Topologie algébrique.
Cours n° 8 et n°9 (première partie)

Antoine Touzé

10 décembre 2014

Table des matières

11 L'homologie singulière et ses outils de calculs 1
11.1 Homologie singulière des paires d'espaces 1
11.2 Premiers calculs et applications 4
11.3 Le théorème de Jordan généralisé 7

11 L'homologie singulière et ses outils de calculs

Dans cette section, nous introduisons l'homologie singulière des paires d'espaces (X, A), qui mesure la topologie de l'espace X 'modulo' celle du sous-espace A. L'homologie singulière d'un l'espace X définie à la section précédente correspond à l'homologie de la paire $(X, \emptyset)$. Les propriétés fondamentales de l'homologie (relative) sont numérotées (P0) à (P6) dans la suite [1]. L'utilisation de ces propriétés fondamentales permet de faire un grand nombre de calculs explicites.

Comme récompense de ce travail algébrique, nous obtiendrons des démonstrations faciles de résultats topologiques non triviaux (théorème de Brouwer, invariance du bord, de la dimension, du domaine, théorème de Jordan...).

11.1 Homologie singulière des paires d'espaces

A. Définition

Soit R un anneau. Soit X un espace et $A \subset X$. Alors l'inclusion $\iota : A \hookrightarrow X$ induit un morphisme de complexes de chaînes singulières, injectif en chaque degré :

$$\iota_* : C_*(A, R) \to C_*(X, R) .$$

1. Nous ne le ferons pas, mais on peut montrer que ces propriétés caractérisent l'homologie singulière.

On peut donc voir $C_*(A, R)$ comme un sous-complexe de $C_*(X, R)$.

Définition 11.1. Le *complexe singulier relatif* $C_*(X, A, R)$ est le quotient du complexe $C_*(X, R)$ par le sous-complexe $C_*(A, R)$. L'homologie du complexe $C_*(X, A, R)$ s'appelle *l'homologie relative de la paire* (X, A), et se note $H_n(X, A, R)$.

On notera souvent plus simplement $C_*(X, A)$ et $H_n(X, A)$ s'il n'y a pas d'ambiguité sur l'anneau des coefficients R.

Proposition 11.2 (Fonctorialité (P0)). *Une application de paires $f : (X, A) \to (Y, B)$ induit un morphisme de complexes de chaînes singulières relatives :*

$$f_* : \begin{array}{ccc} C_*(X, A) & \to & C_*(Y, B) \\ [\sum \lambda_i \sigma_i] & \mapsto & [\sum \lambda_i f \circ \sigma_i] \end{array},$$

donc des morphismes en homologie relative $H_n(f) : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$. En particulier, l'homologie singulière relative définit des foncteurs

$$H_n : \mathcal{T}op_2 \to R\text{-}Mod .$$

On a $C_*(X) = C_*(X, \emptyset)$, donc l'homologie singulière relative généralise l'homologie singulière : $H_n(X) = H_n(X, \emptyset)$. On rappelle les deux calculs suivants.

Proposition 11.3 (Homologie du point (P1)).

$$H_n(\{pt\}) = \begin{cases} R & si\ n = 0, \\ 0 & si\ n > 0, \end{cases}$$

Proposition 11.4 (Homologie et composantes connexes par arcs (P2)). *Soit X un espace topologique et X_α ses composantes connexes par arcs, alors*

$$H_n(X) \simeq \bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha) .$$

B. Homotopies

On rappelle que deux applications de paires $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ sont homotopiquement équivalentes (via une homotopie de paires) s'il existe une homotopie $H : X \times I \to Y$ entre f et g, qui peut se retreindre en une homotopie $H : A \times I \to B$ entre les restrictions $f_{|A}^{|B}$ et $g_{|A}^{|B}$.

