z'')) = d_{\mathrm{N}}(f(z'')) = f(d_{\mathrm{M}}(z''))$. Comme f est injectif, $z' - z = d_{\mathrm{M}}(z'')$ et $\mathrm{cl}(z') = \mathrm{cl}(z)$ dans $\mathrm{H}(\mathrm{M})$.

Enfin, ∂ est un homomorphisme : si on a fait les choix (x_1, y_1, z_1) pour ξ_1 et (x_2, y_2, z_2) pour ξ_2, on peut faire les choix $(a_1x_1 + a_2x_2, a_1y_1 + a_2y_2, a_1z_1 + a_2z_2)$ pour $a_1\xi_1 + a_2\xi_2$, si bien que $\partial(a_1\xi_1 + a_2\xi_2) = a_1\partial(\xi_1) + a_2\partial(\xi_2)$.

c) Montrons que $\mathrm{Ker}\,\mathrm{H}(f) = \mathrm{Im}\,\partial$. Si $\xi = \mathrm{cl}(x)$ vérifie $\mathrm{H}(f)(\xi) = 0$, on a $f(x) \in \mathrm{Im}\, d_{\mathrm{N}}$. Par suite, soit $y \in \mathrm{N}$ tel que $f(x) = d_{\mathrm{N}}(y)$. Il en résulte par définition de l'homomorphisme ∂ que $\partial(\mathrm{cl}(g(y))) = \mathrm{cl}(x) = \xi$, soit $\mathrm{Ker}\,\mathrm{H}(f) \subset \mathrm{Im}\,\partial$.

Réciproquement, si $\mathrm{cl}(z) = \partial(\mathrm{cl}(x))$, on a $\mathrm{H}(f)(\mathrm{cl}(z)) = \mathrm{cl}(f(z))$ donc est égal avec les notations du b) à $\mathrm{cl}(d_{\mathrm{N}}(y)) = 0$.

d) Montrons que $\mathrm{Im}\,\mathrm{H}(g) = \mathrm{Ker}\,\partial$. Si $\partial(\xi) = 0$, soit (x, y, z) un système de choix comme au b) de sorte que $\partial(\xi) = \mathrm{cl}(z)$. On a donc $z \in \mathrm{Im}\, d_{\mathrm{M}}$. Soit $z' \in \mathrm{M}$ tel que $z = d_{\mathrm{M}}(z')$. Alors, $f(z) = f(d_{\mathrm{M}}(z')) = d_{\mathrm{N}}(f(z')) = d_{\mathrm{N}}^2(y) = 0$ donc, f étant injectif, $z = 0$. Par suite, $d_{\mathrm{N}}(y) = f(z) = 0$. La classe de y dans $\mathrm{H}(\mathrm{N})$ vérifie ainsi $\mathrm{H}(g)(\mathrm{cl}(y)) = \mathrm{cl}(g(y)) = \mathrm{cl}(x) = \xi$, ce qui prouve que $\xi \in \mathrm{Im}\,\mathrm{H}(g)$.

Réciproquement, soit $\xi = \mathrm{cl}(g(y))$ un élément de $\mathrm{Im}\,\mathrm{H}(g)$ avec $y \in \mathrm{Ker}\, d_{\mathrm{N}}$. Par définition, $\partial(\xi) = \mathrm{cl}(z)$ où z est l'unique élément de M tel que $f(z) = d_{\mathrm{N}}(y) = 0$, donc $z = 0$ et $\partial(\xi) = 0$. □

Corollaire 10.4.9. — *Considérons une suite exacte de complexes, c'est-à-dire un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\longrightarrow & & M_{n-1} & \longrightarrow & M_n & \longrightarrow & M_{n+1} & \longrightarrow \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\longrightarrow & & N_{n-1} & \longrightarrow & N_n & \longrightarrow & N_{n+1} & \longrightarrow \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\longrightarrow & & P_{n-1} & \longrightarrow & P_n & \longrightarrow & P_{n+1} & \longrightarrow \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 &
\end{array}$$

dans lequel les colonnes sont des suites exactes. Alors, il existe pour tout n un homomorphisme $\partial^n \colon H^n(P) \to H^{n+1}(M)$ *tel que l'on ait une suite exacte*

$$\cdots \to H^n(M) \to H^n(N) \to H^n(P) \xrightarrow{\partial^n} H^{n+1}(M) \to \dots$$

La démonstration est laissée en exercice. Il faut essentiellement juste vérifier qu'avec les notations du théorème, l'homomorphisme ∂ est de degré 1, c'est-à-dire que pour tout n, $\partial(H^n(P)) \subset H^{n+1}(M)$.

