Table des matières

Chapitre 1
Groupe fondamental d'homotopie

Dans tout le chapitre X désigne unn espace topologique.

1.1. Opérations sur les chemins:

Composée de deux chemins : Soient γ et γ' on appelle composé de γ avec γ', le chemin noté $\gamma\gamma'$ définit par :

$$\begin{aligned} \gamma\gamma' &= \gamma(2t) && \forall t \in [0, \tfrac{1}{2}] \\ &= \gamma'(2t-1) && \forall t \in [\tfrac{1}{2}, 1] \end{aligned}$$

Chemin inverse : On définit le chemin inverse de γ, noté $\overline{\gamma}$ par :

$$\overline{\gamma}(t) = \gamma(1-t) \quad \forall t \in [0,1]$$

1.2. Homotopie entre chemins:

Définition : Deux chemins γ et γ' de mêmes extremités et origines sont dits homotopes si et seulement si ils le sont relativement par rapport à 0 et 1.
On définit ainsi une relation d'équivalence entre les chemins joignant deux points de X donnés, compatible avec la composée et inverse de chemins, dont les classes d'équivalence seront appelés les classes d'homotopie et sur lesquels on peut donc définir une composition qui plus encore est associative et pour laquelle les chemins constants sont homotopiquement neutres, et où chaque chemin composé avec son inverse est homotopiquement neutre.
L'ensemble de toutes les classes d'homotopie présente alors une structure semblable à celle d'un groupe, on l'appelle *groupoide fondamendal* ou *groupoide de Poincaré*, de X.

1.3. Groupe fondamental:

Lacet : On rappelle qu'un lacet de base $x \in X$ est un chemin fermé, d'origine x et d'éxtremité x.
Définition : L'ensemble noté $\pi_1(X, x)$ des classes d'homotopies de lacets de base x est un groupe, appelé *groupe fondamendal* ou *groupe de Poincaré*, de X au point x.
Remarque : Si x et y sont dans une même composante connexe de X, alors $\pi_1(X, x) \cong \pi_1(X, y)$, en particulier, si X est connexe par arc on ne fait plus référence au point de base, et on parle du groupe fondamental de X, qu'on note tout simplement $\pi_1(X)$.

1.4. Compatibilité entre classes d'homotopie et applications continues:

Soit $f : X \to Y$ continue et γ un chemin joignant x_1 et x_2 dans X, alors le chemin noté f_γ défini par $f_\gamma(t) = fo\gamma(t)$ est un chemin dans Y qui joigne $f(x_1)$ et $f(x_2)$. Cette composé entre chemins et applications continues est compatible avec l'homotopie des chemins ($[\gamma] = [\gamma'] \implies [f_\gamma] = [f_{\gamma'}]$), et induit un morphisme entre les groupes fondamentaux défini par :

$$\begin{array}{rccc} f_* : & \pi_1(X, x) & \longrightarrow & \pi_1(Y, f(x)) \\ & [\gamma] & \longmapsto & [f_\gamma] \end{array}$$

Propriétés :

1. $(id_X)_* = id_{\pi_1(X,x)}$.
2. Si $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, alors $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.
3. Si f est un homémorphisme, alors f_* est un ismorphisme avec $(f_*)^{-1} = (f^{-1})_*$.
4. Si f est une équivalence d'homotopie alors f_* est un isomorphisme. En particulier deux espaces connexes par arcs ayant même type d'homotopie ont des groupes fondamentaux isomorphes.
5. Le groupe fondamental de tout espace contractile est trivial.
6. $\pi_1(S^n, e) \cong \mathbb{Z}$ et $\pi_1(T^n) \cong \mathbb{Z}^n$.
7. $\pi_1(SO(2, \mathbb{R}), e) \cong \mathbb{Z}$ et $\pi_1(SO(m, \mathbb{R}), e) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad \forall m \geq 3$.

FIN DU CHAPITRE