Proposition 11.5 (Invariance homotopique (P3)). *Deux applications de paires $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ homotopes par une homotopie de paires induisent la même application en homologie relative.*

Corollaire 11.6. *Deux espaces homotopiquement équivalents ont des homologies singulières isomorphes.*

C. Suites exactes longues

Proposition 11.7 (Suite exacte longue d'une paire (P4)). *Pour toute paire d'espaces (X, A), on a une suite exacte longue (où les applications qui ne sont pas des connectants sont induites par les inclusions de paires) :*

$$\begin{aligned}\dots \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(A) \to H_n(X) \to H_n(X,A) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(A) \to \dots \\ \to H_0(A) \to H_0(X) \to H_0(X,A) \to 0 \,.\end{aligned}$$

De plus, une application de paires d'espaces $f : (X, A) \to (Y, B)$ induit un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & H_n(A) \arrow[r] \arrow[d, "H_n(f)"] & H_n(X) \arrow[r] \arrow[d, "H_n(f)"] & H_n(X,A) \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "H_n(f)"] & H_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "H_{n-1}(f)"] & \dots \\
\dots \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & H_n(B) \arrow[r] & H_n(Y) \arrow[r] & H_n(Y,B) \arrow[r, "\delta_n"] & H_{n-1}(B) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd} .$$

D. Théorèmes d'excision

Theorème 11.8 (Excision (P5)). *Soit (X, A) une paire d'espaces, et $B \subset A$ tel que $\overline{B} \subset \overset{\circ}{A}$. Alors l'inclusion de paires $(X \setminus B, A \setminus B) \hookrightarrow (X, A)$ induit pour tout n un isomorphisme :*

$$H_n(X \setminus B, A \setminus B) \xrightarrow{\simeq} H_n(X, A) \,.$$

Theorème 11.9 (Mayer-Vietoris (P5')). *Soit X un espace, $A, B \subset X$ tels que $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = X$. Alors on a une suite exacte longue en homologie :*

$$\begin{aligned}\dots \to H_{n+1}(X) \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(A \cap B) \xrightarrow{(H_n(\iota^A_{A\cap B}), H_n(\iota^B_{A\cap B}))} H_n(A) \oplus H_n(B) \\ \xrightarrow{H_n(\iota^X_A) - H_n(\iota^Y_B)} H_n(X) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(A \cap B) \to \dots\end{aligned}$$

De plus, si on a une décomposition A', B' d'un espace X' et une application $f : X \to X'$ telle que $f(A) \subset A'$ et $f(B) \subset B'$, alors les suites de Mayer-Vietoris s'inscrivent dans un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & H_n(A \cap B) \arrow[r] \arrow[d, "H_n(f)"] & H_n(A) \oplus H_n(B) \arrow[r] \arrow[d, "H_n(f)"] & H_n(X) \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "H_n(f)"] & H_{n-1}(A \cap B) \arrow[r] \arrow[d, "H_{n-1}(f)"] & \dots \\
\dots \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & H_n(A' \cap B') \arrow[r] & H_n(A') \oplus H_n(B') \arrow[r] & H_n(X') \arrow[r, "\delta_n"] & H_{n-1}(A' \cap B') \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd} .$$

E. Calcul de H_0 et Homologie réduite

Proposition 11.10. *Soit X un espace. Alors $H_0(X)$ est un R-module libre de base $\pi_0(X)$. De plus, si $f : X \to Y$ est une application continue, alors $H_0(f)$ est l'application R-linéaire égale à $\pi_0(f)$ sur la base.*

L'homologie réduite est une variante mineure de l'homologie singulière qui est pratique à manipuler dans certains calculs. Si X est un espace, il existe une unique application $X \to \{pt\}$. L'homologie réduite $\overline{H}_n(X)$ est définie comme le noyau de l'application $H_n(X) \to H_n(\{pt\})$. On a donc :

$$\begin{aligned} H_n(X) &= \overline{H}_n(X) \text{ si } n > 0, \\ H_0(X) &= \overline{H}_0(X) \oplus R \end{aligned}$$