10.5. Exercices

Exercice 10.5.1. — **a)** Soit $M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} M_n$ un complexe. Montrer que ce complexe est une suite exacte si et seulement si pour tout i les suites $(0) \to \operatorname{Ker} f_i \to M_i \xrightarrow{f_i} \operatorname{Ker} f_{i+1} \to (0)$ sont exactes.

b) On suppose que A est un corps k et que les M_i sont des k-espaces vectoriels de dimension finie. Soit $0 \to M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \to 0$ une suite exacte. Montrer que $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \dim M_i = 0$.

Exercice 10.5.2. — Soit A un anneau, soit M un A-module et soit (a, b) deux éléments de A.

a) Montrer que les applications $d_1 \colon M \to M \times M$ et $d_2 \colon M \times M \to M$ définies par

$$d_1(x) = (ax, bx) \quad \text{et} \quad d_2(x, y) = by - ax$$

définissent un complexe $M^\bullet$:

$$0 \to M \xrightarrow{d_1} M \times M \xrightarrow{d_2} \to 0.$$

b) Montrer que $H^0(M^\bullet) = \{x \in M\,;\, ax = by = 0\}$ et que $H^2(M^\bullet) = M/(aM + bM)$.

c) On suppose que la multiplication par a dans M est injective. Montrer alors que la multiplication par b dans M/aM est injective si et seulement si $H^1(M^\bullet) = 0$.

Exercice 10.5.3. — Soit A un anneau et I un idéal de A

a) On suppose que l'homomorphisme canonique $\mathrm{cl}\colon A \to A/I$ n'admet un inverse à droite f. Montrer qu'il existe $a \in I$ tel que $a = a^2$ et $I = (a)$.

b) Si A est intègre montrer que A/I est un A-module projectif si et seulement si $I = 0$ ou $I = A$.

Exercice 10.5.4. — Soit A un anneau et soit $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$ une suite exacte scindée. Montrer que pour tout A-module X, cette suite induit des suites exactes scindées

$$0 \to \mathrm{Hom}(X, M) \xrightarrow{f\circ} \mathrm{Hom}(X, N) \xrightarrow{g\circ} \mathrm{Hom}(X, P) \to 0$$

et

$$0 \to \mathrm{Hom}(P, X) \xrightarrow{\circ g} \mathrm{Hom}(N, X) \xrightarrow{\circ f} \mathrm{Hom}(M, X) \to 0.$$

Exercice 10.5.5. — Soit A un anneau local noethérien. Notons $\mathfrak{m}$ son idéal maximal et k le corps résiduel $A/\mathfrak{m}$. Soit P un A-module projectif de type fini.

a) Montrer que $P/\mathfrak{m}P$ est un k-espace vectoriel de dimension finie.

Notons d cette dimension. et considérons des éléments $e_1, \ldots, e_d \in P$ tels que $(\mathrm{cl}(e_1), \ldots, \mathrm{cl}(e_d))$ soit une base de $P/\mathfrak{m}P$.

b) Montrer à l'aide du théorème de Nakayama que $(e_1, \ldots, e_d)$ engendrent P en tant que A-module. En déduire l'existence d'une suite exacte

$$0 \to M \to A^n \to P \to 0.$$

c) En utilisant l'hypothèse que P est projectif, montrer que $A^n \simeq P \oplus M$. En déduire que $\dim_k(M/\mathfrak{m}M) = 0$.

d) En appliquant de nouveau le théorème de Nakayama, montrer que $M = 0$ et donc que P est un A-module libre.

