Université des Sciences et Technologies de Lille
Master Math, S2 (2007-08)
Topologie algébrique, Feuille 10

§1. Revêtements (suite)

1. Exercice
1.1) Soit $p : E \to B$ un revêtement galoisien. Prouver que tout endomorphisme de $p : E \to B$ est un automorphisme.
1.2) Prouver que le revêtement universel s'il existe est unique à isomorphisme près.

2. Exercice

Soit G un groupe topologique connexe localement connexe par arc. Soit $p : \widetilde{G} \to G$ un revêtement de G. On fixe un point base $\tilde{e} \in \widetilde{G}$ dans la fibre de l'élément neutre $e \in G$. Prouver que $\widetilde{G}$ possède une structure de groupe topologique, unique telle que p soit un morphisme de groupes.

Indication : On appliquera le théorème de relèvement des applications pour construire un produit $\tilde{\mu} : \widetilde{G} \times \widetilde{G} \to \widetilde{G}$ et une application d'inversion $\tilde{\iota} : \widetilde{G} \to \widetilde{G}$. On utilisera l'unicité du relèvement pour montrer les relations des lois de groupe.

On utilisera que le morphisme $\mu_* : \pi_1(G, e) \times \pi_1(G, e) \to \pi_1(G, e)$ induit par le produit de G s'identifie au produit de $\pi_1(G, e)$ (voir exercice 3, feuille 7).

3. Problème

Le but de ce problème est de démontrer le théorème de Borsuk-Ulam qui s'énonce comme suit :

"*Soit $f : S^m \to \mathbb{R}^2$ une application continue, où $m \geq 2$. Il existe un point $x \in S^m$ tel que $f(x) = f(-x)$.*"

On raisonne par l'absurde. On suppose que $f(x) \neq f(-x)$, $\forall x \in S^m$, et on considère l'application $F : S^n \to S^1$ telle que :

$$F(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{||f(x) - f(-x)||}.$$

3.1) On considère le revêtement classique $q_n : S^n \to P^n(\mathbb{R})$ obtenu en identifiant $P^n(\mathbb{R})$ au quotient de S^n par la relation d'antipodie. Prouver que G induit une application sur $P^m(\mathbb{R})$ par passage au quotient de sorte que l'on a un morphisme de revêtements de la forme :

$$\begin{tikzcd} S^m \arrow[r, "F"] \arrow[d, "q_m"'] & S^1 \arrow[d, "q_1"] \\ P^m(\mathbb{R}) \arrow[r, dotted, "g"'] & P^1(\mathbb{R}). \end{tikzcd}$$

3.2) Que peut-on dire du morphisme $g_* : \pi_1(P^m(\mathbb{R}), *) \to \pi_1(P^1(\mathbb{R}), *)$?
3.3) On fixe $x_0 \in S^m$ et on prend $* = q_n(x_0)$ comme point base de S^m. Prouver que l'on peut appliquer le théorème de relèvement des applications pour construire une application $G : P^m(\mathbb{R}) \to S^1$ relevant g et telle que $G(*) = F(x_0)$.
3.4) Prouver la relation $G = F \circ q_m$ et montrer que cette relation conduit à une absurdité.

BF, Courriel: `Benoit.Fresse@math.univ-lille1.fr`