ROYAUME DU MAROC

Faculté des sciences Ben Msick
Université Hassan II-Casablanca

Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

La conjecture (H)
sur une minoration de la dimension cohomologique

MÉMOIRE DE DESA

2003-2005

Soutenue par : Mr Mamouni My Ismail
Encadré par : Mr Hilali Mohammed Rachid

.

Remerciments.

Mr A. Rochdi me fait le trés grand honneur d'accepter la présidence de ce jury, qu'il me soit permis de lui exprimer ma profonde gratitude et reconnaissance pour son soutien durant les deux années de cette DESA.
Mr M.R. Hilali m'a invité à la théorie de la toplogie algébrique, sans son aide précieux, sa trés grande disponibilité, ses encouragements et son extrême gentillesse et surtout j'ajouterai sa grande modestie vu l'expert qu'il est, je ne pourrai jamais avancer dans cette discipline. Qu'il trouve ici l'expression de ma plus grande reconnaissance pour m'avoir encadré dans ce travail.
Ma reconnaissance va également à Mme H. Hamraoui et à Mr A. Awane pour l'honneur qu'ils m'apportent en acceptant de faire partie du jury.

Devant le jury :

Président :	**Mr. A. Rochdi**
	Professeur à la faculté des sciences Ben Msick
Examinateur :	**Mr A.Awane**
	Professeur à la faculté des sciences Ben Msick
Examinateur :	**Mme. H. Hamraoui**
	Professeur habilité à la faculté des sciences Ain Chock
Rapporteur :	**Mr. M.R. Hilali**
	Professeur à la faculté des sciences Ain Chock

.

Table des matières

1 Aperçu historique. **3**
- 1.1 Poincaré le pionnier. 3
- 1.2 Cartan la continuité. 5
- 1.3 Des arguments de connexité à la notion de bord. 6
- 1.4 Du bord topologique à son algébrisation. 7
- 1.5 La formulation axiomatique de l'homologie relative. 8
- 1.6 De l'homologie à l'homotopie. 9
- 1.7 Mot de fin. 10

2 Catégories et foncteurs. **11**
- 2.1 Catégories. 11
- 2.2 Foncteurs. 11

3 Outils élémentaire. **12**
- 3.1 Module graduée. 12
- 3.2 Foncteur Hom. 12
- 3.3 Produit tensoriel. 12
- 3.4 Différentielle. 13
- 3.5 Algèbre graduée. 13
- 3.6 Algèbre tensorielle. 13
- 3.7 Algébre libre. 14
- 3.8 CW-complexes. 15

4 Homologie et cohomologie. **18**
- 4.1 Introduction 18
- 4.2 Algébre d'homologie. 18
- 4.3 Complexes de cochaines cohomologie suite exacte longue de cohomologie . . 21
- 4.4 Homologie simpliciale. 21
- 4.5 Homologie singulière. 23

5 Homotopie. **25**
- 5.1 Type d'homotopie. 25

5.2 Equivalence d'homotopie faible. 26
5.3 Modèle cellulaire. 26
5.4 Morphisme d'Hurweicz. 26
5.5 Homotopie relative. 27
5.6 Espaces contractiles. 27
5.7 Opérations sur les chemins. 28
5.8 Homotopie entre chemins. 28
5.9 Groupe fondamental. 28
5.10 Compatibilité entre classes d'homotopie et applications continues. 28

6 Fibration. **30**
6.1 Vocabulaire. 30
6.2 Espaces de Moore. 31

7 Modèle minimal de Sullivan. **33**
7.1 Introduction. 33
7.2 Objet simplicial dans une catégorie $\mathcal{C}$. 33
7.3 Exemple. 33
7.4 Construction de $A(\mathcal{K})$. 34
7.5 Construction de $A_{PL}(X)$. 34

8 Suites spectrales. **36**
8.1 Introduction. 36
8.2 Construction de la suite spectrale. 36

9 Théorème de Cartan. **38**
9.1 Définitions préliminaires. 38
9.2 Exemple fondamental. 38
9.3 Énoncé 39
9.4 Démonstration. 39

10 La conjecture (H) de la dimension cohomologique. **43**

Bibliographie **45**

Index **46**

.

1 Aperçu historique.

1.1 Poincaré le pionnier.

C'est dans un article [13] de 1895 que *Poincaré* définit pour la première fois sur les variétés diffrentielles, des chaines , ou sous-variétés qu'il qualifie d'homologues. Sa définition était assez imprécise, mais la notion qu'il utilisait recouvrait exactement l'acceptation actuelle :

deux chaines fermées sont homologues si leur différence est un bord.

