2013/14 - Master 1 - M416 - Topologie

TD1 - Topologie générale

Exercice 1.
Soit X un ensemble. Vérifier que l'ensemble vide et les complémentaires de parties finies de X forment une topologie sur X, appelée *topologie cofinie*.

Exercice 2. (Adhérence)
a. Vérifier que dans un espace topologique, les adhérences vérifient les propriétés :

$$A \subset \overline{A}, \quad \overline{\overline{A}} = \overline{A}, \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{\emptyset} = \emptyset.$$

b. Soit X un ensemble. Montrer que toute application $\overline{} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ qui vérifie ces quatre propriétés (appelées *axiomes de fermeture de Kuratowski*) permet de définir sur X une topologie ayant $\overline{}$ pour application adhérence, en décrétant que les fermés de cette topologie sont les parties A telles que $A = \overline{A}$.
c. Montrer qu'une application $f : X \to Y$ entre deux espaces topologiques est continue si et seulement si pour toute partie A de X, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Exercice 3. (Bases)
Soit X un ensemble. Une *base* pour une topologie sur X est un ensemble $\mathcal{B}$ de parties de X tel que

(i) pour tout $x \in X$, il existe $B \in \mathcal{B}$ contenant x ;
(ii) pour tous $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ et tout $x \in B_1 \cap B_2$, il existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Pour une telle base $\mathcal{B}$, on définit la *topologie $\mathcal{T}$ engendrée par $\mathcal{B}$* de la façon suivante : un sous-ensemble U de X est un ouvert (i.e., $U \in \mathcal{T}$) si pout tout $x \in U$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset U$.
a. Verifier que $\mathcal{T}$ est bien une topologie sur X.
b. Montrer que les ouverts de X sont les réunions d'ouverts dans $\mathcal{B}$.
c. Verifier que $\mathcal{B}$ engendre bien $\mathcal{T}$, i.e., que $\mathcal{T}$ est la plus petite (au sens de l'inclusion) topologie sur X contenant contenant $\mathcal{B}$.
d. Soit X un espace topologique et $\mathcal{B}$ un ensemble d'ouverts de X. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $\mathcal{B}$ est une base pour la topologie de X (i.e., $\mathcal{B}$ est une base qui engendre la topologie de X) ;
(ii) pour tout ouvert U de X et tout $x \in U$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset U$;
(iii) les ouverts de X sont les réunions d'ouverts dans $\mathcal{B}$.
e. Soient X, Y des espaces topologiques et $\mathcal{B}$ une base pour la topologie de Y. Montrer qu'une application $f : X \to Y$ est continue si et seulement si pout tout $B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B)$ est un ouvert de X.

Exercice 4. (Topologie produit)
Soient X et Y deux espaces topologiques. On munit $X \times Y$ du la *topologie produit*, c'est-à-dire de la topologie engendrée par la base $\mathcal{B} = \{U \times V \,|\, U \text{ ouvert de } X, V \text{ ouvert de } Y\}$.
a. Verifier que $\mathcal{B}$ est bien une base pour une topologie sur $X \times Y$.
b. Montrer que les projections $p_1 : X \times Y \to X$ et $p_2 : X \times Y \to Y$ sont continues.
c. Montrer qu'une application $f : Z \to X \times Y$, où Z est un espace topologique, est continue si et seulement si les deux applications $p_1 f : Z \to X$ et $p_2 f : Z \to Y$ sont continues.
d. Il est faux de conjecturer qu'une application $f : X \times Y \to Z$ est continue si elle est continue en chaque variable séparément. Vérifier cela en considérant la fonction $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(0,0) = 0$ et $F(x,y) = xy/(x^2 + y^2)$ si $(x,y) \neq (0,0)$.
e. Vérifier que $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^{m+n}$.

Exercice 5. (Espaces topologiques séparés)
Un espace topologique est *séparé* si deux points distincts de l'espace admettent toujours des voisinages ouverts disjoints.

a. Montrer qu'un espace topologique X est séparé si et seulement si la diagonale $\Delta = \{(x,x) \mid x \in X\}$ est un fermé de $X \times X$.

b. Montrer que le produit de deux espaces topologiques séparés est séparé.

c. Soit $f\colon X \to Y$ une application continue avec Y séparé. Montrer que le *graphe* de f, défini comme l'ensemble $\Delta_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$, est un fermé de $X \times Y$.

Exercice 6. (Topologie induite)

a. Soient X un espace topologique, ayant $\mathcal{T}$ pour topologie, et A est une partie de X. Verifier que

$$\mathcal{T}_A = \{U \cap A \mid U \in \mathcal{T}\}$$

est une topologie sur A, appelée *topologie induite* sur A par X. Un *sous-espace topologique* de X est une partie de X munie de la topologie induite par X.

b. Soient X, Y des espaces topologiques, A un sous-espace topologique de X et B un sous-espace topologique de Y. Montrer que la topologie produit sur $A \times B$ coïncide avec la topologie induite par $X \times Y$.

c. La boucle d'oreille hawaïenne est l'union $C = \cup_{n\geq 1} C_n$ des cercles C_n de centre $(1/n, 0)$ et de rayon $1/n$. On munit C de la topologie induite par $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'application $f\colon C \to C$, définie par $f(x,y) = (nx, ny)$ pour $(x,y) \in C_n$, n'est pas continue.

Exercice 7. (Topologie de Zariski)
Soit $\mathcal{P} = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ l'anneau des polynômes à n variables. A tout idéal I de $\mathcal{P}$, on associe l'ensemble

$$Z(I) = \{\, (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n \mid P(a_1, \ldots, a_n) = 0 \text{ pour tout } P \in I \,\}.$$

a. Montrer que les ensembles $Z(I)$ définissent l'ensemble des fermés d'une topologie sur $\mathbb{C}^n$, appelée *topologie de Zariski*.

b. Vérifier que pour $n = 1$, la topologie de Zariski coïncide avec la topologie cofinie (voir l'exercice 1).

c. Montrer que $\mathcal{B} = \{B_P \mid P \in \mathcal{P}\}$, où

$$B_P = C^n \setminus Z((P)) = \{\, (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n \mid P(a_1, \ldots, a_n) \neq 0 \,\},$$

est une base d'ouverts de la topologie de Zariski.

d. Observer que la topologie de Zariski n'est pas séparée : deux ouverts non-vides se rencontrent obligatoirement.

Exercice 8.
Montrer que les homéomorphismes $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont les bijections monotones de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
[*Indication :* utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer qu'une application continue injective $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est monotone.]

Exercice 9.
Montrer qu'une application bijective continue n'est pas forcément un homéomorphisme.