Université des Sciences et Technologies de Lille
Master Math, S2 (2007-08)
Topologie algébrique, Feuille 7

§1. Le groupe fondamental d'un espace

1. Problème

Le but de ce problème est de déterminer le groupe fondamental du cercle

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| = 1\}$$

avec $1 \in \mathbb{C}$ comme point base.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on a un lacet

$$\gamma_n : ([0,1], \{0,1\}) \to (S^1, 1)$$

défini par :

$$\gamma_n(t) = \exp(2i\pi nt).$$

On constate aisément que l'application $c : n \mapsto [\gamma_n]$ qui applique un entier $n \in \mathbb{Z}$ sur la classe d'homotopie du lacet $\gamma_n : ([0,1], \{0,1\}) \to (S^1, 1)$ définit un morphisme de groupes $c : \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1, 1)$. On veut montrer que ce morphisme est un isomorphisme.

On notera $p : \mathbb{R} \to S^1$ l'application telle que $p(t) = \exp(2i\pi t)$. Les arguments sont basés sur la propriété suivante de l'application p :

(C) *On a un recouvrement de S^1 par des ouverts U_α et une décomposition de $p^{-1}(U_\alpha)$ en réunion disjointe d'ouverts $p^{-1}(U_\alpha) = \coprod_n I_{\alpha,n}$ tels que l'application $p : \mathbb{R} \to S^1$ induit un homéomorphisme $p : I_{\alpha,n} \xrightarrow{\simeq} U_\alpha$ sur chaque $I_{\alpha,n}$.*

On peut prendre les arcs $U_\alpha = S^1 \setminus \{e^{2i\pi\alpha + i\pi}\}$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, et les intervalles $I_{\alpha,n} =]n + \alpha - 1/2, n + \alpha + 1/2[$, pour $n \in \mathbb{N}$, pour réaliser cette propriété.

1. Une construction de relèvement

L'étape essentielle dans la démonstration consiste à montrer l'assertion suivante :

(L) *Soit $F : X \times [0,1] \to S^1$ une application. Soit $\tilde{f} : X \times \{0\} \to \mathbb{R}$ une application telle que $p(\tilde{f}(x,0)) = F(x,0)$, $\forall x \in X$. Il existe une unique application $\tilde{F} : X \times [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $p(\tilde{F}(x,t)) = F(x,t)$, $\forall (x,t) \in X \times [0,1]$ et $\tilde{F}(x,0) = \tilde{f}(x)$, $\forall x \in X$.*

On dit que $\tilde{F}$ est un relèvement de F.

1.1) On fixe un point $x_0 \in X$ pour cette question et la suivante.

Prouver qu'il existe un voisinage ouvert U de x_0 dans X et un découpage de l'intervalle

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$$

tel que chaque $F(U \times [t_i, t_{i+1}])$ est entièrement contenu dans un des ouverts U_{α_i} de notre recouvrement $S^1 = \cup_\alpha U_\alpha$.

Indications : On observera, en utilisant la continuité de F, que tout point $(x_0, t) \in X \times [0,1]$ possède un voisinage ouvert $U_t \times]a_t, b_t[$ tel que $F(U_t \times]a_t, b_t[)$ est entièrement contenu dans un

BF, Courriel: `Benoit.Fresse@math.univ-lille1.fr`

ouvert U_α. Puis on utilisera la compacité de l'intervalle $[0,1]$ pour montrer que $[0,1]$ est couvert par un nombre fini d'intervalles de la forme $]a_t, b_t[$ et obtenir le résultat.

1.2) Prouver que le relèvement $\tilde{F}$ existe au moins sur un domaine de la forme $U_0 \times [0,1] \subset X \times [0,1]$ où $U_0 \subset X$ est un voisinage de $x_0 \in X$ éventuellement plus petit que le voisinage $U \subset X$ construit dans la question précédente.

Indications : On part de $\tilde{f} = X \times \{0\} \to \mathbb{R}$ pour $t_0 = 0$. On suppose par induction que l'on a construit le relèvement $\tilde{F}$ sur un domaine de la forme $U_0 \times [0, t_i] \subset X \times [0,1]$.