Cependant, le texte de *Poincaré* ne faisait pas apparaitre de cohomologie. La raison en est que sur une variété on peut, par dualité de *Poincaré* ramener complètement la cohomologie à l'homologie.
Les travaux de Poincaré ne restèrent pas inaperçus, mais ne furent pas repris avant les années 1920. Durant les vingtaines d'années qui suivirent différentes théories cohomologiques plus ou moins générales et plus ou moins concurrentes émergèrent, simpliciale, singulière, cellulaire,...
Le passage de l'homologie à la cohomologie était au départ une tentative de généralisation de la *dualité de Poincaré*. De manière trés surprenante les structures multiplicatives présentes sur les variétés différentiables se transposent trés bien dans des situations plus abstraites en cohomologie, ce que l'homologie ne permet pas du tout.

Fig. 1 – *H. Poincaré.*

Les années 1940 virent l'apparition de l'algèbre homologique. Celle-ci contribua largement à l'apparition des notions de catégorie et de foncteur omniprésentes en algèbre et en logique

par la suite. L'invention de la cohomologie des faisceaux par *Leray* a eu le même succés dans toute la géométrie algébrique.
Diverses généralisations ont été imaginées : cohomologie des groupes, avec des connexions surprenantes avec la géométrie, cohomologie bornée, cohomologie équivariante, cohomologie étalée ce qui montre si besoin était que les notions cohomologiques se sont largement répandues dans presque toutes les mathématiques, et parfois jusqu'à la physique théorique.
Le principe de l'homologie est d'associer à un objet topologique, géométrique ou algébrique,... des invariants pour cetains types de transformations : homéomorphismes, homotopismes, holomorphismes, isomorphismes,... C'est à dire que l'on a un foncteur

$$H : \left\{ \begin{array}{c} \text{catégorie des objets étudiés} \\ \text{morphismes considérés} \end{array} \right\} \rightsquigarrow \{ \text{ Catégorie plus sympathique } \}$$

Historiquement l'homologie vient de l'étude de la topologie algébrique pour expliquer certains nombres qui apparaissaient naturellement en topologie : par exemple : donner $2n$ coups de ciseaux à un tore à n trous pour qu'il soit homéomorphe à une feuille de papier. Ici les coups de ciseau symbolisent les lacets le long desquels on a executé la manoeuvre de coupe.
Deux coupes seront équivalentes (elles auront les mêmes effets sur l'espace ambiant à homéomorphisme prés) si l'on peut passer continument du lacet de la première à celui de la seconde. Les classes d'équivalence des lacets passant par un point donné peuventt être munies d'une structure de groupe en composant les lacets a et b en empruntant d'abord le chemin a puis b. en fait ce groupe est engendré par $2n$ lacets fondamentaux, par exemple si $n = 1$ il y a le lacet qui fait le tour du trou central. Si on fait une coupe on obtient une couronne. Le second lacet correspond à une coupe radiale de cette couronne. Cela donne bien un rectangle à la fin. on voit que des classes d'équivalence d'objets compliqués comme les lacets donne une information sur des propriétés fondamentales de l'espace comme le nombre de 'trous'.
Lorque l'on fait des mathématiques, on rencontre souvent des problèmes de classification. Etant donné une relation d'équivalence raisonnable sur un ensemble d'objets intéressants (e.g., des fonctions analytiques, des graphes, des noeuds, etc.), on essaie de déterminer les classes d'équivalence des objets selon la relation donnée. Ce genre de problème s'avère en général difficile à résoudre. Il faut donc trouver des astuces pour faciliter la tache.
Le but de la topologie algébrique est de résoudre des problèmes topologiques, dont la classification des espaces topologiques, en les transférant dans un cadre algébrique. Il y a deux relations d'équivalence raisonnables à considérer dans ce contexte.
D'abord, deux espaces topologiques X et Y sont topologiquement équivalents, que l'on note $X \cong Y$, s'il existe un homéomorphisme $h : X \longrightarrow Y$. Un invariant topologique I associe à tout espace un truc algébrique (e.g., groupe, polynôme, matrice, etc.) d'un type fixe, de telle manière à ce que

$$X \cong Y \Longrightarrow I(X) = I(Y).$$

L'invariant I est parfait si, de plus,

$$I(X) = I(Y) \Longrightarrow X \cong Y.$$

En general les invariants sont loin d'être parfaits. Mais nous savons au moins que

