Contents

1ère chapitre
Homologie et cohomologie

1.1. Algébre d'homologie.

Definition : Un complexe de chaines est une suite de modules $(C_n)_{n\in N}$ et de morphismes de modules $\partial_n : C_{n+1} \to C_n$ tels que $\partial_n o \partial_{n+1} = 0$. Autrement dit Im$\partial_{n+1}$ $\subset$Ker∂_n. les morphismes ∂_n sont en général notés ∂, sans indice et appelés morphismes ou opérateurs de bord, et $(C = \oplus_{n\in N} C_n, \partial)$ désignera aprés les complexes de chaines

Remarque : Si Im∂_{n+1} =Ker∂_n, la suite est dite exacte longue.

Definition : Un morphisme de complexes de chaines $\phi : (C, \partial) \to (D, \partial')$ est une suite de morphismes de modules $\phi_n : C_n \to D_n$ telle que $\phi_n o \partial_{n+1} = \partial'_n o \phi_{n+1}, \forall n \in N$. autrement dit tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccccc} C_0 & \overset{\partial}{\leftarrow} & C_1 & \overset{\partial}{\leftarrow} & C_n & \overset{\partial}{\leftarrow} & C_{n+1} \\ \downarrow \ \phi_0 & & \downarrow \ \phi_1 & & & & \\ D_0 & \overset{\partial'}{\leftarrow} & D_1 & \overset{\partial'}{\leftarrow} & D_n & \overset{\partial'}{\leftarrow} & D_{n+1} \end{array}$$

Remarque : On peut définir d'une façon naturelle la composée de deux morphismes de chaines, ainsi que le morphisme identité.

Vocabulaire : Si (C, ∂) est un complexe de chaines les sous module de C_n, $Z_n(C)$ =ker∂_{n-1} s'appelle l'espace des *n- cycles* et $B_n(C)$ =Im∂_n celui des *n-bords* et le module quotient $H_n(C) = Z_n(C)/B_n(C)$ est appelé $n^{éme}$*groupe d'homologie* de C, et enfin on notera $H(C) = \oplus_{n\in N} H_n(C)$.

Remarque : Un morphisme de complexes de chaines envoie cycles sur cycles et bords sur bords en chaque degré donc induit pour tout entier un morphisme de modules sur les groupes d'homologie en posant $f_*[x] = [f(x)]$ pour tout cycle x.

Definition : Soient $\phi, \psi : C \to D$ deux morphismes de complexes de chaines. Une homotopie entre eux est une suite de morphismes de modules $\gamma : C_n \to D_{n+1}$ telle que $\forall n \in N$ on a : $\phi - \psi = \gamma + \gamma o \partial$

Le diagramme suivant n'est pas commutatif mais il donne une idée du sens des fléches.

$$\begin{array}{ccccc} C_{n-1} & \longleftarrow & C_n & \leftarrow & C_{n+1} \\ & \searrow \gamma & \varphi \downarrow \psi & \searrow \gamma & \\ D_{n-1} & \leftarrow & D_n & \leftarrow & D_{n+1} \end{array}$$

Proposition : Si deux morphismes de complexes de chaines sont homotopes alors ils induisent le même morphisme en homologie.

Preuve : Si x est un cycle de C, alors $\phi(x) - \psi(x) = \partial\gamma(x) + \gamma o \partial(x) = \partial y$ avec $y = \gamma(x)$, d'où $[\phi(x)] = [\psi(x)]$, donc $\phi_*[(x)] = \psi_*[(x)]$.

Definition : Une suite exacte courte de complexes de chaines est la donnée de complexes de chaines (C, D, E) et de morphismes de complexes de chaines $f : C \to D, g : D \to E$ tels que pour tout n la suite de morphismes de modules $0 \to E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \to 0$ soit exacte, c'est à dire : f injective, g surjective avec Imf =Ker$g$.

Théorème Soit $f : C \to D, g : D \to E$ une suite exacte courte de complexes de chaines, alors il existe une suite exacte longue de modules

$$\ldots H_{n+1}(E) \xrightarrow{\delta} H_n(C) \xrightarrow{f_*} H_n(D) \xrightarrow{g_*} H_n(E) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(C) \ldots$$

Preuve : Construisons tout d'abord le morphisme $\delta : H_n(E) \to H_{n-1}(C)$. Soit z un n-cycle de E, on désire lui associer un n-cycle x de C et un seul modulo un bord. Comme g_n est surjective il existe $y \in D_n$ tel que $g_n(y) = z$, d'autre part $\partial y \in D_{n-1}$ et $g_n(\partial y) = \partial g_n(y) = \partial z = 0$, donc, par exactitude $\partial y \in$Kerg_n =Imf_{n-1}, il existe donc $x \in C_{n-1}$ tel que $f_{n-1}(x) = \partial y$. On pose alors $\delta[z] = [x]$.

Vérifions maintenant que δ est bien défini.
Tout d abord x est bien un cycle car $f_{n-2}(\partial x) = \partial f_{n-1}(x) = \partial\partial y = 0$, or f_n est injective par exactitude, d'où $\partial x = 0$.
D'autre part $[x]$ ne dépend pas des choix de z dans $[z]$ ni des éléments y, x qui interviennent dans la construction ci dessus. En effet soit z', y', x' un autre choix, alors $[z'] = [z], g(y') = z', f(x') = y'$, on ôte les indices sans crainte de perdre la généralité. donc $\exists z" \in E$ tel que : $z - z' = \partial z''$ et soit $y" \in D$ tel que : $z'' = g(y")$, il existe grace à la surjection de g dûe à l'exactitude. Donc $g(y - y' - \partial y") = z - z' - g(\partial y'') = z - z' - \partial g(y") = z - z' - \partial z = 0''$, en utilisant l'exactitude encore une fois au niveau de D, soit $x" \in C$ tel que : $y - y' - \partial y'' = f(x")$, alors $f(x - x' - \partial x") = \partial y - \partial y' - \partial f(x'') = \partial\partial y" = 0$, or f est injective, d'où $x - x' - \partial x" = 0$, et donc $[x] = [x']$.