Les axiomes d'invariance homotopique (P3), de suite exacte longue (P4) et de Mayer Vietoris (P5') ci-dessus restent valables si on remplace les homologies des espaces par les homologie réduites (et on conserve l'homologie relative des paires d'espaces telle quelle). Par exemple la suite exacte longue d'une paire (X, A) peut aussi s'écrire :

$$\begin{aligned} \dots \xrightarrow{\delta_{n+1}} \overline{H}_n(A) \to \overline{H}_n(X) \to & H_n(X, A) \xrightarrow{\delta_n} \overline{H}_{n-1}(A) \to \dots \\ & \to \overline{H}_0(A) \to \overline{H}_0(X) \to H_0(X, A) \to 0 \,. \end{aligned}$$

11.2 Premiers calculs et applications

Dans ce paragraphe, nous donnons quelques calculs essentiels d'homologie singulière qui découlent directement des axiomes de calcul (P0)-(P5), et nous donnons des applications en topologie.

A. Homologie des sphères

Theorème 11.11. *Pour tout $d \geq 0$ et tout n on a :*

$$\overline{H}_n(S^d) \simeq \begin{cases} 0 & \text{si } d \neq n, \\ R & \text{si } d = n. \end{cases}$$

Ce résultat montre que bien que les sphères S^n sont simplement connexes si $n \geq 2$, elle ne sont pas contractiles. Ce résultat permet également de démontrer le **Théorème de Brouwer** : si $n \geq 1$, toute application continue $f : D^n \to D^n$ admet un point fixe.

Exercice 11.12. *Construisez un espace semi-localement simplement connexe qui n'est pas localement contractile. (On pourra considérer la boucle d'oreille Hawaienne de dimension 2, c'est à dire le fermé de $\mathbb{R}^3$ obtenu comme réunion des sphères de centre $(1/n, 0, 0)$ et de rayon $1/n$ pour $n > 0$.)*

Le calcul de l'homologie des sphères (à coefficients dans $\mathbb{Z}$) est le point de départ de la *théorie du degré*. Le groupe abélien $H_n(S^n, \mathbb{Z})$ est cyclique infini, et les morphismes de groupes cycliques infinis sont exactement les homothéties $x \mapsto \lambda x$ de rapport $\lambda \in \mathbb{Z}$. On introduit la définition suivante.

Définition 11.13. Soit $f : S^n \to S^n$ continue. On appelle *degré de f* l'unique entier relatif $\deg(f)$ tel que $\overline{H}_n(f)$ soit une homothétie de rapport $\deg(f)$.

Proposition 11.14 (Calculs de degrés)**.**

1. *Soit r une réflexion orthogonale de $\mathbb{R}^{n+1}$, et $r_{|S^n}$ sa restriction à la sphère unité. Alors* $\deg(r_{|S^n}) = -1$.
2. *Le degré de l'application antipode de S^n vaut* $(-1)^{n+1}$.

La théorie du degré possède de nombreuses applications topologiques qui seront traitées en exercice.

La conjecture de Poincaré

Nous profitons du calcul de l'homologie des sphères pour donner un mini aperçu historico-scientifique sur la conjecture de Poincaré.

1. **Surfaces et homologie.** On sait classifier complètement les surfaces topologiques compactes (c'est à dire établir leur liste à homéomorphisme près), et calculer leur homologie [2]. On constate que si V est une surface topologique compacte telle que $H_n(V) = H_n(S^2)$, alors V est homéomorphe à la sphère S^2.
2. **Sphère de Poincaré et sphères d'homologie.** La situation est plus compliquée en dimension supérieure. Soit I le sous-groupe de SO_3 formé des symétries de l'icosaèdre. C'est un groupe fini simple isomorphe au groupe alterné A_5. L'espace des orbites
$$\Sigma^3 = SO_3/I$$
est aujourd'hui appelé « la sphère de Poincaré ». En effet, Poincaré a montré que c'est une variété compacte de dimension 3, non simplement connexe (donc non homéomorphe à S^3), qui a même homologie que S^3.
La sphère de Poincaré est un exemple de sphère d'homologie, c'est à dire de variété topologique compacte dont l'homologie est la même que celle de S^n. (L'entier n est la dimension de la sphère d'homologie).
3. **Conjecture de Poincaré (1904).** Poincaré a conjecturé que le groupe fondamental est la seule obstruction pour qu'une sphère d'homologie soit une authentique sphère. Plus précisément :

Soit V une sphère d'homologie simplement connexe de dimension 3. *Alors V est homéomorphe à S^3.*

2. Ces surfaces comprennent les tores à g-trous et le plan projectif $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$. Nous aborderons le calcul de l'homologie des surfaces dans le chapitre sur l'homologie cellulaire.