$$I(X) \neq I(Y) \Longrightarrow X \not\cong Y.$$

Nous pouvons donc utiliser un invariant topologique comme une espèce de papier tournesol, qui ne nous dit pas tout, mais qui nous permet au moins de faire un premier tri.
La topologie algébrique est la construction et l'étude de foncteurs de la catégorie des espaces topologiques à valeurs dans celle des groupes (ou des modules sur un anneau). Le but est de classer (ou au moins comprendre), par exemple à homéomorphisme près, les espaces topologiques (au moins dans certaines familles) en leur associant des invariants de nature algébrique (nombre entiers, groupes, anneaux, etc).
Les vrais débuts de l'homologie peuvent être attribués à *H. Poincaré* , quand la topologie algébrique s'appelait l'"analysis situs". Partant des travaux antérieurs sur les notions de "connexité", il a mis en évidence le concept de "bord", qui joue un rôle central en homologie.
Les travaux d'*Euler* (1736, cas des graphes), de *Möbius* (1865, cas des surfaces) et de *Riemann* (1857)–*Betti* (1871) montrent que des arguments de connexité peuvent permettre de distinguer des espaces topologiques.

1.2 Cartan la continuité.

Henri Cartan aura 101 ans le 8 juillet 2005. Fils du grand mathématicien *Elie Cartan*, membre fondateur de *Nicolas Bourbaki*, *Henri Cartan* est l'un des principaux mathématiciens français du 20ème siècle. En charge de l'enseignement des mathématiques à l'ENS de 1940 à 1965, il a joué un rôle essentiel dans le développement de l'école mathématique française de l'après- guerre.

Fig. 2 – H. Cartan à 20ans

Il a ainsi formé, directement ou indirectement, plusieurs générations de normaliens. Les célèbres *Séminaires Cartan* - quinze éditions rédigées de 1948 à 1964 - ont eu une importance fondamentale dans le développement de sujets tels que la théorie des faisceaux, les variétés de *Stein*, les espaces analytiques, la topologie algébrique et la géométrie algébrique.
Ils ont en particulier ouvert la voie aux travaux de *Serre* (médaille *Fields* 1954, *Prix Abel* 2003) et de *Grothendieck* (médaille *Fields* 1966). Une partie importante des travaux de *Henri Cartan* concerne les fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, la topologie algébrique et l'algèbre homologique. Parmi les contributions fondamentales de *Cartan* dans le premier domaine, on peut citer : l'introduction de la notion de convexité holomorphe dans l'étude des domaines d'holomorphie, l'utilisation de la théorie des faisceaux dans l'étude des fonctions analytiques de plusieurs variables, l'introduction de la notion de cohérence et les fameux théorèmes A et B, le concept général d'espace analytique.

FIG. 3 – *H. Cartan* à 70ans

En topologie algébrique, *Cartan* est à l'origine, avec *Serre* , de l'utilisation de la suite spectrale associée aux espaces fibrés pour le calcul de groupes d'homotopie. Son calcul explicite des algèbres d'*Eilenberg-MacLane* constitue également une étape historique du développement de la topologie algébrique moderne. *Cartan* a aussi été le premier à utiliser systématiquement la cohomologie des faisceaux introduite par *Leray*, pratique qui nous semble si naturelle aujourd'hui ! Un apport particulièrement essentiel de *Cartan* concerne l'algèbre homologique, sujet qu'il créera avec *Samuel Eilenberg* dans une monographie de quatre cents pages "Homological Algebra" parue en 1956. Cette théorie, qui englobe dans un cadre général diverses théories particulières en les plaçant dans le cadre général des foncteurs dérivés, a servi de catalyseur au fantastique développement de la géométrie algébrique dans les années 60 par *A. Grothendieck* à la suite de *Serre* et à la création d'un univers nouveau, qui est encore pour une bonne part celui dans lequel les mathématiciens travaillent aujourd'hui. Profondément meurtri par la deuxième guerre mondiale, *Cartan* travaille dès l'immédiat après-guerre au développement des relations scientifiques entre mathématiciens français et allemands, en européen convaincu, artisan de la première heure de la construction européenne. Militant des droits de l'homme, il participa, avec L. *Schwartz* et *M. Broué*, à la création du Comité des mathématiciens, qui oeuvra pour la libération de mathématiciens injustement emprisonnés à travers le monde par des régimes totalitaires.

