Université des Sciences et Technologies de Lille
Master Math, S2 (2007-08)
Topologie algébrique, Feuille 4

§1. Actions de groupes et quotients

1. Exercice

On veut démontrer des analogues de résultats de la feuille précédente pour les espaces projectifs. On prend
$$S^{2n+1} = \{(z_1,\dots,z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1},\ |z_1|^2 + \cdots + |z_{n+1}|^2 = 1\}$$
comme modèle de la sphère de dimension $2n+1$ et
$$D^{2n+2} = \{(z_1,\dots,z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n},\ |z_1|^2 + \cdots + |z_{n+1}|^2 \leq 1\}$$
comme modèle de la boule de dimension $2n+2$.

1.1) On fait agir le cercle S^1 continûment sur S^{2n+1} en posant
$$e^{i\theta}(z_1,\cdots,z_{n+1}) = (e^{i\theta}z_1,\cdots,e^{i\theta}z_{n+1}).$$
Montrer que l'on a un homéomorphisme
$$S^{2n+1}/S^1 \xrightarrow{\simeq} P^n(\mathbb{C}).$$

Pour $n=1$, on a $P^1(\mathbb{C}) \simeq S^2$ et ce résultat donne un homéomorphisme $S^3/S^1 \simeq S^2$.

1.2) Montrer que l'on a des pushouts de la forme:
$$\begin{tikzcd} S^{2n-1} \arrow[r, "h"] \arrow[d] & P^{n-1}(\mathbb{C}) \arrow[d, dotted] \\ D^{2n} \arrow[r, dotted] & P^n(\mathbb{C}) \end{tikzcd} .$$

2. Problème

On étudie une relation entre d'une part le groupe $SU(2,\mathbb{C})$ constitué des matrices complexes $A \in \mathcal{M}(2,\mathbb{C})$ telles que $A \cdot A^* = I$, et d'autre part le groupe $SO(3,\mathbb{R})$ constitué des matrices réelles $A \in \mathcal{M}(3,\mathbb{R})$ telles que $A \cdot A^* = I$. On rappelle que $A^* = \overline{A}^t$ pour une matrice à coefficients complexes, respectivement $A^* = A^t$ pour une matrice à coefficients réels.

2.1) Soit $su(2,\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices à coefficients complexes telles que $A + A^* = 0$ et $\mathrm{Tr}(A) = 0$. Prouver que $su(2,\mathbb{C})$ constitue un espace vectoriel de rang 3 et que l'application $< A, B >= \mathrm{Tr}(A \cdot B^*)$ définit un produit scalaire euclidien sur $su(2,\mathbb{C})$. On explicitera une base orthonormée de $su(2,\mathbb{C})$.

2.2) Soit $g \in SU(2,\mathbb{C})$. Montrer que la formule $\rho_g(A) = gAg^{-1}$ définit une application $\rho_g : su(2,\mathbb{C}) \to su(2,\mathbb{C})$. Montrer que l'on a la relation $< \rho_g(A), \rho_g(B) >=< A, B >$ et que $\rho_g : su(2,\mathbb{C}) \to su(2,\mathbb{C})$ est une transformation orthogonale sur $su(2,\mathbb{C})$.

Observer en outre que l'application $\rho : g \mapsto \rho_g$ définit un morphisme de groupes
$$\rho : SU(2,\mathbb{C}) \to SO(3,\mathbb{R})$$

BF, Courriel: `Benoit.Fresse@math.univ-lille1.fr`

dont on déterminera le noyau.

2.3) On veut montrer que le morphisme $\rho : SU(2,\mathbb{C}) \to SO(3,\mathbb{R})$ construit dans la section précédente est surjectif. On utilise pour cela un résultat indépendant sur les rotations : toute matrice $Q \in SO(3,\mathbb{R})$ se décompose en $Q = R(\theta) \cdot S(\phi) \cdot T(\psi)$ pour des matrices de rotations de la forme

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & 0 & -\sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{pmatrix},$$

$$T(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ 0 & \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix}.$$

Prouver ce résultat.

Indication : On note (e_1, e_2, e_3) une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Soit (f_1, f_2, f_3) l'image de cette base par Q.

Observer que l'on peut fixer une rotation R d'axe e_3, et une rotation S d'axe $e_2' = Re_2$ telle que $Se_1' = f_1$. Soit (e_1', e_2', e_3') l'image de (e_1, e_2, e_3) par R. Soit (e_1'', e_2'', e_3'') l'image de (e_1', e_2', e_3') par S. Observer que l'application T qui envoie (e_1'', e_2'', e_3'') sur (f_1, f_2, f_3) est une rotation d'axe $e_1'' = f_1$.

Comment s'écrit la matrice de R dans la base (e_1, e_2, e_3)? Comment s'écrit la matrice de S dans la base (e_1', e_2', e_3')? Comment s'écrit la matrice de T dans la base (e_1'', e_2'', e_3'')? Comment s'écrivent les formules de changements de base?

2.4) Montrer que les matrices $R(\theta), S(\phi), T(\psi)$ sont dans l'image de ρ et conclure.

2.5) Observer que $SU(2,\mathbb{C})$ est homéomorphe à S^3 (en écrivant les équations de $SU(2,\mathbb{C})$). Conclure en utilisant la question précédente que l'on a un homéomorphisme entre $SO(3,\mathbb{R})$ et $P^3(\mathbb{R})$.

3. Exercice

3.1) Montrer que les espaces homogènes $SO(n+1,\mathbb{R})/\,SO(n,\mathbb{R})$ et $O(n+1,\mathbb{R})/\,O(n,\mathbb{R})$ sont homéomorphes à la sphère S^n.

3.2) Montrer que les espaces homogènes $SU(n+1,\mathbb{C})/\,SU(n,\mathbb{C})$ et $U(n+1,\mathbb{C})/\,U(n,\mathbb{C})$ sont homéomorphes à la sphère S^{2n+1}.