Université Lille1
Sciences et Technologies

2013/14 - Master 1 - M416 - Topologie

TD2 - Connexité

Exercice 1. (Connexité)
Soit X un espace topologique. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) pour tous ouverts U, V de X, si $U \cap V = \emptyset$ et $U \cup V = X$, alors $U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$;
(ii) pour tous fermés F, G de X, si $F \cap G = \emptyset$ et $F \cup G = X$, alors $F = \emptyset$ ou $G = \emptyset$;
(iii) les parties de X ouvertes et fermées sont $\emptyset$ et X ;
(iv) toute application continue $f : X \to \{0, 1\}$ est constante, où $\{0, 1\}$ est munie de la topologie discrète.

Un tel espace topologique X est dit *connexe*. Une partie C d'un espace topologique est *connexe* si C munie de la topologie induite est un espace topologique connexe.

Exercice 2.
a. Montrer que l'image d'une partie connexe par une application continue est connexe.
b. Montrer que l'union de parties connexes d'un espace topologique ayant un point en commun est connexe.
c. Montrer que le produit de deux espaces topologiques connexes est connexe.
d. Montrer que si C est une partie connexe d'un espace topologique X, alors toute partie A de X telle que $C \subset A \subset \overline{C}$ est connexe.

Exercice 3.
Montrer que les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Exercice 4. (Connexité par arc)
Un espace topologique X est *connexe par arcs* si pour tous $x, y \in X$, il existe un *chemin* reliant x à y, c'est-à-dire une application continue $\gamma : [0, 1] \to X$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.
a. Montrer qu'un espace topologique connexe par arcs est connexe.
b. Montrer que l'image d'une partie connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs.
c. Montrer que le produit de deux espaces topologiques connexes par arcs est connexe par arcs.

Exercice 5. (Composantes connexes et composantes connexes par arcs)
Soit X un espace topologique. Les *composantes connexes* de X sont les classes d'équivalences de la relation d'équivalence sur X définie par $x \sim y$ s'il existe une partie connexe de X contenant x et y. Les *composantes connexes par arcs* de X sont les classes d'équivalences de la relation d'équivalence sur X définie par $x \sim y$ s'il existe un chemin reliant x à y.
a. Montrer que les composantes connexes de X sont des parties fermées connexes disjointes dont l'union est X, et que toute partie connexe non vide de X est contenue dans une unique composante connexe.
b. Montrer que les composantes connexes par arcs de X sont des parties connexes par arcs disjointes dont l'union est X, et que toute partie connexe par arcs non vide de X est contenue dans une unique composante connexe par arcs.
c. Montrer que toute composante connexe par arcs de X est contenue dans une unique composante connexe de X.
d. Montrer que si X est localement connexe (i.e., admet une base d'ouverts connexes par arcs), alors les composantes connexes par arcs de X sont les composantes connexes de X.

Exercice 6.
L'espace $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_m\}$ est-il connexe ? L'espace $\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \ldots, x_m\}$ est-il connexe ?

Exercice 7.
Soit $m < n$. On identifie $\mathbb{R}^m$ au sous-espace de $\mathbb{R}^n$ constitué des n-tuples $(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$. L'espace $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m$ est-il connexe ?

Exercice 8.
Soit $\lambda > 1$. Déterminer le nombre de composantes connexes de l'ensemble

$$X_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y^2 = x(x-1)(x-\lambda)\}.$$

Exercice 9.
Prouver que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe.
[*Indication :* pour $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, considérer l'application $t \mapsto \det(tA + (1-t)B)$ et ses zéros.]

Exercice 10.
L'espace $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est-il connexe ?

Exercice 11.
a. L'intervalle $[0, 1]$ et le carré $[0, 1] \times [0, 1]$ sont-ils homéomorhes ?
b. L'intervalle $[0, 1]$ et le cercle S^1 sont-ils homéomorhes ?

Exercice 12.
Le but de cet exercice est de montrer que $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ est connexe par arc. Les arguments utilisés peuvent se généraliser à $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$.

a. Soit $P \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Notons (v_1, v_1) l'image de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ par P.
Montrer en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à (v_1, v_2) que $P = QT$ où $Q \in \mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$ et T est une matrice triangulaire

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & * \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$$

telle que $a_1, a_2 > 0$.

b. Observer que T se décompose en $T = DU$, où D est une matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix},$$

telle que $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, et U est une matrice unipotente

$$U = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c. Construire un arc joignant les matrices Q, D, U à la matrice identité, puis conclure.