.

La conjecture (H).

Table des matières

1 Présentation du problème.

1.1 Version topologique.

Si X est un CW-complexe fini, 1-connexe et elliptique alors :

$$\dim H^*(X,\mathbb{Q}) \geq \dim(\pi_*(X \otimes \mathbb{Q}) \qquad (H)$$

1.2 Version algébrique.

En utilisant les modèles minimaux de Sullivan, le problème s'écrit alors :
Soit $(\wedge V, d)$ une adgc telle que :
– $\dim V < \infty$
– $\dim H^*(\wedge V, d) < \infty$
Alors

$$\dim H^*(\wedge V, d) \geq \dim V$$

1.3 Origine du problème.

Notation.
– $T^k = (S^1)^k$ s'appelle tore.
– Si G est un groupe qui agit sur X, pour $x \in X$ l'ensemble

$$G_x = \{g \in G \text{ tel que } g.x = x\}$$

s'appelle sous-groupe d'isotropie en x, l'action de G sur X est dite presque libre si G_x est fini pour tout $x \in X$.
– Le rang torique de X est défini par la relation :

$$rk_0(X) = \max\{k \in \mathbb{N} \text{ tel que } T^k \text{ agit presque librement sur } X\}$$

Objectif.
La conjecture (H) a été énoncé dans le but de résoudre la célèbre conjecture, appelée conjecture du rang torique (CRT) enoncée par S. Halperin en 1985, dont l'énoncé est :
Si X est un espace topologique raisonnable, 1-connexe alors

$$\dim H^*(X,\mathbb{Q}) \geq 2^{rk_0(X)}$$

et qui a déjà été résolue dans des cas particuliers, par Halperin, Allday, Puppe, Hilali et d'autres.

2 Technique adaptée à la résolution du problème.

En grande partie, on utilise la théorie de l'homotopie rationnelle, developpée en fin du 20 ème siecle par Felix, Halperin, Thomas,..

2.1 Algèbres graduées.

Module graduée.
Un module gradué est la donnée d'une famille $V = (V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de modules.
Par abus de language, on dit que les éléments de V_n sont de degré n, on écrit alors $\deg(v) = n$ ou bien $|v| = n$, pour tout $v \in V_n$.
Par abus de notation on écrit $V = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}} V_n$.
Pour simplifier les notations on écrit V^{-n} au lieu de V_n pour tout $n \in \mathbb{Z}^-$, et $V^{\geq n} = \bigoplus\limits_{p\geq n} V^p$, en particulier on note $V^+ = \bigoplus\limits_{p\geq 1} V^p$.

Différentielle.
C'est une application linéaire, $d_V : V \longrightarrow V$ de degré -1 tel que $d_V^2 = 0$. (V, d_V) s'appelle alors un complexe. Dans le cas général, sauf en cas de confusion, on note d au lieu de d_V.
On notera ici que, $d : V_n \longrightarrow V_{n-1}$ et $d : V^n \longrightarrow V^{n+1}$, autrement dit les différentielles augmentent les degrés en notation "puissance" et les diminuent en notation "indices".

Algèbre graduée. (ag)
C'est une algèbre graduée en tant que module.

Dérivation de degré n.
C'est une application linèaire de degré n, $d : V \longrightarrow V$ telle que :

$$d(xy) = (dx)\, y + (-1)^{n \deg x} x dy$$

Algèbre différentielle graduée (adg).
C'est une ag munie d'une différentielle (dérivation de degré -1).

Algèbre différentielle graduée commutative (adgc).
C'est une adg telle que :

$$xy = (-1)^{\deg x \deg y} yx \quad \forall (x, y) \in V^2$$

En particulier si $\deg x$ impair et $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de 2, on a $x^2 = 0$.

Produit tensoriel.
Soit V et W deux module gradués, leur produit tensoriel $V \otimes W$ est défini par :

$$(V \otimes W)_n = \bigoplus_{p+q=n} V_p \otimes W_q$$

Si $f : V \longrightarrow V'$ et $g : W \longrightarrow W'$ on pose alors :

$$\begin{array}{rccc} f\otimes g : & V \otimes W & \longrightarrow & V' \otimes W' \\ & v \otimes w & \longmapsto & (-1)^{\deg(g)\deg(v)} f(v) \otimes g(w) \end{array}$$

En particulier $\deg(f \otimes g) = \deg(f) + \deg(g)$.
Par abus de notation on ecrit $f \otimes W$ au lieu de $f \otimes \mathrm{id}_W$.
La multiplication interne dans $V \otimes W$ est définie par :

$$(v \otimes w).(v' \otimes w') = (-1)^{\deg w \deg v'}(vv' \otimes ww')$$

En particulier le produit tensoriel de deux adgc l'est aussi.