On a $F(U_0 \times [t_i, t_{i+1}]) \subset U_{\alpha_i}$ par construction et $\tilde{F}(x_0, t_i)$ appartient à l'un des ouverts I_{α_i, n_i} de la décomposition de $p^{-1}(U_{\alpha_i})$. Observer que l'on peut supposer $\tilde{F}(U_0 \times \{t_i\}) \subset I_{\alpha_i, n_i}$ quitte à remplacer U_0 par un voisinage plus petit. Puis utiliser l'homéomorphie pour prolonger $\tilde{F}$ à $U_0 \times [0, t_{i+1}] \subset X \times [0,1]$.

1.3) Prouver l'unicité du relèvement au dessus de chaque segment $\{x_0\} \times [0,1] \subset X \times [0,1]$.

Indications : Soient

$$\tilde{F}(x_0, -), \tilde{F}'(x_0, -) : [0,1] \to \mathbb{R}$$

deux relèvements de $F(x_0, -) : [0,1] \to S^1$ tels que $\tilde{F}(x_0, 0) = \tilde{F}'(x_0, 0) = \tilde{f}(x_0)$.

On reprend un découpage de l'intervalle, construit comme dans la question (1.1), de telle sorte que $F(\{x_0\} \times [t_i, t_{i+1}]) \subset U_{\alpha_i}$. On suppose par induction que $\tilde{F}(x_0, -)$ et $\tilde{F}'(x_0, -)$ coïncident sur $\{x_0\} \times [0, t_i]$. Observer en utilisant des propriétés de connexité que $\tilde{F}(\{x_0\} \times [t_i, t_{i+1}])$ et $\tilde{F}'(\{x_0\} \times [t_i, t_{i+1}])$ sont contenus dans une même composante I_{α_i, n_i} de $p^{-1}(U_{\alpha_i})$. Puis utiliser l'homéomorphie pour conclure que $\tilde{F}(x_0, -)$ et $\tilde{F}'(x_0, -)$ coïncident sur $\{x_0\} \times [t_i, t_{i+1}]$.

1.4) Utiliser le résultat de la question (1.3) pour montrer que les relèvements $\tilde{F} : U_0 \times [0,1] \to \mathbb{R}$ définis dans la question (1.2) pour chaque point $x_0 \in X$ se recollent pour définir un relèvement global continu $\tilde{F} : X \times [0,1] \to \mathbb{R}$.

1.5) Utiliser également le résultat de la question (1.3) pour montrer l'unicité du relèvement $\tilde{F} : X \times [0,1] \to \mathbb{R}$.

À suivre

2. Exercice

2.1) Prouver en utilisant la fonctorialité du groupe fondamental que le cercle S^1 n'est pas rétract du disque $D^2 = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z| \leq 1\}$: il n'existe pas d'application continue $r : D^2 \to S^1$ telle que $r(z) = z$, $\forall z \in S^1$.

2.2) Prouver que toute application continue $f : D^2 \to D^2$ possède un point fixe.

Indication : si $f(z) \neq z$, $\forall z \in D^2$, alors que pourrait-on dire de l'application qui applique $z \in D^2$ sur l'intersection de la demi-droite $[f(z), z)$ avec le cercle?

3. Exercice

On veut montrer des propriétés générales sur $\pi_1(X, e)$ pour un espace pointé (X, e) muni d'une opération de multiplication

$$* : X \times X \to X$$

telle que $e * x = x = x * e$, $\forall x \in X$. (Par exemple X est un groupe topologique.)

On notera $\cdot$ la composition des lacets, que l'on ne confondra pas avec la multiplication de X.

3.1) On a une opération sur des lacets $\alpha, \beta : ([0,1], \{0,1\}) \to (X, e)$, induite par la multiplication de X :

$$(\alpha * \beta)(t) = \alpha(t) * \beta(t).$$

Prouver que cette opération passe au quotient par la relation d'homotopie et induit une opération

$$* : \pi_1(X, e) \times \pi_1(X, e) \to \pi_1(X, e)$$

sur le groupe fondamental.
3.2) Montrer que l'on a la relation de distribution $(a*b)\cdot(c*d) = (a\cdot c)*(b\cdot d)$, $\forall a, b, c, d \in \pi_1(X, e)$, et observer que le lacet constant $e(t) \equiv e$, élément neutre pour la composition des lacets, est aussi un élément neutre pour $*$.
3.3) Utiliser les relations obtenues dans la question précédente pour montrer les relations $u \cdot v = u * v = v \cdot u$, $\forall u, v \in \pi_1(X, e)$, et conclure que $\pi_1(X, e)$ est abélien.