Université des Sciences et Technologies de Lille
Master Math, S2 (2007-08)
Topologie algébrique, Feuille 9

§1. Le groupe fondamental d'un espace (suite et fin)

1. Exercice

Le but de cet exercice est de déterminer le groupe fondamental des groupes orthogonaux $SO(n,\mathbb{R})$. On a vu que $SO(2,\mathbb{R})$ est homéomorphe à S^1. Donc $\pi_1(SO(2,\mathbb{R}),*) = \mathbb{Z}$. On a vu que $SO(3,\mathbb{R})$ est homéomorphe à $P^3(\mathbb{R})$. D'où l'on déduit $\pi_1(SO(3,\mathbb{R}),*) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On peut vérifier que l'application naturelle $SO(2,\mathbb{R}) \to SO(3,\mathbb{R})$ s'identifie à une composée $S^1 \to S^3 \to P^3(\mathbb{R})$, d'où on tire que le morphisme $\pi_1(SO(2,\mathbb{R}),*) \to \pi_1(SO(3,\mathbb{R}),*)$ est la surjection $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

On veut montrer que $\pi_1(SO(n-1,\mathbb{R}),*) \to \pi_1(SO(n,\mathbb{R}),*)$ est un isomorphisme pour $n > 3$. Soit $\overrightarrow{p}$ le point $\overrightarrow{p} = (0,\dots,0,1) \in S^{n-1}$. Soient $U, V \subset S^{n-1}$ les ouverts $U = S^{n-1} \setminus \{-\overrightarrow{p}\}$ et $U = S^{n-1} \setminus \{\overrightarrow{p}\}$. Soit $\pi : SO(n,\mathbb{R}) \to S^{n-1}$ l'application définie par $\pi(T) = T(\overrightarrow{q})$.

1.1) Soit

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Soit $\phi : U \to SO(n,\mathbb{R})$, respectivement $\psi : U \to SO(n,\mathbb{R})$ l'application qui applique un point $\overrightarrow{v} = (x_1,\dots,x_n)$ sur la matrice :

$$\phi(\overrightarrow{v}) = \begin{pmatrix} & & & x_1 \\ & \delta_{ij} - \dfrac{x_i x_j}{1+x_n} & & \vdots \\ & & & x_{n-1} \\ -x_1 & \cdots & -x_{n-1} & x_n \end{pmatrix}, \text{ respectivement } \psi(\overrightarrow{v}) = \rho \cdot \phi(\rho(\overrightarrow{v})).$$

(On peut vérifier que $\phi(\overrightarrow{v})$ et $\psi(\overrightarrow{v})$ sont des matrices orthogonales.)

Prouver que l'application

$$\Phi : U \times SO(n-1,\mathbb{R}) \to SO(n,\mathbb{R}), \text{ respectivement } \Psi : V \times SO(n-1,\mathbb{R}) \to SO(n,\mathbb{R}),$$

telles que $\Phi(\overrightarrow{v},T) = \phi(\overrightarrow{v}) \cdot T$, respectivement $\Psi(\overrightarrow{v},T) = \psi(\overrightarrow{v}) \cdot T$, définit un homéomorphismes sur $\pi^{-1}(U)$, respectivement $\pi^{-1}(V)$.

1.2) Prouver que les appications

$$U \times SO(n-1,\mathbb{R}) \leftarrow U \cap V \times SO(n-1,\mathbb{R}) \to V \times SO(n-1,\mathbb{R})$$

induisent des isomorphismes au niveau des groupes fondamentaux. En déduire à l'aide du théorème de Van Kampen que l'application $q^{-1}(U) \to SO(n,\mathbb{R})$ induit un isomorphisme $\pi_1(q^{-1}(U),*) \to \pi_1(SO(n,\mathbb{R}),*)$.

1.3) Observer que l'application $SO(n-1,\mathbb{R}) \to U \times SO(n-1,\mathbb{R})$ induit un isomorphisme au niveau des groupes fondamentaux. Conclure que l'on a un isomorphisme $\pi_1(SO(n-1,\mathbb{R}),*) \to \pi_1(SO(n,\mathbb{R}),*)$ pour $n > 3$.

BF, Courriel: `Benoit.Fresse@math.univ-lille1.fr`

2. Exercice

2.1) Adapter la construction de l'exercice précédent pour montrer que $\pi_1(SU(n,\mathbb{C}),*) = *$ pour tout $n \geq 2$. On utilisera des matrices de la forme :

$$\phi(\overrightarrow{v}) = \begin{pmatrix} & & & z_1 \\ & \delta_{ij} - \dfrac{z_i \bar{z}_j}{1+z_n} & & \vdots \\ & & & z_{n-1} \\ -\alpha z_1 & \cdots & -\alpha z_{n-1} & z_n \end{pmatrix},$$

avec $\alpha = (1+z_n)/(1+\bar{z}_n)$.

2.2) Observer que $U(n,\mathbb{C})$ est homéomorphe au produit $S^1 \times SU(n,\mathbb{C})$. En déduire l'identité $\pi_1(U(n,\mathbb{C}),*) = \mathbb{Z}$ pour tout $n \geq 2$.

§2. Revêtements

3. Exercice

Soit $p : E \to B$ un revêtement. Soit $f : X \to B$ une application. On considère l'espace

$$f^*E = X \times_B E = \{(x,\xi) \in X \times E \text{ tels que } f(x) = p(\xi)\}$$

avec l'application $q : f^*E \to X$ telle que $q(x,\xi) = x$. Prouver que $q : f^*E \to X$ forme un revêtement.

4. Exercice

Soit $p : E \to B$ un revêtement galoisien de groupe de Galois G. Soit F un ensemble muni d'une action de G. On considère l'espace $(E \times F)/G$, obtenu en quotientant le produit $E \times F$ par l'action diagonale $g \cdot (\xi, u) = (g \cdot \xi, g \cdot u)$. On a une application naturelle $q : (E \times F)/G \to B$ telle que $q[\xi, u] = p(\xi)$ pour une classe $[\xi, u] \in (E \times F)/G$.

4.1) Prouver que $q : (E \times F)/G \to B$ forme un revêtement.

4.2) Prouver que l'espace $(E \times F)/G$ est connexe si G agit transitivement sur F. Montrer que dans ce cas, on a $(E \times F)/G \simeq E/H$, pour un certain sous groupe H de G tel que $F = G/H$.

4.3) On suppose que G agit transitivement sur F. Montrer que tout morphisme de revêtements au dessus de l'identité de la forme

$$\begin{tikzcd} (E \times F)/G \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "q"'] & (E \times F')/G \arrow[d, "q'"] \\ B \arrow[r, "="'] & B \end{tikzcd}$$

s'écrit $\Phi[\xi, u] = [\xi, \phi(u)]$ pour une application $\phi : F \to F'$, bien déterminée, qui commute à l'action de G.