1.3 Des arguments de connexité à la notion de bord.

La connexité est un invariant topologique, au sens que l'image d'un connexe par une application continue est connexe (et donc si deux espaces topologiques n'ont pas le même nombre de composantes connexes, alors ils ne sont pas homéomorphes). Nous avons d'ailleurs que le 0-ème groupe d'homologie $H_0(X)$ d'un espace topologique X est le groupe abélien libre engendré par l'ensemble des composantes connexes par arcs de X. L'information apportée par $H_0(X)$ est donc essentiellement celle d'un nombre, le cardinal de l'ensemble des composantes connexes par arcs de X.
Parmi les arguments dit de connexité, il n'y a pas que le nombre de composantes connexes. Par exemple, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes, car $\mathbb{R}^2$ privé d'un point est connexe, mais $\mathbb{R}$ privé d'un point ne l'est pas. Les espaces S^1 (le cercle) et S^2 (la sphère) ne sont pas homéomorphes, car S^2 privé de deux points est connexe, mais S^1 privé de deux points ne l'est pas. Les espaces S^2 (la sphère) et $T^2 = S^1 \times S^1$(le tore) ne sont pas homéomorphes. En effet, S^2 privéde n' importe quelle courbe fermée simple n' est pas connexe (c'est le théorème de Jordan). Mais il existe au moins une courbe fermée simple γ dans T^2 telle que $\mathrm{T}^2 \setminus \gamma$ est connexe (par exemple $\gamma = \{1\} \times S^1$).
Pour généraliser (abstraire !) ces exemples élémentaires, il faut tout d'abord définir une classe d'objets sur laquelle pourra s'appliquer une généralisation. Les espaces topologiques comme les sphères S^n et tores $T^n = (S^1)^n$ ressemblent vus de près à $\mathbb{R}^n$. Une variété topologique de

dimension n est un espace topologique (en général supposé métrisable séparable) dans lequel tout point possède un voisinage homéomorphe à l'espace topologique usuel $\mathbb{R}^n$. Une sous-variété (topologique) V' d'une variété V est un sous-espace qui est une variété topologique. Si V' est de dimension p, sa codimension dans V est $n-p$.
Ainsi *Riemann* et *Betti* définissent l'ordre de connexion d'une variété compacte connexe V comme le nombre maximal de sous-variétés compactes connexes de codimension 1 dont la réunion ne disconnecte pas V . Sachant que toute variété compacte connexe de dimension 1 est homéomorphe au cercle S^1, on peut vérifier que l'ordre de connexion de la sphère S^2 est 0 et que celui du tore T^2 est 2.
Un point important à remarquer est que la collection des variétés topologiques n'est pas stable par découpage le long d'une sous-variété compacte connexe de dimension 1. Ce que l'on obtient est une variété topologique à bord de dimension n,[1]. Le bord d'une variété topologique à bord V est le sous-espace des points dont un voisinage est homéomorphe à un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n_+$. Il découle encore du théorème d'invariance du domaine de Brouwer} que le bord est bien défini, (i.e : qu'aucun voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n_+$ n'est homéomorphe à un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$) . Une variété topologique est une variété topologique à bord, de bord vide.

1.4 Du bord topologique à son algébrisation.

Il est facile de voir que le bord d'une variété topologique à bord de dimension n est une variété topologique (sans bord) de dimension $n-1$. Ainsi *Poincaré* connaissait en 1895 le slogan fondateur de l'homologie :

Le bord d'un bord est vide.

C'est l'algébrisation de ce fait qui donna la notion de complexe de chaînes

$$C_0 \xleftarrow{\partial_0} C_1 \xleftarrow{\partial_1} C_2 \xleftarrow{\partial_2} \dots \xleftarrow{\partial_{n-1}} C_n \xleftarrow{\partial_n} C_{n+1} \xleftarrow{\partial_{n+1}} \dots$$

Le fait que les flèches aillent dans ce sens vient du fait que prendre le bord d'une variété topologique à bord diminue la dimension d'une unité.
Poincaré, en donnant la première définition des groupes abéliens C_n s'aperçut successivement des faits suivants.
Les variétés topologiques à bord semblent encore ne pas être les bons objets. Car lorsque l'on découpe une variété topologique le long de plusieurs sous-variétés topologiques (pas forcément disjointes), l'objet obtenu porte des traces de découpages (que nous appelerons facettes), dont l'information serait importante à conserver, pour pouvoir éventuellement effectuer l'operation inverse de recollement. Comme un quart de plan (ou un huitième d'espace) est homéomorphe à un demi–plan (demi-espace), le monde purement topologique n'est pas assez riche. Les bons objets semblaient donc être les variétés différentiables à coins (et leurs facettes)[11]. En effet, *Poincaré* s'aperçut des difficultés (et du manque de généralité) de cette collection de sous-espaces. Il en changea dans son (Complément à l'analysis situs), en travaillant dans des espaces triangulés ou cellulaires . Pour une généralité maximale, ils furent remplacés dans la suite par les simplexes singuliers .

