Chapitre 1

Homotopie

Table des matières

1.1. Type d'homotopie:

Définition : Soit X et Y deux espaces topologiques, on dit que deux applications $f, g : X \to Y$ continues sont homotopes si et seulement si elle existe $\gamma : X \times I \to Y$ continue telle que : $\gamma(x, 0) = f(x), \gamma(x, 1) = g(x) \quad \forall x \in X$ où I designera dans tout le chapitre l'intervalle $[0, 1]$.
Autrement dit : il existe un chemin dans $\mathcal{C}(X, Y)$, d'origine f et d'éxtremité g. On définit ainsi une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}(X, Y)$.

Terminologie : Le mot "homotopie" signifie à peu prés ressemblance des lieux.

Définition : Les espaces X et Y sont dits de même type d'homotopie si'ils existent deux applications continues $f : X \to Y, g : Y \to X$ telles que fog et gof sont homotopes respectivement à id_Y et id_X. On dit alors que f est une homotopie d'équivalence de X vers Y et que g l'est de Y vers X.
On définit ainsi une relation d'équivalence sur les espaces topologiques.

1.2. Espaces contractiles:

Définition : Un espace est dit contractiles si et seulement si il est de même type d'homotopie qu'un singleton.

Remarques :
- Tout espace contractile est connexe par arcs.
- Un espaces X est contractile si et seulement si id_X est homotope à une application constante.

1.3. Homotopie relative:

Définition : Soit A un sous espace de X, deux application $f, g : X \to Y$ qui coincident sur A sont

homotopes relativement à A si et seulement si elle existe $\gamma : X \times I \to Y$ homotopie de f vers g telle que : $\gamma(x,t) = f(x) = g(x) \quad \forall x \in A$.
Ceci permet encore de définir une relation d'équivalence sur les applications continues qui coincident sur A.

1.4. Contraction et rétraction:

Définition : Une contraction de X est la donnée d'une application continue surjective de X vers l'un des ses sous espaces.

Remarque : Tout application continue de X dans lui même se factorise canoniquement à l'aide d'une contraction comme le montre le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\widehat{f}} & f(X) \\ & f \searrow & \downarrow i \\ & & X \end{array}$$

On a alors tendance à confondre l'application continue f avec la contraction $\widehat{f}$.

Définition : Une contraction $r : X \to A$ est dite progressive si elle est homotope à id_X relativement à A.

Remarques :
- Toute contraction progressive $r : X \to A$ est une équivalence d'homotopie d'inverse homotopique l'injection canonique $i : A \to X$. Autrement dit X et son sous-espace A ont le même type d'homotopie.
- Un espace X est contractile si et seulement si il existe une contraction progressive de X vers l'un des ses points.

Définition : Une contraction $r : X \to A$ est dite rétraction lorsque $r_{\restriction A} = id_A$. Si de plus elle homotope à id_X relativement à A on dit alors qu'elle est progressive.
X est dit rétractile si elle existe une rétraction progressive de X vers l'un de ses points.

Remarque : Tout espace rétractile est contractile.

FIN DU CHAPITRE