Université des Sciences et Technologies de Lille
Master Math, S2 (2007-08)
Topologie algébrique, Feuille 3

§1. Compacité

1. Exercice
1.1) Les espaces $SO(n,\mathbb{R})$, $O(n,\mathbb{R})$ sont-ils compacts?
1.2) Les espaces $SU(n,\mathbb{C})$, $U(n,\mathbb{C})$ sont-ils compacts?
Indication: On pourra utiliser la norme

$$||A|| = \sqrt{\mathrm{Tr}(A^* \cdot A)} = \big(\sum_{1\leq i,j\leq n} \bar{A}_{ij} \cdot A_{ij}\big)^{1/2}$$

sur l'espace $M(n,\mathbb{C})$ des matrices à coefficients complexes, et sa version réelle, pour montrer que ces espaces sont bornés.
1.3) Les espaces $SL(n,\mathbb{R})$, $GL(n,\mathbb{R})$ sont-ils compacts?

2. Exercice
Soit $f : X \to Y$ une application continue bijective avec X compact. Montrer que f est automatiquement un homéomorphisme.
Indication : Que peut-on dire de $f(F)$, quand F est une partie fermée de X?

§2. Quotients et identifications

Dans les exercices qui suivent, on se donne un espace topologique B, un sous espace $A \subset B$ et une application continue $f : A \to X$. On notera $i : A \to B$ l'application d'inclusion. On considère l'espace $B \cup_f X$ obtenu en faisant l'identification $a \simeq f(a)$ des éléments $a \in A$ avec leur image $f(a) \in X$ par f. On a des applications naturelles $g : B \to B \cup_f X$ et $j : X \to B \cup_f X$ telles que $gi = jf$.

On rappelle que $Y = B \cup_f X$ satisfait la propriété suivante: tout diagramme commutatif de la forme

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, dotted, "j"] \arrow[ddr, bend left, "v"] & \\
B \arrow[r, dotted, "g"'] \arrow[drr, bend right, "u"'] & B \cup_f X \arrow[dr, dotted, "w"] & \\
& & Z
\end{tikzcd}$$

possède un *unique* morphisme pointillé $w : B \cup_f X \to Z$ qui le complète. On dit aussi que $B \cup_f X$ est un pushout de i par f.

Le quotient B/A est le cas particulier de cette construction où X est réduit à un point $X = \{pt\}$ et $f : A \to pt$ est l'application constante. On dit aussi que B/A est l'espace obtenu en identifiant A à un seul point.

3. Exercice
3.1) Montrer que la propriété universelle du pushout caractérise $Y = B \cup_f X$. Si on a un espace Y' qui vérifie la même propriété, alors on peut construire des applications continues $w : Y \to Y'$ et $w' : Y' \to Y$ telles que $w'w = \mathrm{Id}$ et $ww' = \mathrm{Id}$.

BF, Courriel: `Benoit.Fresse@math.univ-lille1.fr`

3.2) Expliciter la propriété universelle du quotient B/A.

4. Exercice

Identifier l'espace $]-\infty,0]\cup_i[0,+\infty[$, où $i:\{0\}\to[0,+\infty[$ est l'application naturelle $i(0)=0$.

5. Exercice (le cercle dans tout ses états)

On utilise
$$S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tels que } x^2+y^2=1\}$$
comme modèle de référence pour le cercle.

5.1) Montrer que l'on a un pushout de la forme:

$$\begin{tikzcd}
\{0,1\} \arrow[r] \arrow[d] & {[0,1]} \arrow[d, dotted] \\
{[0,1]} \arrow[r, dotted] & S^1
\end{tikzcd}$$

5.2) Montrer que l'on a un homéomorphisme $[0,1]/\{0,1\}\xrightarrow{\simeq}S^1$.

5.3) Montrer que l'on a un homéomorphisme $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\to S^1$. On pourra utiliser le résultat de la question précédente ou l'application exponentielle.

6. Exercice (la sphère dans tout ses états) !

On utilise
$$S^{n-1}=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \text{ tels que } x_1^2+\cdots+x_n^2=1\}$$
comme modèle de référence pour la sphère de dimension $n-1$ et
$$D^n=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \text{ tels que } x_1^2+\cdots+x_n^2\leq 1\}$$
comme modèle de référence pour la boule de dimension n.

6.1) Montrer que l'on a un homéomorphisme $S^{n-1}\times[0,1]/S^{n-1}\times\{0\}\xrightarrow{\simeq}D^n$.

6.2) Montrer que l'on a un pushout de la forme:

$$\begin{tikzcd}
S^{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & D^n \arrow[d, dotted] \\
D^n \arrow[r, dotted] & S^n
\end{tikzcd}$$

6.3) Montrer que l'on a un homéomorphisme $D^n/S^{n-1}\xrightarrow{\simeq}S^n$.

7. Exercice

On munit la sphère S^n de la relation d'équivalence $x\equiv -x$. Montrer que l'on a un homéomorphisme $S^n/\equiv\ \xrightarrow{\simeq}P^n(\mathbb{R})$.

8. Exercice !!

Montrer que l'on a des pushouts de la forme

$$\begin{tikzcd}
S^{n-1} \arrow[r, "h"] \arrow[d] & P^{n-1}(\mathbb{R}) \arrow[d, dotted] \\
D^n \arrow[r, dotted] & P^n(\mathbb{R})
\end{tikzcd}$$