[1] Un espace métrisable séparable dans lequel tout point possède un voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ ou à son sous-espace $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $x_n \geq 0\}$.

Lorsque l'on découpe le long d'une sous–variété différentiable de codimension 1, celle-ci séparant localement en deux composantes connexes, les deux morceaux locaux obtenus après découpage ont une orientation naturelle de leur bord par la normale sortante, ces orientations étant opposées quand on identifie les bords par le recollement. L'opération de recollement faisant disparaitre le bord, il parait naturel d'attribuer un signe aux facettes (orientées) du bord, de sorte que si l'on change d'orientation, on change de signe. Il est donc utile de pouvoir compter les variétés à coins positivement, négativement, voire avec multiplicité.
Ainsi *Poincaré* introduisit le groupe C_p comme les sommes formelles défnies avec multiplicités (appelées chaînes) de sous-variétés différentiables à coins connexes compactes orientées de dimension p dans une variété différentiable V donnée :

$$\sum_{i=1}^{k} n_i V_i$$

avec $n_i \in \mathbb{Z}$ et V_i des sous-variétés différentiables à coins connexes compactes orientées de dimension p, où l'on identifie V_i' et -V_i si V_i' est munie de l'orientation opposée à celle de V_i.
L'opérateur bord alors introduit par *Poincaré* est l'unique application linéaire
$\partial_{n+1} : C_{n+1} \longrightarrow C_n$ telle que V_i est la somme (finie) formelle des facettes de codimension 1 de V_i, orientées par la normale sortante. Une chaîne est un cycle si son image par l'opérateur bord est nul, et est un bord si elle est l'image par l'opérateur bord d'une chaîne. On vérifie que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$, c'est à dire que tout bord est un cycle.
Ce n'est en fait que vingt ans plus tard environ que *Emmy Noether* définira les groupes qui mesurent l'obstruction pour un cycle d'être un bord :

$$H_p(V, \mathbb{Z}) = \text{ Ker } \partial_p / \text{ Im } \partial_{p-1}$$

est le groupe abélien quotient du groupe des cycles de dimension p par son sous-groupe des bords de dimension p. Ainsi, tout cycle σ définit un élément $[\sigma]$ dans $H_p(V, \mathbb{Z})$, appelée sa classe d'homologie. Un cycle est un bord si et seulement si sa classe d'homologie est nulle.

1.5 La formulation axiomatique de l'homologie relative.

Une formulation axiomatique fut donnée par *Eilenberg* et *Steenrod*, vers 1950. Une théorie de l'homologie relative est la donnée, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'un "foncteur (covariant) de la catégorie des paires d'espaces topologiques dans la catégorie des groupes abéliens" , la donnée pour tout couple (X, Y) d'espace topologiques avec Y un sous espace de X, d'un groupe abélien $H_n(X, Y)$, et pour tous tels couples (X, Y) et (X', Y') et toute application continue $f : X \longrightarrow X$ telle que $f(Y) \subset Y$, d'un morphisme de groupe $f_n : H_n(X, Y) \longrightarrow H_n(X', Y')$ tels que $(f \circ g)_n = f_n \circ g_n$ et $id_n = id$, satisfaisant les axiomes suivants (où l'on note $X = (X, \emptyset)$ pour simplifier) :

1) Invariance par homotopie.
Si f, g sont homotopes, alors $f_n = g_n$ pour tout $n \geq 2$.

2) Existence d'opérateurs connectants.
Il existe, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, un morphisme de groupe $\delta_n : H_n(X, Y) \longrightarrow H_{n-1}(Y)$ tel que :
- $\delta_n \circ f_n = f_{n-1} \circ \delta_n$ pour toute application continue $f : X \longrightarrow X'$ telle que $f(Y) \subset Y'$, et tout n dans $\mathbb{N}^*$.

– en notant $Y \xrightarrow{i} X \xrightarrow{j} (X,Y)$ les inclusions, la suite de groupes abéliens et de morphismes de groupes

$$\ldots \longrightarrow H_{n+1}(X,Y) \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(Y) \xrightarrow{i_n} H_n(X) \xrightarrow{j_n} H_n(X,Y) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(Y)\ldots$$

est exacte.

