Université des Sciences et Technologies de Lille
Master Math, S2 (2007-08)
Topologie algébrique, Feuille 1

§1. Topologie générale

1. Exercice

Soit E un espace topologique dont la topologie est définie par un ensemble d'ouverts $\mathcal{O}_E$.

1.1) Soit $\mathcal{B}_E$ un sous-ensemble de $\mathcal{O}_E$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
(1) "Pour tout ouvert $U \in \mathcal{O}_E$ et tout point $x \in U$, on peut trouver un ouvert $B_x \in \mathcal{B}_E$ tel que $x \in B_x \subset U$."
(2) "Tout ouvert $U \in \mathcal{O}_E$ s'écrit comme réunion d'ouverts de $\mathcal{B}_E$."

On dit alors que $\mathcal{B}_E$ est une *base* d'ouverts de E.

1.2) Si un espace F possède une base d'ouverts $\mathcal{B}_F$, alors une application $f : E \to F$ est continue si et seulement si on a $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_E$ pour tout $V \in \mathcal{B}_F$.

2. Exercice

Soient E et F des espaces topologiques. On munit le produit cartésien $E \times F$ de la topologie produit, avec comme ouverts les réunions de parties de la forme $U \times V$, $U, V \in \mathcal{O}_E$.

2.1) On dit qu'un espace topologique E est *séparé*, si pour tout couple de points tels que $x \neq y$, on peut trouver des ouverts $U, V \in \mathcal{O}_E$ vérifiant $x \in U$, $y \in V$ et $U \cap V = \emptyset$. (On dit que les ouverts séparent les points.)

Montrer que E est séparé si et seulement si la diagonale $\Delta = \{(x,x),\ x \in E\}$ définit une partie fermée de $E \times E$.

2.2) Soit $f : E \to F$ une application continue avec F séparé. Prouver que le graphe de f, définit comme l'ensemble $\Delta_f = \{(x, f(x)) \in E \times F\}$, est une partie fermée de $E \times F$.

Indication : On montrera que $\Delta_f = \phi^{-1}(\Delta)$ pour une application continue convenable $\phi : E \times F \to F \times F$.

3. Exercice (Topologie de Zariski) À un idéal I de l'anneau des polynômes $\mathcal{P} = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, on associe l'ensemble

$$V(I) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n \text{ tels que } f(a_1, \ldots, a_n) = 0\ (\forall f \in I)\}.$$

3.1) Observer que l'on a les relations $I \subset J \Rightarrow V(J) \subset V(I)$ et $V(I) = V(\sqrt{I})$.

3.2) Montrer les relations :

(*i*) $$\emptyset = V(\mathcal{P}) \quad \text{et} \quad \mathbb{C}^n = V((0))$$

(*ii*) $$V(I) \cup V(J) = V(I \cdot J),$$

(*iii*) $$\cap_\alpha V(I_\alpha) = V(\sum_\alpha I_\alpha)$$

et conclure que les $V(I)$ définissent l'ensemble des fermés d'une topologie sur $\mathbb{C}^n$. C'est la *topologie de Zariski.*

Observer que l'on a en outre $V((f)) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n \text{ tels que } f(a_1, \ldots, a_n) = 0\}$ pour l'idéal engendré par un seul élément $I = (f)$ et plus généralement

$$V((f_\lambda; \lambda \in \Lambda)) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n \text{ tels que } f_\lambda(a_1, \ldots, a_n) = 0,\ \forall \lambda \in \Lambda\}$$

BF, Courriel: `Benoit.Fresse@math.univ-lille1.fr`

pour l'idéal engendré par une collection d'éléments $I = (f_\lambda; \lambda \in \Lambda)$.
3.3) Montrer que les ensembles

$$D(f) = \mathbb{C}^n \setminus V(f) = \{(a_1, \ldots, a_n) \text{ tels que } f(a_1, \ldots, a_n) \neq 0\}$$

forment une base d'ouvert de la topologie de Zariski.

Indication: On utilisera que tout idéal I possède une famille génératrice f_λ, $\lambda \in \Lambda$, et que l'on a la relation $(f_\lambda; \lambda \in \Lambda) = \sum_\lambda (f_\lambda)$.
3.4) Comment s'exprime une intersection $D(f) \cap D(g)$? Observer que la topologie de Zariski n'est pas du tout séparée: deux ouverts non-vides de $\mathbb{C}^n$ se rencontrent obligatoirement.

Commentaires :

On a une application en sens inverse de $I \mapsto V(I)$ qui associe à toute partie $S \subset \mathbb{C}^n$ l'idéal $I(S) \subset \mathcal{P}$ des polynômes s'annulant sur S. Le théorème des zéros de Hilbert entraine que $I(V(I)) = \sqrt{I}$ et $V(I(S)) = \overline{S}$. On a ainsi un dictionnaire pour passer d'une propriété sur les idéaux de $\mathcal{P}$ à une propriété de la topologie de Zariski et vice versa.

4. Exercice
4.1) Montrer que pour un espace topologique E les assertions suivantes sont équivalentes:
(1) "Pour tout couple d'ouverts U, V de E, on a $U \cap V = \emptyset \Rightarrow U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$."
(2) "Pour tout couple de fermés F, G de E, on a $F \cup G = E \Rightarrow F = E$ ou $G = E$."

On dit que E est irréductible.
4.2) Montrer qu'un sous ensemble de la forme $V(I) \subset \mathbb{C}^n$ est irréductible pour la topologie de Zariski si et seulement si $\sqrt{I}$ est un idéal premier de $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$.

Indication : On raisonnera sur des ouverts de $V(I)$ de la forme $U = D(f) \cap V(I)$. **!!** On pour utiliser l'implication

$$\text{“}f(x_1, \ldots, x_n) = 0, \text{ pour tout } (x_1, \ldots, x_n) \in V(I)\text{”} \Rightarrow \text{“}f^N \in I, \text{ pour } N \gg 0\text{”}$$

qui est une forme du théorème des zéros de Hilbert.

§2. Être ou ne pas être homéomorphes

5. Exercice

Démontrer l'assertion suivante: *Les homéomorphismes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont les bijections monotones (strictement croissante sur $\mathbb{R}$ ou strictement décroissante sur $\mathbb{R}$) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

Indication : On utilisera le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer que les applications continues injectives sont nécessairement monotones.

6. Exercice

Les espaces que l'on considère sont des parties du plan muni de la métrique euclidienne.
6.1) Montrer que le cercle $x^2 - x + y^2 = 0$ privé du point 0 est homéomorphe à la droite $x = 1$.
Indication : Considérer la projection stéréographique de centre 0.
6.2) Montrer que le disque ouvert $x^2 - x + y^2 < 0$ est homéomorphe au demi plan ouvert $x > 1$.
Indication : La projection stéréographique de centre 0 se prolonge au plan complexe privé de 0. L'application obtenue s'appelle l'inversion de centre 0.
6.3) Existe-t-il un homéomorphisme du disque fermé $x^2 - x + y^2 \leq 0$ dans le demi-plan fermé $x \geq 1$.