Bien sûr, on peut poser la même conjecture en dimension supérieure, c'est à dire si V est une sphère d'homologie de dimension n simplement connexe, alors V est homéomorphe à S^n.

4. **Type d'homotopie des sphères d'homologie.** En combinant deux thèorèmes basiques de topologie algébrique, le théorème de Hurewicz et le théorème de Whitehead, on montre facilement le résultat suivant.

   Si V est une sphère d'homologie de dimension n simplement connexe, alors V a le type d'homotopie de S^n.

   On est cependant très loin du type d'homéomorphisme de V.

5. **Solutions de la conjecture de Poincaré.** Paradoxalement c'est pour les sphères d'homologie de dimension $n \geq 5$ que la conjecture de Poincaré fut confirmée en premier, par Newman (1966) et Connell (1967). Smale avait auparant démontré en 1961 que pour $n \geq 5$, la conjecture de Poincaré est vraie si on suppose de plus que V est une variété différentiable (travaux pour lesquels il reçut la Médaille Fields en 1966)

   En dimension 4, la conjecture de Poincaré a été résolue par Freedman (1982, dans des travaux pour lesquels il reçut la médaille Fields en 1986).

   Enfin, il fallut attendre 2003 pour que Perelman donne une solution à la conjecture en dimension 3 (il refusa sa médaille Fields en 2006).

B. Homologie locale

On appelle *homologie locale* d'un espace X au point $x \in X$ les R-modules d'homologie $H_n(X, X \setminus \{x\})$.

Theorème 11.15. *Soit X un espace, et x un point fermé de X qui admet un voisinage homéomorphe à $\mathring{D}^d$. Alors*

$$H_n(X, X \setminus \{x\}) \simeq \begin{cases} 0 & si\ n \neq d, \\ R & si\ n = d. \end{cases}$$

Parmi les applications de l'homologie locale, nous donnons les deux théorèmes topologiques importants suivants.

- **Théorème de l'invariance de la dimension :** Soit $\mathcal{U}$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et V un ouvert non vide de $\mathbb{R}^m$. Si $\mathcal{U}$ est homéomorphe à V alors $n = m$.
- **Théorème d'invariance du bord :** Si $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ est un homéomorphisme, alors f envoie le bord $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ homéomorphiquement sur lui-même.

Rappelons que nous avons défini une variété topologique comme un espace topologique qu'on peut recouvrir par des ouverts homéomorphes à des boules euclidiennes. Le théorème de l'invariance de la dimension implique les deux résultats suivants sur la dimension des variétés topologiques.

— **Existence de la dimension** : Si X est une variété topologique connexe, alors il existe un entier n tel que X est une variété topologique de dimension n.

— **Invariance de la dimension** : Si deux variétés topologiques X et Y de dimensions respectives n et m sont homéomorphes, alors $n = m$.

C. Homologie des bouquets

Theorème 11.16. *Soient (X, x) et (Y, y) deux espaces pointés. On suppose que x (resp. y) admet un voisinage $\mathcal{U}_x$ (resp. $\mathcal{U}_y$) qui se rétracte par déformation sur x (resp. y). Alors les inclusions $X \hookrightarrow X \vee Y$ et $Y \hookrightarrow X \vee Y$ induisent pour tout n un isomorphisme :*

$$\overline{H}_n(X) \oplus \overline{H}_n(Y) \xrightarrow{\simeq} \overline{H}_n(X \vee Y) \ .$$

D. Homologie des quotients

Theorème 11.17. *Soit $A \hookrightarrow X$ une cofibration. L'application quotient $q : (X, A) \to (X/A, *)$ induit un isomorphisme en homologie.*

Exemple 11.18. Le cone d'un espace X est le quotient $(I \times X)/(\{1\} \times X)$. La suspension ΣX de X est le quotient $CX/(\{0\} \times X)$. Comme le cone est contractile, on a pour tout $n \geq 0$ un isomorphisme $\overline{H}_n(X) \simeq \overline{H}_{n+1}(\Sigma X)$.