Exercice 10.5.6. — Soit A un anneau et soit S une partie multiplicative de A.

a) Montrer que si on a un diagramme commutatif de A-modules

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha_A"] & F \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha_F"] & G \arrow[d, "\alpha_G"] \\
0 \arrow[r] & E' \arrow[r, "f'"] & F' \arrow[r, "g'"] & G'
\end{tikzcd}$$

dont les lignes sont exactes, avec α_F et α_G des isomorphismes, alors α_E est un isomorphisme.

b) Soient M et N des A-modules. Définir un morphisme naturel de A-modules

$$\alpha_{\mathrm{M,N}} : \mathrm{S}^{-1}\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{N}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}}(\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M},\mathrm{S}^{-1}\mathrm{N})$$

qui soit l'identité pour $\mathrm{M} = \mathrm{A}$.

c) Démontrer que si M est un A-module libre de type fini, $\alpha_{\mathrm{M,N}}$ est un isomorphisme.

d) Montrer, à l'aide des questions précédentes, que si A est noethérien et M est un A-module de type fini, alors $\alpha_{\mathrm{M,N}}$ est toujours un isomorphisme.

e) Donner un exemple pour lequel $\alpha_{\mathrm{M,N}}$ n'est pas un isomorphisme.

10.6. Solutions

Solution de l'exercice 10.5.1. — **a)** Comme $\mathrm{Im}(f_i) \subset \mathrm{Ker}\, f_{i+1}$, on a une application $f_i : \mathrm{M}_i \to \mathrm{Ker}(f_{i+1})$ bien définie, et un complexe $(0) \to \mathrm{Ker}\, f_i \to \mathrm{M}_i \xrightarrow{f_i} \mathrm{Ker}\, f_{i+1} \to (0)$. Dire que ces suites sont exactes revient à dire que l'image de f_i dans $\mathrm{Ker}\, f_{i+1}$ est égale à $\mathrm{Ker}\, f_{i+1}$, soit $\mathrm{Im}\, f_i = \mathrm{Ker}\, f_{i+1}$. Cela équivaut à l'exactitude du complexe.

b) Si $\mathrm{A} = k$ est un corps, et si $(0) \to \mathrm{Ker}\, f_i \to \mathrm{M}_i \xrightarrow{f_i} \mathrm{Ker}\, f_{i+1} \to (0)$ est exacte, on peut trouver un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, f_i$ dans M_i qui sera isomorphe à $\mathrm{Ker}\, f_{i+1}$. Ainsi, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\dim \mathrm{M}_i = \dim \mathrm{Ker}\, f_i + \dim \mathrm{Ker}\, f_{i+1}$. (On a noté $f_{n+1} = 0$.) Par suite, on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \dim \mathrm{M}_i &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \dim \mathrm{Ker}\, f_i + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \dim \mathrm{Ker}\, f_{i+1} \\ &= \dim \mathrm{Ker}\, f_0 + (-1)^n \dim \mathrm{Ker}\, f_{n+1} = 0.\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 10.5.2. — **a)** Pour tout $x \in \mathrm{M}$, $d_2(d_1(x)) = d_2(ax, bx) = bax - abx = 0$ donc $d_2 \circ d_1 = 0$.

b) On a $\mathrm{B}^0(\mathrm{M}^\bullet) = \mathrm{Im}(0 \to \mathrm{M}) = 0$. On a $\mathrm{Z}^0(\mathrm{M}^\bullet) = \mathrm{Ker}\, d_1$ donc est l'ensemble des $x \in \mathrm{M}$ tels quye $ax = bx = 0$. Par suite, $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}^\bullet) = \{x \in \mathrm{M}\,;\, ax = bx = 0\}$.

On a $\mathrm{Z}^2(\mathrm{M}^\bullet) = \mathrm{Ker}(\mathrm{M} \to 0) = \mathrm{M}$ tandis que $\mathrm{B}^2(\mathrm{M}^\bullet) = \mathrm{Im}\, d_2$. C'est l'ensemble des $ax + by$ avec x et $y \in \mathrm{M}$, donc $\mathrm{B}^2(\mathrm{M}^\bullet) = a\mathrm{M} + b\mathrm{M}$. Ainsi, $\mathrm{H}^2(\mathrm{M}^\bullet) = \mathrm{M}/(a\mathrm{M} + b\mathrm{M})$.

c) Supposons que la multiplication par b dans $\mathrm{M}/a\mathrm{M}$ est injective. Soit $(x, y) \in \mathrm{Z}^1(\mathrm{M}^\bullet) = \mathrm{Ker}\, d_2$. On a donc $by = ax$. Dans $\mathrm{M}/a\mathrm{M}$, $b\,\mathrm{cl}(y) = 0$, si bien que $\mathrm{cl}(y) = 0$. Il existe ainsi $y' \in \mathrm{M}$ tel que $y = ay'$. Alors, $a(x - by') = 0$ et puisque la multiplication par a dans M est injective, $x = by'$. Ainsi, $(x, y) = (by', ay') = d_1(y')$. On a donc prouvé que $(x, y) \in \mathrm{B}^1(\mathrm{M}^\bullet)$, d'où $\mathrm{H}^1(\mathrm{M}^\bullet) = 0$.

