Université des Sciences et Technologies de Lille
Master Math, S2 (2007-08)
Topologie algébrique, Feuille 8

§1. Le groupe fondamental d'un espace (suite)

1. Exercice

L'espace $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m$ est-il connexe, simplement connexe?

2. Exercice

2.1) Soit E la réunion d'un point et d'une droite de $\mathbb{R}^3$ ne passant pas par ce point. Prouver que le groupe fondamental de $\mathbb{R}^3 \setminus E$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.
2.2) Prouver que le groupe fondamental de $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$ est aussi isomorphe à $\mathbb{Z}$.

3. Exercice

On veut montrer que les espaces projectifs complexes

$$* = P^0(\mathbb{C}) \subset P^1(\mathbb{C}) \subset \cdots \subset P^n(\mathbb{C}) \subset \cdots$$

sont simplement connexes. On utilisera pour cela les attachements cellulaires

$$\begin{tikzcd} S^{2n-1} \arrow[r, "h"] \arrow[d] & P^{n-1}(\mathbb{C}) \arrow[d, dotted] \\ D^{2n} \arrow[r, dotted] & P^n(\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

obtenus dans l'exercice 1 de la feuille 4 et on fera une récurrence sur n.

On considère les ouverts :

$$U = P^n(\mathbb{C}) \setminus \{\overrightarrow{0}\} = D^{2n} \setminus \{\overrightarrow{0}\} \bigcup_{S^{2n-1}} P^{n-1}(\mathbb{C}),$$
$$V = P^n(\mathbb{C}) \setminus P^{n-1}(\mathbb{C}) = D^{2n} \setminus S^{2n-1}.$$

Prouver que $P^{n-1}(\mathbb{C})$ est rétract par déformation de U. Puis montrer en appliquant le théorème de Van Kampen aux ouverts U et V que l'on a un isomorphisme

$$\pi_1(P^{n-1}(\mathbb{C}), *) \xrightarrow{\simeq} \pi_1(P^n(\mathbb{C}), *).$$

Conclure.

4. Problème

On veut déterminer le groupe fondamental des espaces projectifs réels

$$* = P^0(\mathbb{R}) \subset P^1(\mathbb{R}) \subset \cdots \subset P^n(\mathbb{R}) \subset \cdots.$$

On utilisera pour cela les attachements cellulaires

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, "h"] \arrow[d] & P^{n-1}(\mathbb{R}) \arrow[d, dotted] \\ D^{n} \arrow[r, dotted] & P^n(\mathbb{R}) \end{tikzcd}$$

BF, Courriel: `Benoit.Fresse@math.univ-lille1.fr`

obtenus dans l'exercice 8 de la feuille 3 et on fera une récurrence sur n.

I. Rappeler que l'on a un homéomorphisme entre $P^1(\mathbb{R})$ et S^1. En déduire l'identité

$$\pi_1(P^1(\mathbb{R}), *) = \mathbb{Z}.$$

II. On étudie le cas $n = 2$.
4.1) On considère les ouverts :

$$\begin{aligned} U &= P^2(\mathbb{R}) \setminus \{\overrightarrow{0}\} = D^2 \setminus \{\overrightarrow{0}\} \bigcup_{S^1} P^1(\mathbb{R}), \\ V &= P^2(\mathbb{R}) \setminus P^1(\mathbb{R}) = D^2 \setminus S^1. \end{aligned}$$

Prouver que $P^1(\mathbb{R})$ est rétract par déformation de U. En déduire l'identité $\pi_1(U, *) = \mathbb{Z}$.
4.2) Prouver que V est simplement connexe.
4.3) Prouver que l'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "k"] \arrow[d, "h"'] & U \cap V \arrow[d] \\ P^1(\mathbb{R}) & U \arrow[l, "r"'] \end{tikzcd}$$

où k correspond à l'inclusion du cercle de rayon $1/2$ et r est la rétraction de U sur $P^1(\mathbb{R})$.
4.4) Prouver que le cercle de rayon $1/2$ est rétract par déformation de $U \cap V$. En déduire que l'on a un diagramme commutatif de groupes de la forme

$$\begin{tikzcd} \pi_1(S^1, *) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "h_*"'] & \pi_1(U \cap V, *) \arrow[d] \\ \pi_1(P^1(\mathbb{R}), *) & \pi_1(U, *) \arrow[l, "\simeq"'] \end{tikzcd} .$$

4.5) Déterminer le morphisme $h_* : \pi_1(S^1, *) \to \pi_1(P^1(\mathbb{R}), *)$ induit par l'application d'attachement $h : S^1 \to P^1(\mathbb{R})$.
4.6) Conclure que $\pi_1(P^2(\mathbb{R}), *) = \mathbb{Z}/2$ en utilisant le théorème de Van Kampen.

III. Montrer en adaptant les arguments de l'exercice 3 que l'on a un isomorphisme

$$\pi_1(P^{n-1}(\mathbb{R}), *) \xrightarrow{\simeq} \pi_1(P^n(\mathbb{R}), *)$$

pour $n \geq 3$ et conclure quant à la valeur de $\pi_1(P^n(\mathbb{R}), *)$.