11.3 Le théorème de Jordan généralisé

A. Homologie singulière d'une union croissante d'espaces

Nous commençons par une propriété supplémentaire de l'homologie singulière. Cette propriété élémentaire est essentielle, et ne peut pas se déduire des axiomes (P0)-(P5).

Proposition 11.19 (P6). *Soit X un espace, et soit $(X_k)_{k\geq 0}$ une suite croissante de sous-espaces de X tels que :*

(i) $X = \bigcup_{k\geq 0} X_k$,

(ii) tout sous-ensemble compact K de X est contenu dans un X_k.

Notons $j_{k,\ell} : X_k \hookrightarrow X_\ell$ et $j_k : X_k \hookrightarrow X$ les inclusions de sous-espaces. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a les propriétés suivantes.

(a) Pour tout $c \in H_n(X)$, il existe un entier k et classe $c_k \in H_n(X_k)$ telle que $H_n(j_k)(c_k) = c$.

(b) *Pour tout $c_k \in H_n(X)$ on a $H_n(j_k)(c_k) = 0$ si et seulement s'il existe $\ell > k$ tel que $H_n(j_{k,\ell})(c_k) = 0$.*

La proposition précédente montre que l'on peut calculer complètement l'homologie de X à partir de l'homologie des espaces X_k et l'effet des applications $j_{k,\ell} : X_k \hookrightarrow X_\ell$ sur l'homologie. En effet, on peut déduire de la proposition que $H_n(X)$ est isomorphe au R-module quotient

$$\left(\bigoplus_{k\geq 0} H_n(X_k)\right)/N\ ,$$

où N est le sous-module de la somme directe engendré par les éléments du type $c_k - H_n(j_{k,\ell})(c_k)$, pour tout $k < \ell$ et tout $c_k \in H_n(X_k)$.

B. Le théorème de Jordan

On rappelle que si X est un espace compact et si Y est un espace topologique séparé, une application continue $f : X \to Y$ est un plongement (c'est à dire induit un homéomorphisme sur son image) si et seulement si elle est continue et injective.

Proposition 11.20. *Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ fixé. Soit Y un espace topologique compact satisfaisant la propriété d'annulation suivante. Pour tout plongement $f : Y \to S^n$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$:*

$$\overline{H}_k(S^n \setminus f(Y)) = 0\ .$$

Alors $Y \times I$ satisfait aussi cette propriété d'annulation.

Le point clé pour démontrer le théorème de Jordan est le corollaire suivant.

Corollaire 11.21. *Soit $f : D^r \to S^n$ un plongement ($n > 0$ et r un entier quelqconque). Alors $\overline{H}_k(S^n \setminus f(D^r)) = 0$ pour tout k.*

Theorème 11.22 (Théorème de Jordan généralisé)**.** *Soit $0 \leq r < n$ et soit $f : S^r \to S^n$ un plongement. Alors pour tout entier k on a*

$$H_k(S^n \setminus f(S^r)) = H_k(S^{n-r-1})\ .$$

Nous donnons deux applications topologiques importantes du théorème de Jordan généralisé.

1. **Théorème de Jordan :** si $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ est un plongement et $n \geq 2$, alors $\mathbb{R}^n \setminus f(S^{n-1})$ possède deux composantes connexes par arcs.
2. **Théorème de l'invariance du domaine :** soient V et W deux variétés topologiques de dimension n, et $f : V \to W$ une application continue injective. Alors f est un homéomorphisme local.