2.2 Modèles de Sullivan.

Algèbre tensorielle.
Si V module gradué libre, l'algèbre tensorielle TV est définie par :

$$TV = \bigoplus_{q=0}^{\infty} T^q V \quad \text{où} \quad T^q V = \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{q \text{ fois}}$$

L'indice q ne désigne pas le degré mais plutôt la longueur de de mot ; $v = v_1 \otimes \ldots \otimes v_q$ est un mot de longueur q et de degré égal à $\sum_{i=1}^{q} \deg v_i$.
Si $(v_i)_{i \in I}$ est une base de V, on écrit alors $TV = T\left((v_i)_{i \in I}\right)$.

Algébre libre.
C'est l'algébre notée $\wedge V$ définie par :

$$\wedge V = TV/I$$

où I est l'idéal engendré par les éléments de TV de la forme $v \otimes w - (-1)^{\deg v \deg w} w \otimes v$

Algèbre symétrique.
C'est l'algébre notée $\mathcal{S}V$ définie par : $\mathcal{S}V = TV/\mathcal{J}$ où $\mathcal{J}$ est le sous idéal de V engendré par les éléments de la forme $v \otimes w - w \otimes v$ s'appelle l'algébre symétrique de V. En particulier

$$\mathcal{S}V^{\text{pair}} = \{P(x_{i_1}, \ldots x_{i_n}) \text{ tel que } n \in \mathbb{N}^*, \deg x_i \text{ pair et } P \text{ polynôme à plusieurs variables}\}$$

Algèbre extérieure.
C'est l'algébre notée $\mathcal{E}V$ définie par : $\mathcal{E}V = TV/\mathcal{I}$ où $\mathcal{I}$ est le sous idéal de V engendré par les éléments de la forme $v \otimes w + w \otimes v$ s'appelle l'algébre extérieure de V. En particulier

$$\mathcal{E}V^{\text{impair}} = \{y_{i_1} \ldots y_{i_n} \text{ tel que } n \in \mathbb{N}^*, \deg y_i \text{ impair}\}$$

Remarques.
– Si $\deg v$ est impair, alors $v^2 = 0$ en particulier $\wedge v = \mathbb{K}_1[v]$.
– Si $\deg v$ est pair, alors $\wedge v = \mathbb{K}[v]$.
– $\wedge(V \oplus W) = \wedge V \otimes \wedge W$. En particulier si $(v_i)_{i \in I}$ base de V, alors :

$$\wedge V = \bigotimes_{i \in I} \wedge v_i \text{ et surtout } \wedge V = \wedge V^{\text{pair}} \otimes \wedge V^{\text{impair}}$$

- $\wedge V = \{P(x_{i_1}, \dots x_{i_n})y_{j_1}, \dots y_{j_q}$ tel que $\deg x_i$ pair et $\deg y_j$ impair et $P \in \mathbb{K}[X_1, \dots X_n]\}$.
- Toute application linéaire de degré nulle de V vers une agc se prolonge de façon unique en morphisme d'agc de $\wedge V$ vers A.
- Toute application linéaire de V vers $\wedge V$ se prolonge de façon unique en une dérivation sur $\wedge V$.

Modèle minimal.
On dit que $(\wedge V, d)$ est un modèle minimal fini *si et seulement si* :
- $\dim V < +\infty$.
- Il existe une base $(x_1, \dots, x_n)$ tel que $\deg x_1 \leq \dots \deg x_n$ et vérifiant $dx_i \in \wedge(x_1, \dots, x_{i-1})$ pour tout $i \in \{1, \dots n\}$.

Modèle minimal elliptique.
Un modèle minimal $(\wedge V, d)$ est dit elliptique *si et seulement si*
- $\dim H^*(\wedge V, d) < +\infty$.
- $dx_1 = 0$ et $dx_i \in \wedge^{\geq 2}\{x_1, \dots x_{i-1}\}$.

Modèle pur.
Un modèle minimal $(\wedge V, d)$ est dit pur *si et seulement si*
- $dV^{\text{pair}} = 0$.
- $dV^{\text{impair}} \subset V^{\text{pair}}$.

