Université des Sciences et Technologies de Lille
Master Math, S2 (2007-08)
Topologie algébrique, Feuille 5

§1. Actions de groupes et quotients (suite)

1. Exercice

On étudie une action du groupe

$$SL(2,\mathbb{R}) = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ tels que } Det(A) = 1\}$$

sur le demi plan de Poincaré

$$H = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } \operatorname{Im} z > 0\}.$$

1.1) Pour une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}),$$

on pose

$$A \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Prouver que cette formule définit bien une action de $SL(2,\mathbb{R})$ sur H. Puis montrer que cette action est transitive.

1.2) Prouver que le stabilisateur du point $i \in H$ s'identifie au sous-groupe $SO(2,\mathbb{R})$. En déduire l'existence d'une application continue bijective $\overline{\phi} : SL(2,\mathbb{R})/SO(2,\mathbb{R}) \to H$.

1.3) Construire une application continue $\psi : H \to SL(2,\mathbb{R})$ telle que l'application composée

$$H \xrightarrow{\psi} SL(2,\mathbb{R}) \longrightarrow SL(2,\mathbb{R})/SO(2,\mathbb{R})$$

vérifie $\overline{\phi\psi} = \mathrm{Id}$. On utilisera les matrices

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & x \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

introduites dans un exercice précédent.

Montrer que l'on a également $\overline{\psi\phi} = \mathrm{Id}$ du fait que $\overline{\phi}$ est bijective. En conclure que $\overline{\phi}$ et $\overline{\psi}$ forment des homéomorphismes inverses.

§2. ! Compléments: exemples de sous-groupes fermés et non fermés

2. Exercice

Le but de cet exercice est de montrer le théorème de classification suivant: *un sous groupe A de $(\mathbb{R},+)$ est soit dense dans $\mathbb{R}$, soit de la forme $A = \mathbb{Z}\alpha$, pour un réel $\alpha \in \mathbb{R}$.*

On rappelle qu'un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si pour tout couple $x < y$ de réels on peut trouver un $a \in A$ tel que $x < a < y$.

On supposera $A \neq \{0\}$. On notera que $A \cap]0,+\infty[\neq \emptyset$, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x \in A \Leftrightarrow -x \in A$. On pose $\alpha = \inf(A \cap]0,+\infty[)$.

BF, Courriel: `Benoit.Fresse@math.univ-lille1.fr`

1er cas : on suppose $\alpha > 0$.

2.1) Soit $a_0 \in A$ tel que $\alpha \leq a_0 < \alpha + \alpha$.

Supposons $a_0 \neq \alpha$ et fixons $a \in A$ tel que $\alpha \leq a < a_0 < \alpha + \alpha$. Que peut-on dire de la différence $a_0 - a$? Conclusion?

2.2) Soit $a \in A$. Soit $n \in \mathbb{Z}$ le plus grand entier tel que $n\alpha \leq a$. Observer que $a - n\alpha \in A$ et que $0 \leq a - n\alpha < \alpha$. En déduire $a = n\alpha$ et conclure.

2ème cas : on suppose $\alpha = 0$.

Soit $x < y$ un couple de réel. On fixe $a \in A$ tel que $0 < a < y - x$. Soit $n \in \mathbb{Z}$ le plus grand entier tel que $na < y$. Prouver que $x < na < y$ et conclure.

3. Exercice

On considère le cercle $S^1 = \{e^{it},\ t \in \mathbb{R}\}$ dont la topologie peut être définie par la métrique $d(z, z') = |\arg(z/z')|$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que α/π est irrationel. Soit $A = \{e^{in\alpha},\ n \in \mathbb{Z}\}$ l'image du sous-groupe $\mathbb{Z}\alpha \subset \mathbb{R}$ dans le cercle S^1. Le but de cet exercice est de montrer que A est dense dans S^1.

3.1) Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe un entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que $0 < d(1, e^{im\alpha}) < \epsilon$.

Indication : On fixe un entier N tel que $2\pi/N < \epsilon$. On partage le cercle en N arcs de longueur $2\pi/N$. Observer qu'il existe des points $e^{ip\alpha} \neq e^{iq\alpha}$ dans un même arc de cercle.

3.2) Soit $z \in S^1$. Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $0 < d(z, e^{in\alpha}) < \epsilon$ et conclure.

Indication : Choisir $m \in \mathbb{Z}$ tel que $0 < d(1, e^{im\alpha}) < \epsilon$ et considérer les arcs $[e^{ikm\alpha}, e^{i(k+1)m\alpha}]$, pour $k \in \mathbb{N}$.

3.3) Montrer en utilisant le résultat de cet exercice que le groupe $\mathbb{Z}2\pi + \mathbb{Z}\alpha$ est dense dans $\mathbb{R}$.

4. Exercice !!!

On considère le tore $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Soit A l'image de la droite $\mathbb{R}(1, \alpha) \subset \mathbb{R}^2$ par l'application quotient.

Prouver que A est un sous groupe fermé de T si $\alpha \in \mathbb{Q}$, un sous groupe dense dans T sinon.