Supposons maintenant que $\mathrm{H}^1(\mathrm{M}^\bullet) = 0$. Soit $x \in \mathrm{M}$ tel que $b\,\mathrm{cl}(x) = 0$ dans $\mathrm{M}/a\mathrm{M}$, c'est-à-dire $bx \in a\mathrm{M}$. Il existe alors $y \in \mathrm{M}$ tel que $bx = ay$ et $(x, y) \in \operatorname{Ker} d_2$. Comme $\mathrm{H}^1(\mathrm{M}^\bullet) = 0$, $\operatorname{Ker} d_2 = \mathrm{Z}^1(\mathrm{M}^\bullet) = \mathrm{B}^1(\mathrm{M}^\bullet) = \operatorname{Im} d_1$ et il existe $z \in \mathrm{M}$ tel que $(x, y) = d_1(z) = (az, bz)$. Par suite, $x = az \in a\mathrm{M}$ et $\mathrm{cl}(x) = 0$ dans $\mathrm{M}/a\mathrm{M}$. Nous avons donc démontré que la multiplication par b dans $\mathrm{M}/a\mathrm{M}$ est injective.

Solution de l'exercice 10.5.3. — **a)** Notons cl l'homomorphisme canonique $\mathrm{A} \to \mathrm{A}/\mathrm{I}$. Soit $f\colon \mathrm{A}/\mathrm{I} \to \mathrm{A}$ un homomorphisme tel que $\mathrm{cl} \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{A}/\mathrm{I}}$. Notons $b = f(\mathrm{cl}(1))$. Comme f est un inverse à droite de cl, $\mathrm{cl}(b) = \mathrm{cl}(f(\mathrm{cl}(1))) = \mathrm{cl}(1)$ et $b \in 1 + \mathrm{I}$. Notons $a = 1 - b \in \mathrm{I}$. Alors, pour tout $x \in \mathrm{A}$, $f(\mathrm{cl}(x)) = f(x\,\mathrm{cl}(1)) = x(1-a)$. Si $x \in \mathrm{I}$, on a $\mathrm{cl}(x) = 0$ si bien que $x(1-a) = 0$.

Comme $a \in \mathrm{I}$, $a(1-a) = 0$ et $a = a^2$. On a enfin $(a) \subset \mathrm{I}$. Réciproquement, si $x \in \mathrm{I}$, $x(1-a) = 0$, donc $x = ax \in (a)$. Ainsi, $\mathrm{I} = (a)$.

b) Si A est intègre, un élément $a \in \mathrm{A}$ tel que $a(1-a) = 0$ vérifie $a = 0$ ou $a = 1$. Ainsi, $\mathrm{I} = 0$ ou $\mathrm{I} = \mathrm{A}$.

Solution de l'exercice 10.5.5. — **a)** Le A-module $\mathrm{P}/\mathfrak{m}\mathrm{P}$ est annulé par $\mathfrak{m}$. Il est donc naturellement muni d'une structure de $\mathrm{A}/\mathfrak{m}$-module. Comme $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal, $k = \mathrm{A}/\mathfrak{m}$ est un corps et $\mathrm{P}/\mathfrak{m}\mathrm{P}$ est un k-espace vectoriel.

Soit $(x_1, \ldots, x_r)$ une famille génératrice finie dans P. Alors, les classes $(\mathrm{cl}(x_1), \ldots, \mathrm{cl}(x_r))$ engendrent $\mathrm{P}/\mathfrak{m}\mathrm{P}$ comme A-module, donc aussi comme k-espace vectoriel. Par suite, $\mathrm{P}/\mathfrak{m}\mathrm{P}$ est un k-espace vectoriel de dimension finie.

b) Soit L le sous-module de P engendré par les e_i. Soit $p \in \mathrm{P}$. Comme les $\mathrm{cl}(e_i)$ forment une base de $\mathrm{P}/\mathfrak{m}\mathrm{P}$, il existe des $x_i \in k$ tels que $\mathrm{cl}(p) = \sum x_i\,\mathrm{cl}(e_i)$. Si $a_i \in \mathrm{A}$ vérifie $\mathrm{cl}(a_i) = x_i$, il en résulte que $p - \sum a_i e_i$ appartient à $\mathfrak{m}\mathrm{P}$. Ainsi, $\mathrm{P} = \mathrm{L} + \mathfrak{m}\mathrm{P}$.