3) Excision.
$H_n(X,Y) = H_n(X/<Y>, Y/<Y>)$ pour tout n dans $\mathbb{N}$ (où $X/<Y>$ se décrit comme l'espace X où Y a été écrasé en un point).

4) Normalisation. Si X est réduit à un point, alors

$$H_n(X) = \begin{array}{ll} \mathbb{Z} & \text{si } n=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{array}$$

Une grande partie du travail qui suit dans la construction de théories de l'homologie sera de vérifier (la plupart de) ces axiomes.[12]

1.6 De l'homologie à l'homotopie.

Les groupes d'homologie introduits par *Poincaré* lui apparurent être des invariants topologiques extrèmement intéressants. Par exemple, il découle du théorème de classification des surfaces (par les travaux de *Möbius, Jordan, Rado*) que deux surfaces topologiques compactes connexes sont homéomorphes si et seulement si leurs groupes d'homologie sont isomorphes. Mais *Poincaré* s'aperçut (après quelques errements !) que cet invariant n'était pas aussi puissant qu'il l'avait espéré. Il construisit par exemple, vers l'année 1900, une variété compacte de dimension 3 (et même une infinité !), ayant ses groupes d'homologie isomorphes à ceux de la sphère S^3, mais non homéomorphe à S^3. Pour distinguer ces exemples de la sphère S^3, il introduisit un nouvel invariant topologique, le groupe fondamental d'un espace topologique X, qui repose sur les différentes manières de dessiner et déformer continuement des courbes fermées sur X. Ces notions intuitives de déformations continues sont formalisées par la notion d'homotopie [8].
Par exemple, une courbe fermée simple sur une variété topologique est homologue à zéro si elle est le bord d'une chaîne de dimension 2 . Elle est dite homotope à zéro si elle est déformable continuement en un point. Un espace topologique X dans lequel toute courbe fermée est homotope à zéro (plus précisément dans lequel toute application continue $f : S^1 \longrightarrow X$ du cercle dans X s'étend continuement en une application continue $\widetilde{f} : B_2 \longrightarrow X$ du disque dans X) est dit simplement connexe [8].
C'est ainsi que *Poincaré* formula ce que l'on appelle maintenant la conjecture de *Poincaré*.

Toute variété topologique de dimension 3 *compacte, connexe et simplement connexe, est homéomorphe à la sphère* S^3 .

Cette conjecture fait partie de la liste de six grands problèmes de mathématiques, dont la résolution a été dotée en l'an 2000 d'un prix d'un million de dollars.

1.7 Mot de fin.

La topologie algébrique, née à la fin du XIXe siècle, a connu un développement et des succès spectaculaires tout au long du XXe siècle. Elle permet de résoudre très efficacement des problèmes topologiques (ou géométriques dans le sens large) avec des outils algébriques, ou des problèmes algébriques avec des méthodes topologiques (en théorie des groupes notamment), en associant des objets algébriques appropriés (par exemple des groupes, des espaces vectoriels,...) à des espaces topologiques (par exemple des surfaces comme les sphères, les tores,...).

.

2 Catégories et foncteurs.

2.1 Catégories.

Définition.
Une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée de :
- D'une collection d'objets.
- Pour tout couple d'objets X, Y, d'un ensemble $\hom(X,Y)$ dont les éléments sont appelés morphismes (ou fléches), permettant de rélier ces objets.
- Pour tout triplet d'objets X, Y, Z d'une application

$$\begin{array}{rrcl} \circ : & hom(X,Y) \times hom(Y,Z) & \longrightarrow & hom(X,Z) \\ & (f,g) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

  appelée composition vérifiant les propriétés suivantes :
  1) associativité : $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, pour tous f, g, h.
  2) existence d'éléments neutres : pour tout objet X il existe un élément i_X dans $\hom(X,X)$ tel que $i_X \circ f = f \circ i_X = f$ pour tout f

  Un tel élément neutre i_X est unique.

Exemples.
- la catégorie dont les objets sont les ensembles et les morphismes sont les applications.
- la catégorie des groupes et des morphismes de groupes.
- la catégorie des espaces topologiques et des applications continues

2.2 Foncteurs.

Définition.
Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$' deux catégories, un foncteur H de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$' est la donnée pour tout objet X de $\mathcal{C}$ d'un objet $H(X)$ de $\mathcal{C}$' et pour tout morphisme $f \in hom(X,Y)$ de $\mathcal{C}$ d'un morphisme $H(f) \in hom(H(X), H(Y)$ de $\mathcal{C}$' tel que $H(i_X) = i_{H(X)}$.

