Université des Sciences et Technologies de Lille
Master Math, S2 (2007-08)
Topologie algébrique, Feuille 2

§1. Connexité (théorie)

1. Exercice
1.1) Soit E un espace topologique. Prouver que les assertions suivantes (1-3) sont équivalentes. On dit alors que E est *connexe.*
(1) Si $E = U \cup V$, pour des ouverts U, V tels que $U \cap V = \emptyset$, alors on a $U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$.
(2) Si $E = F \cup G$, pour des fermés F, G tels que $F \cap G = \emptyset$, alors on a $F = \emptyset$ ou $G = \emptyset$.
(3) Toute application continue $f : E \to \{0, 1\}$ est nécessairement constante.
1.2) Soit $f : E \to F$ une application continue. On suppose que F se décompose comme une réunion d'ouverts disjoints $F = \cup_k V_k$. Que peut-on dire des ensembles $U_k = f^{-1}(V_k)$?

Commentaire : On rappelle que la décomposition en composantes connexes d'un espace est une décomposition $E = \cup_k U_k$ où les U_k sont des ouverts disjoints de E. La question précédente montre que pour déterminer des composantes connexes d'un espace E il s'agit de construire suffisamment d'applications continues $f : E \to F$ pour les séparer.

2. Exercice
Montrer que les sous-espaces connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles. *Indication :* On utilisera qu'une partie D de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tout triplet $x < z < y$, on a $x, y \in D \Rightarrow z \in D$. Si on a $x, y \in D$ tels que $z \notin D$, alors que peut-on dire de $]-\infty, z[\cap D$ et $]z, +\infty[\cap D$?

3. Exercice
3.1) On dit qu'un espace topologique E est connexe par arc si pour tout couple de points $x, y \in E$, on peut trouver une application continue $\gamma : [0, 1] \to E$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Prouver que E connexe par arc entraine E connexe.
3.2) Soit $f : E \to F$ une application continue. Prouver que E connexe (par arc) entraine $f(E)$ connexe (par arc).

§2. Connexité (exemples)

4. Quiz
4.1) L'espace $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$ est-il connexe?
4.2) Soit $m < n$. On identifie $\mathbb{R}^m$ au sous-espace de $\mathbb{R}^n$ constitué des points $(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$. L'espace $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m$ est-il connexe? *Indication :* On distinguera différents cas selon les valeurs de m.
4.3) Quel est le nombre de composantes connexes de l'ensemble

$$E_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } y^2 = x(x-1)(x-\lambda)\},$$

pour un paramètre $\lambda > 1$?

5. Exercice
5.1) Prouver que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe. *Indication :* Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Que peut-on dire de l'application $\lambda \mapsto Det((1-\lambda)I + \lambda A)$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$? Que peut-on dire des zéros de cette application?
5.2) L'espace $GL_n(\mathbb{R})$ est-il connexe?

6. Exercice

BF, Courriel: `Benoit.Fresse@math.univ-lille1.fr`

6.1) L'espace $SO(2,\mathbb{R})$ est-il connexe?
6.2) L'espace $O(3,\mathbb{R})$ est-il connexe? Et $SO(3,\mathbb{R})$? Et plus généralement $SO(n,\mathbb{R})$? *Indication :* On utilisera qu'une transformation orthogonale de dimension 3 possède une réduction de la forme

$$Q = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot P^{-1}.$$

6.3) L'espace $SU(n,\mathbb{C})$ est-il connexe? Et $U(n,\mathbb{C})$? *Indication :* On utilisera la réduction des transformations orthogonales sur $\mathbb{C}$.

7. Exercice

Le but de cet exercice est de montrer que $SL(2,\mathbb{R})$ est connexe par arc. Les arguments utilisés peuvent se généraliser à $SL(n,\mathbb{R})$.
7.1) Soit $P \in SL(2,\mathbb{R})$. Soient $v_1 = Pe_1$ et $v_2 = Pe_2$ la base de $\mathbb{R}^n$ définie par la matrice P. Prouver en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à (v_1, v_2) que $P = QT$ où $Q \in SO(2,\mathbb{R})$ et T est une matrice triangulaire

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & x \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$$

telle que $a_1, a_2 > 0$.
7.2) Observer que T se décompose en $T = DU$, où D est une matrice diagonale

$$U = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix},$$

telle que $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, et U est une matrice unipotente

$$U = \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.3) Construire un arc joignant les matrices Q, D, U à la matrice identité puis conclure.

§3. Être ou ne pas être homéomorphes (suite)

8. Exercice
8.1) Peut-on construire un homoéomorphisme entre l'intervalle $I =]0,1[$ et le carré $C =]0,1[\times]0,1[$? *Indication :* Que peut-on dire des espaces $I \setminus \{x\}$ et $C \setminus \{y\}$?
8.2) Peut-on construire un homéomorphisme entre l'intervalle $I = [0,1]$ et le cercle S^1? *Indication :* Adapter la méthode de la question précédente.