D'après le théorème de Nakayama (corollaire 7.1.8), $\mathrm{P} = \mathrm{L}$.

Les e_i définissent un homomorphisme $\mathrm{A}^d \to \mathrm{P}$. On vient de voir que cet homomorphisme est surjectif. Si M désigne son noyau, on a une suite exacte $0 \to \mathrm{M} \to \mathrm{A}^n \to \mathrm{P} \to 0$.

c) Comme P est projectif, cette suite exacte est scindée et $\mathrm{A}^n \simeq \mathrm{M} \oplus \mathrm{P}$. Alors, dans cet isomorphisme, $\mathfrak{m}^n$ s'identifie au sous-module $\mathfrak{m}\mathrm{M} \oplus \mathfrak{m}\mathrm{P}$. Ainsi, on a un isomorphisme de A-modules

$$(\mathrm{A}/\mathfrak{m})^n = \mathrm{A}^n/\mathfrak{m}^n = (\mathrm{M}/\mathfrak{m}\mathrm{M}) \oplus (\mathrm{P}/\mathfrak{m}\mathrm{P}).$$

et comme ces A-modules sont des k-espaces vectoriels, c'est un isomorphisme de k-espaces vectoriels.

L'égalité des dimensions implique alors

$$n = \dim_k k^n = \dim_k(\mathrm{M}/\mathfrak{m}\mathrm{M}) + \dim_k(\mathrm{P}/\mathfrak{m}\mathrm{P}) = \dim_k(\mathrm{M}/\mathfrak{m}\mathrm{M}) + n$$

donc $\dim_k(\mathrm{M}/\mathfrak{m}\mathrm{M}) = 0$.

d) Ainsi, $M/\mathfrak{m}M$ est l'espace vectoriel nul, donc $M = \mathfrak{m}M$. Comme A est noethérien et M un sous-module de A^n, M est de type fini. Une nouvelle application du lemme de Nakayama implique ainsi que $M = 0$. Par suite, l'homomorphisme $A^n \to P$ défini par les e_i est injectif. C'est donc un isomorphisme.

Solution de l'exercice 10.5.6. — **a)** Si les homomorphismes g et g' étaient surjectifs, il suffirait d'appliquer le lemme du serpent établi dans le cours. On va redémontrer ici ce dont on a besoin.

Montrons que α_E est injectif. Soit en effet $x \in E$ tel que $\alpha_E(x) = 0$. On a alors $\alpha_F(f(x)) = f'(\alpha_E(x)) = 0$ et comme α_F est un isomorphisme, $f(x) = 0$. Comme f est injectif, $x = 0$.

Montrons que α_E est surjectif. Soit $x' \in E'$. Comme α_F est un isomorphisme, il existe $y \in F$ tel que $\alpha_F(y) = f'(x') \in F'$. Alors, $\alpha_G(g(y)) = g'(\alpha_F(y)) = g'(f'(x')) = 0$. Comme α_G est injectif, $g(y) = 0$. Donc $y \in \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$ et il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Alors, $f'(x') = \alpha_F(y) = \alpha_F(f(x)) = f'(\alpha_E(x))$. Comme f' est injectif, $x' = \alpha_E(x)$.

b) Soit $f\colon M \to N$ un homomorphisme de A-modules. Si l'on compose f avec l'homomorphisme canonique $N \to S^{-1}N$, on en déduit un homomorphisme de A-modules $f_1\colon M \to S^{-1}N$ tel que $f_1(m) = f(m)/1$. Comme $S^{-1}N$ est un $S^{-1}A$-module, la propriété universelle de la localisation fournit un unique homomorphisme $\varphi\colon S^{-1}M \to S^{-1}N$ tel que $\varphi(m/1) = f_1(m) = f(m)/1$. On a ainsi construit un homomorphisme de A-modules

$$\operatorname{Hom}_A(M, N) \to \operatorname{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N).$$

Comme le second membre est un $S^{-1}A$-module, on peut étendre cet homomorphisme de manière unique en un homomorphisme de $S^{-1}A$-modules

$$S^{-1}\operatorname{Hom}_A(M, N) \to \operatorname{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N).$$