Vocabulaire. Le foncteur H est dit covariant si $H(f \circ g) = H(f) \circ H(g)$, il est dit contravariant si, $H(f \circ g) = H(g) \circ H(f)$

.

3 Outils élémentaire.

3.1 Module graduée.

Un module gradué est la donnée d'une famille $V = (V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de modules.
Par abus de language, on dit que les éléments de V_n sont de degré n, on écrit alors $\deg(v) = n$ ou bien $|v| = n$, pour tout $v \in V_n$.
Par abus de notation on écrit $V = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_n$.
Pour simplifier les notations on écrit V^{-n} au lieu de V_n pour tout $n \in \mathbb{Z}^-$, et $V^{\geq n} = \bigoplus_{p\geq n} V^p$, en particulier on note $V^+ = \bigoplus_{p\geq 1} V^p$.

3.2 Foncteur Hom.

Soit V et W deux modules gradués, une application $f : V \longrightarrow W$ de degré p est une suite d'application $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tel que $f_n : V_n \longrightarrow W_{n+p}$. i.e : $\deg(f(v)) = \deg(f) + \deg(v)$. On définit alors un module gradué $\mathrm{Hom}(V, W)$ dont les éléments de degré p sont les applications $f : V \longrightarrow W$ de degré p.
Si $f : V \longrightarrow V', g : W' \longrightarrow W$, on pose alors :

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Hom}(f, g) : & \mathrm{Hom}(V', W') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(V, W) \\ & \varphi & \longmapsto & (-1)^{\deg(f)(\deg(g)+\deg(\varphi))} g \circ \varphi \circ f \end{array}$$

$V^\# = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$ s'appelle le dual de V et $f^\# = \mathrm{Hom}(f, id_{\mathbb{K}})$ s'appelle l'application duale de f.

3.3 Produit tensoriel.

soit V et W deux module gradués, leur produit tensoriel $V \otimes W$ est défini par :

$$(V \otimes W)_n = \bigoplus_{p+q=n} V_p \otimes W_q$$

Si $f : V \longrightarrow V'$ et $g : W \longrightarrow W'$ on pose alors :

$$\begin{array}{rccl} f \otimes g : & V \otimes W & \longrightarrow & V' \otimes W' \\ & v \otimes w & \longmapsto & (-1)^{\deg(g)\deg(v)} f(v) \otimes g(w) \end{array}$$

En particulier $\deg(f \otimes g) = \deg(f) + \deg(g)$.
Par abus de notation on ecrit $f \otimes W$ au lieu de $f \otimes \mathrm{id}_W$.

3.4 Différentielle.

Une différentielle sur un module gradué V est la donnée d'une application linéaire, $d_V : V \longrightarrow V$ de degré -1 tel que $d_V^2 = 0$. (V, d_V) s'appelle alors un complexe. Dans le cas général, sauf en cas de confusion, on note d au lieu de d_V.

Remarque.
Si (V, d) et (W, d) sont deux complexes, on peut définir sur $\mathrm{Hom}(V, W)$ et $V \otimes W$ une structure pareille, en posant :

$$(df)v = d(f(v)) - (-1)^{\deg f} f(dv) \quad \forall f \in \mathrm{Hom}(V, W), \forall v \in V$$
$$d(v \otimes w) = dv \otimes w + (-1)^{\deg v} v \otimes dw$$

Notez bien.
$d : V_n \longrightarrow V_{n-1}$ et $d : V^n \longrightarrow V^{n+1}$, autrement dit les différentielles augmentent les degrés en notation “puissance” et les diminuent en notation “indices”.

3.5 Algèbre graduée.

ag. C'est une algèbre graduée en tant que module.

Dérivation de degré n. C'est une application linèaire de degré n, $d : V \longrightarrow V$ telle que :

$$d(xy) = (dx)\, y + (-1)^{n \deg x} xdy$$

adg. (Algèbre différentielle graduée) C'est une ag munie d'une différentielle (dérivation de degré -1).

adgc. (Algèbre différentielle graduée commutative) C'est une adg telle que :

$$xy = (-1)^{\deg x \deg y} yx \quad \forall (x, y) \in V^2$$

En particulier si $\deg x$ impair et $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de 2, on a $x^2 = 0$.