Vérifions maintenant l'exactitude de la suite au niveau de $H_n(D)$, c'est à dire Imf^* =Kerg^*. On sait que $g_* o f_* = (gof)_0$, d'où Im$f_* \subset$ ker g_*. Réciproquement soit y un cycle tel que : $[y] \in$kerg_*,d'où $0 = g_*([y]) = [g(y)]$ et donc $g(y)$ est bord, soit $z \in E$ tel que : $g(y) = \partial z$ et soit $y' \in C$ tel que : $z = g(y')$, il existe puisque g est surjective, donc $g(y - \partial y') = 0$, car g commute avec ∂, d'aprés l'exactitude $y - \partial y' \in$Imf, soit donc $x \in C$ tel que : $y - \partial y' = f(x)$, donc $[y] = [f(x)]$. D'autre part $f(\partial x) = \partial f(x) = \partial y - \partial\partial y' = 0$ car y cycle, et donc comme f est injective alors x est un cycle et donc $f_*[x] = [f(x)] = [y]$, d'où $[y] \in$Imf_*.

Vérifions ensuite l'exactitude au niveau de $H_n(E)$, c'est à dire montrons que Img^* =kerδ. Si y est un cycle de D, posons $z = g(y)$ et $x \in E$ tel que : $[x] = \delta[z]$, donc par construction de δ on a $f(x) = y$ Comme y est un cycle et f injective , d'où $x = 0$ et donc $\delta o g_*[y] = \delta[g(y)] = \delta[z] = [x] = 0$, d'où $\delta o g_* = 0$ et donc Im$g^* \subset$kerδ.

Réciproquement montrons que ker$\delta \subset$Img_*. Soit z un cycle de E tel que $\delta[z] = 0$, $\quad x \in C, y \in D$ construits comme précédement tels que $z = g(y)$ et $f(x) = \partial y$ donc $[x] = \delta[z] = 0$, d'où x est un bord, soit $x' \in C$ tel que $x = \partial x'$ et $y' = y - f(x')$, donc $g(y') = y = z$ car $gof = 0$ en raison de l'exactitude de la suite courte, en plus $\partial y' = \partial y - \partial f(x') = \partial f(x) - f(\partial x') = 0$, donc y' est un cycle de D, donc $g_*[y] = [g(y)] = [z]$, d'où $[z] \in$Img_*.

Et de même on vérifie l'exactitude au niveau de $H_n(E)$, c'est à dire montrer que $\operatorname{Im}\delta = f_*$. En effet, avec les notations précédentes $f_*(\delta[z]) = f_*[x] = [f(x)] = [\partial y] = 0$.

1.2. Caractéristique d'Euler Poincaré d'un complexe de chaines

Dans cette partie on suppose que A est un corps Soit C un complexe de chaines. On note b_k la dimension sur A de l'espace vectoriel $H_k(C)$ qui s'appelle le *k-éme nombre de Betti* de C. Si C est de type fini, c'est à dire si les k sont finis pour tout k et nuls pour k assez grand alors on pose

$$\chi_C(X) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k b_k$$

que l'on appelle *la caractéristique homologique d'Euler Poincaré* de C.

Proposition Si C est complexe de chaines de type fini alors :

$$\chi_C(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \dim A(C_k)$$

Preuve On a $\partial_k : C_k \to C_{k-1}$, donc $Z_k(C) = \operatorname{Ker} \partial_k, B_k(C) = \operatorname{Im} \partial_{k+1}$, d'aprés la formule du rang on a $\dim C_k = \dim Z_k(C) + \dim B_{k-1}(C)$, or $b_k = \dim Z_k(C) - \dim B_k(C)$, donc $\dim C_k - b_k = -(\dim B_k + \dim B_{k-1})$, d'où $\sum_{k=0}^{+i} (-1)^k \dim C_k - \chi_C(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k+1} (\dim B_k + \dim B_{k-1}) = \dim B_0 + \dim B_{-1} - \dim B_1 + \dim B_2 + \ldots = 0$, car la somme alternée avec la convention $C_{-1} = 0$ et vu que la suite $\dim B_k$ est nulle à partir d'un certain rang.

1.3. Complexes de cochaines cohomologie suite exacte longue de cohomologie

Un *complexe de cochaines* (C^*, d) est une suite de modules $(C^n)_{n\in\ N}$ et de morphismes de modules $d_n : C^n C^{n+1}$ tels que $d^{n+1} o d^n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Les f^n sont appelés morphismes de *cobord* ou *différentielles*.

On définit de même

un *morphisme de complexes de cochaines* $\phi : C^* \to D^*$ qui est une suite de morphismes de modules $\phi^n : C^n \to D^n$ tels que $\phi o d = d o \phi$.

l'espace des *n–cocycles* $Z^n(C^*) = \operatorname{Ker} d^n$

l'espace des *n–cobords*, $B^n(C^*) = \operatorname{Im} C^{n-1}$

le *n–ème groupe de cohomologie* de C^* qui est un module par $H^n(C) = Z^n(C) \diagup B^n(C)$

l'application $f^* : H^n(D) \to H^n(C)$ induite en cohomologie par un morphisme de complexes de cochaines $f : C \to D$ par $f^*[z] = [f(z)]$ si z est un n-cocycle de D.

FIN DU CHAPITRE