En particulier, si $M = A$, $f\colon A \to N$ est de la forme $a \mapsto af(1)$, ce qui identifie $\operatorname{Hom}_A(A, N)$ à N. L'homomorphisme f_1 vérifie $f_1(a) = af(1)/1$ et on consate que l'homomorphisme $\varphi'\colon S^{-1}A \to S^{-1}N$ donné par $a/s \mapsto (a/s)f(1)$ est un homomorphisme tel que $\varphi'(m/1) = (a/1)f(1) = af(1)/1$ donc φ s'identifie à $f(1)/1$ dans $\operatorname{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}A, S^{-1}N) = S^{-1}N$. Le morphisme $f \mapsto \varphi$ correspond donc au morphisme $n \mapsto n/1$ et l'unique façon d'étendre ce morphisme en un homomorphisme de $S^{-1}A$-modules est l'homomorphisme identique $S^{-1}N \to S^{-1}N$, donc $\alpha_{A,N}$ s'identifie à l'homomorphisme identique.

c) Supposons que M est un A-module libre de type fini. Soit n le rang de M. Alors une base de M fournit des identifications

$$S^{-1}\operatorname{Hom}_A(M, N) \simeq S^{-1}\operatorname{Hom}_A(A^n, N) \simeq S^{-1}N^n$$

et
$$\mathrm{Hom}_A(S^{-1}M, S^{-1}N) \simeq (S^{-1}N)^n$$
par lesquelles $\alpha_{M,N}$ correspond à l'identité sur chaque facteur, donc est un isomorphisme.

d) Comme M est de type fini, il existe un A-module libre de type fini M_1 et une surjection $g\colon M_1 \to M$. Le noyau de g est un sous-module du module de type fini M_1. Comme A est noethérien, $\mathrm{Ker}\, g$ est de type fini et il existe un A-module libre de type fini M_2 ainsi qu'une surjection $f\colon M_2 \to \mathrm{Ker}\, g$. Autrement dit, on a une suite exacte
$$M_2 \xrightarrow{f} M_1 \xrightarrow{g} M \to 0$$
d'où on déduit, le foncteur $\mathrm{Hom}_A(\bullet, N)$ étant exact à gauche, une suite exacte
$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{\circ g} \mathrm{Hom}_A(M_1, N) \xrightarrow{\circ f} \mathrm{Hom}_A(M_2, N).$$
Comme le foncteur de localisation en la partie multiplicative S est exact, on a aussi une suite exacte
$$0 \to S^{-1}\mathrm{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{\circ g} S^{-1}\mathrm{Hom}_A(M_1, N) \xrightarrow{\circ f} S^{-1}\mathrm{Hom}_A(M_2, N).$$
Partant de nouveau de la suite exacte
$$M_2 \xrightarrow{f} M_1 \xrightarrow{g} M \to 0$$
et utilisant d'abord que la localisation est exacte puis l'exactitude à gauche du foncteur Hom, on en déduit une autre suite exacte
$$0 \to \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N) \xrightarrow{\circ g} \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M_1, S^{-1}N)$$
$$\xrightarrow{\circ f} \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M_2, S^{-1}N).$$

En faisant intervenir les homomorphismes $\alpha_{M,N}$, $\alpha_{M_1,N}$ et $\alpha_{M_2,N}$, on se retrouve dans la situation de la première question. Il en résulte que $\alpha_{M,N}$ est un isomorphisme.

e) Prenons $A = \mathbf{Z}$, $M = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ et $S = \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. Alors, $S^{-1}M = 0$ puisque tout élément de M est de torsion. Par suite, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(S^{-1}M, S^{-1}N)$ est nul pour tout $\mathbf{Z}$-module N et le module d'arrivée de $\alpha_{M,N}$ aussi.

Prenons par exemple $M = N$. Alors, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(M, M)$ n'est pas nul : il contient Id_M De plus, pour tout $a \neq 0$, l'endomorphisme $a\,\mathrm{Id}_M$ de M n'est pas nul : par exemple $a(\mathrm{cl}(1/a)) = \mathrm{cl}(1) \neq 0$ Ainsi, $S^{-1}\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(M, M) \neq 0$ et $\alpha_{M,M}$ ne peut pas être un isomorphisme.