Modèle hyperelliptique.
Un modèle minimal $(\wedge V, d)$ est dit hyperelliptique *si et seulement si* $dV^{\text{pair}} = 0$ et $dV^{\text{impair}} \subset \wedge^+ V^{\text{pair}} \otimes dV^{\text{impair}}$. Sulivan à énoncé le résultat suivant :
Toute adgc (A, d_A) telle que $H^0(A, d_A) = \mathbb{Q}$ admet un modèle minimal unique à isomorphisme prés.
Et puis a construit pour chaque espace topologique, X, connexe par arc un modèle minimal $(\wedge V, d)$, c'est celui de $(A_{PL}(X), d)$. si de plus l'espace toplogique est 1-connexe et elliptique, alors
$$V^n \equiv \pi_n(X) \otimes \mathbb{Q}$$

2.3 Invariant d'Euler-Poincaré.

La caractéristique d'Euler . Elle est définie pour tout module gradué, V à l'aide de la relation :
$$\chi(V) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \dim V^k$$

L'invariant cohomologique d'Euler-Poincaré . Elle est définie pour tout espace topologique, X à l'aide de la relation :

$$\chi_c(X) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \dim H^k(X, \mathbb{Q})$$

L'invariant homotopique d'Euler-Poincaré. Elle est définie pour tout espace topologique,

X à l'aide de la relation :

$$\chi_\pi(X) = \sum_{k\geq 0}(-1)^k \dim(\pi_k(X)\otimes \mathbb{Q})$$

En particulier, pour un espace toplogique est 1-connexe et elliptique, dont le modèle minimal associé est $(\wedge V, d)$ on a :

$$\chi_c(X) = \chi(\wedge V, d) \quad \text{et} \quad \chi_\pi(X) = \chi(V)$$

Les résultats les plus importants, toujours pour un espace toplogique est 1-connexe et elliptique sont les suivants :
– Le théorème de Cartan :

$$\chi_\pi(X) = 0 \quad \textit{si et seulement si} \quad \chi_c(X) > 0 \quad \textit{si et seulement si} \quad H^{impair}(\wedge V, d) = 0$$

– $\chi_\pi(X) = 0 \Longrightarrow X$ pur.
– Si X est pour, alors $rk_0(X) = -\chi_\pi(X)$.

3 Cas ou le problème a été resolu.

La conjecture (H) est vrai si :

1) X est un H-espace[1], CW-complexe, 1-connexe elliptique.

2) Si X est un espace hyperelliptique dans les cas suivants :
- X pur.
- $\dim(\pi_{\text{pair}} \otimes \mathbb{Q}) \geq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-12\chi_\pi(X) - 15})$.

3) Si X est hyperelliptique tel que : $rk_0(X) + \chi_\pi(X) \in \{0, -1, -2\}$.

4) Si X est un espace elliptique 1-connexe de dimension formelle[2] inférieur à 10.

5) Si X est un espace elliptique 1-connexe de codimension[3] inférieur à 6.

4 Perspectives.

Soit X un espace elliptique rationnel, 1-connexe tel que $\pi_{\text{pair}} \otimes \mathbb{Q} = 0$, et $(\wedge V, d) = \wedge(\{y_1, \ldots y_n\}, d)$ le modèle minimal associé, on pose $A_i = H^*(\wedge\{y_1, \ldots, y_i\}, d)$ et

$$\begin{array}{rccc} \delta_i : & A_{i-1} & \longrightarrow & A_{i-1} \\ & \beta & \longmapsto & \alpha_i \beta \end{array} \qquad \text{où } \alpha_i = [dy_i]$$

La conjecture (H) est vérifiée si

$$\dim(\mathrm{Ker}\delta_i) > \dim(\mathrm{Im}\delta_i) \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

$\boxed{\text{Fin.}}$

1. muni d'une multiplication interne $\mu : X \otimes X \longrightarrow X$ telle que les applications $x \mapsto \mu(x, *)$ et $x \mapsto \mu(*, x)$ soient homotopes à l'identité
2. On rappelle que la dimension formelle d'un espace vectoriel gradué A fini est l'entier naturel $fd(A) = \max\{k \in \mathbb{N} \text{ tel que } A^k \neq 0\}$ et que pour un espace topologique elliptique, X elle est définie par la relation $fd(X) = fd(H^*(X, \mathbb{Q}))$
3. On rappelle que la codimension d'un CW-complexe fini, notée $\mathrm{codim}(X)$ est définie par la relation $\mathrm{codim}(X) = fd(X) - rk_0(X)$