Université des Sciences et Technologies de Lille
Master Math, S2 (2007-08)
Topologie algébrique, Feuille 6

§1. Homotopie des applications

1. Exercice

Prouver que des applications $f, g : X \to S^{n-1}$ d'un espace X dans la sphère

$$S^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n \text{ tels que } ||v||^2 = 1\}$$

telles que $f(x) \neq -g(x)$, $\forall x \in X$, sont homotopes.

2. Exercice

2.1) Prouver que le cône CX d'un espace X, défini comme le quotient $CX = X \times [0,1]/X \times \{0\}$, est contractile.
2.2) La suspension ΣX d'un espace X, définie comme le quotient $\Sigma X = X \times [0,1]/X \times \{0,1\}$, est-elle contractile en général?
2.3) L'ensemble

$$\sqcup = [0,1] \times \{0\} \cup \{0,1\} \times [0,1] \subset [0,1] \times [0,1]$$

est-il rétract par déformation de $[0,1] \times [0,1]$?

3. Exercice

Construire des équivalences d'homotopies inverses $\phi : F_2 \to S^1$ et $\psi : S^1 \to F_2$ entre les espaces

$$F_2 = \{\, (z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \text{ tels que } z_1 \neq z_2 \,\} \quad \text{et} \quad S^1 = \{\, z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z| = 1 \,\}.$$

(On explicitera les homotopies telles que $\psi\phi \sim \mathrm{Id}$ et $\phi\psi \sim \mathrm{Id}$.)

4. Exercice

Prouver que $SO(2,\mathbb{R})$, respectivement $SU(2,\mathbb{C})$, est rétract par déformation de $SL(2,\mathbb{R})$, respectivement $SL(2,\mathbb{C})$. On utilisera la décomposition

$$P = Q \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

obtenue dans un exercice précédent où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, et $Q \in SO(2,\mathbb{R})$, respectivement $Q \in SU(2,\mathbb{C})$.

5. Problème !!!

On travaille dans la catégorie des espaces topologiques pointés, le point base d'un espace sera toujours noté $*$, toutes les applications sont supposées préserver le point base.

Pour $A \subset B$, on note B/A l'espace quotient obtenu en identifiant les points de A au point base $a \equiv *$.

Le cône d'un espace CA est défini par le quotient :

$$CA = A \times [0,1]/A \times \{0\} \cup * \times [0,1] \;;$$

la suspension par :

$$\Sigma A = A \times [0,1]/A \times \{0\} \cup * \times [0,1] \cup A \times \{1\}.$$

BF, Courriel: `Benoit.Fresse@math.univ-lille1.fr`

On notera $[a,t]$ le point du cône ou de la suspension de A représenté par le couple $(a,t) \in A \times [0,1]$.

Le cône d'une application $f : A \to B$ est défini par le quotient :

$$Cf = CA \coprod B / \simeq,$$

avec $x \simeq y$ si $x = [a,1]$ et $y = f(a)$. On notera que le point base de B, les points $[a,0] \in CA$ et les points $[*,t] \in CA$ sont identifiés dans Cf et représentent le point base de Cf. On a une application naturelle $i : B \to Cf$.

5.1) Pour des espaces (pointés) K, X, on notera $[K,X]$ l'ensemble des classes d'homotopies relatives au point base d'applications $u : K \to X$. On notera $\phi_* : [K,X] \to [K,Y]$, respectivement $\psi^* : [L,X] \to [K,X]$, l'application induite par la composition des classes d'homotopie par une application $\phi : X \to Y$, respectivement $\psi : K \to L$.

Soit X un espace. Soit $\phi : K \to L$ une équivalence d'homotopie. Prouver que l'application induite sur les ensembles de classes d'homotopie

$$\phi^* : [L,X] \to [K,X]$$

est une bijection.

5.2) On considère la suite d'ensembles de classes d'homotopie :

$$[Cf,X] \xrightarrow{i^*} [B,X] \xrightarrow{f^*} [A,X].$$

Prouver que cette suite est exacte au sens suivant. On note $[v] \in [B,X]$ la classe d'homotopie d'une application $v : B \to X$. Si $f^*([v]) = [*]$, la classe de l'application constante, alors il existe une classe $[w] \in [Cf,X]$ telle que $i^*([w]) = [v]$.

5.3) Construire des équivalences d'homotopie inverses $\phi : Ci \to \Sigma A$ et $\psi : \Sigma A \to Ci$. On explicitera les homotopies telles que $\phi\psi \sim \mathrm{Id}_{\Sigma A}$ et $\psi\phi \sim \mathrm{Id}_{Ci}$.

5.4) On veut prolonger la suite exacte de la question 2. D'abord, en utilisant le résultat précédent, montrer qu'il existe une suite exacte d'ensembles

$$[\Sigma A,X] \xrightarrow{\partial^*} [Cf,X] \xrightarrow{i^*} [B,X]$$

pour une application naturelle $\partial : Cf \to \Sigma A$ que l'on explicitera.

5.5) On note $\Sigma f : \Sigma A \to \Sigma B$ l'application telle que $\Sigma f([a,t]) = [f(a),t]$. Compléter les résultats obtenus précédemment pour prouver que l'on a une suite exacte à 5 termes de la forme

$$[\Sigma B,X] \xrightarrow{\Sigma f^*} [\Sigma A,X] \xrightarrow{\partial^*} [Cf,X] \xrightarrow{i^*} [B,X] \xrightarrow{f^*} [A,X].$$

Indication : Pour boucler la suite exacte, on pourra adapter les arguments des questions 3 et 4 et relier $C\partial$ à ΣB de façon appropriée.

5.6) Montrer que l'ensemble $[\Sigma A,X]$ possède une structure de groupe, que ce groupe agit sur l'ensemble $[Cf,X]$ et que des classes d'homotopie de $[Cf,X]$ ont même image par $i^* : [Cf,X] \to [B,X]$ si et seulement si elles sont dans la même orbite sous l'action de $[\Sigma A,X]$.