Produit tensoriel La multiplication interne dans $V \otimes W$ est définie par :

$$(v \otimes w).(v' \otimes w') = (-1)^{\deg w \deg v'} (vv' \otimes ww')$$

En particulier le produit tensoriel de deux adgc l'est aussi.

3.6 Algèbre tensorielle.

Si V module gradué libre, l'algèbre tensorielle TV est définie par :

$$TV = \bigoplus_{q=0}^{\infty} T^q V \quad \text{où} \quad T^q V = \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{q \text{ fois}}$$

L'indice q ne désigne pas le degré mais plutôt la longueur de de mot ; $v = v_1 \otimes \ldots \otimes v_q$ est un mot de longueur q et de degré égal à $\sum_{i=1}^{q} \deg v_i$.

Si $(v_i)_{i \in I}$ est une base de V, on écrit alors $TV = T\left((v_i)_{i \in I}\right)$.

3.7 Algébre libre.

Algèbre libre.
C'est l'algébre notée $\wedge V$ définie par :

$$\wedge V = TV/I$$

où I est l'idéal engendré par les éléments de TV de la forme $v \otimes w - (-1)^{\deg v \deg w} w \otimes v$

Algèbre symétrique.
C'est l'algébre notée $\mathcal{S}V$ définie par : $\mathcal{S}V = TV/\mathcal{J}$ où $\mathcal{J}$ est le sous idéal de V engendré par les éléments de la forme $v \otimes w - w \otimes v$ s'appelle l'algébre symétrique de V. En particulier

$$\mathcal{S}V^{\text{pair}} = \{P(x_{i_1}, \dots x_{i_n}) \text{ tel que } n \in \mathbb{N}^*, \deg x_i \text{ pair et } P \text{ polynôme à plusieurs variables}\}$$

Algèbre extérieure.
C'est l'algébre notée $\mathcal{E}V$ définie par : $\mathcal{E}V = TV/\mathcal{I}$ où $\mathcal{I}$ est le sous idéal de V engendré par les éléments de la forme $v \otimes w + w \otimes v$ s'appelle l'algébre extérieure de V. En particulier

$$\mathcal{E}V^{\text{impair}} = \{y_{i_1} \dots y_{i_n} \text{ tel que } n \in \mathbb{N}^*, \deg y_i \text{ impair}\}$$

Remarques.
– Si $\deg v$ est impair, alors $v^2 = 0$ en particulier $\wedge v = \mathbb{K}_1[v]$.
– Si $\deg v$ est pair, alors $\wedge v = \mathbb{K}[v]$.
– $\wedge(V \oplus W) = \wedge V \otimes \wedge W$. En particulier si $(v_i)_{i \in I}$ base de V, alors :

$$\wedge V = \bigotimes_{i \in I} \wedge v_i \text{ et surtout } \wedge V = \wedge V^{\text{pair}} \otimes \wedge V^{\text{impair}}$$

– $\wedge V = \{P(x_{i_1}, \dots x_{i_n}) y_{j_1}, \dots y_{j_q} \text{ tel que } \deg x_i \text{ pair et } \deg y_j \text{ impair et } P \in \mathbb{K}[X_1, \dots X_n]\}$.
– Toute application linéaire de degré nulle de V vers une agc se prolonge de façon unique en morphisme d'agc de $\wedge V$ vers A.
– Toute application linéaire de V vers $\wedge V$ se prolonge de façon unique en une dérivation sur $\wedge V$.

.

3.8 CW-complexes.

Notations.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on note par D^n la boule unité de $\mathbb{R}^n$ et par S^{n-1} sa frontière.
- Soit X un ensemble et $f : D^n \longrightarrow X$, la restriction de f à $\overset{\circ}{D^n}$ s'appelle interieur de f et se note $\overset{\circ}{f}$ et celle à S^{n-1} s'appelle frontière de f et se note ∂f.

Application d'attachement.
Une application d'attachement d'une cellule de dimension n sur un ensemble X est la donnée d'une application

$$c : D^n \longrightarrow X \text{ tel que } \quad \begin{array}{l} \overset{\circ}{c} \text{ injective} \\ \text{Im } c = \text{ Im } \overset{\circ}{c} \cup \text{ Im } \partial c \end{array}$$

Sur l'ensemble des applications d'attachement de cellule de dimension n, on définit la relation d'équivalence suivante :

$$b\mathcal{R}c \quad \textit{si et seulement si } \exists \theta : D^n \to D^n \text{ homéomorphisme tel que : } c = b \circ \theta$$

Les classes d'équivalences sont appelées attachements cellulaires de dimension n.

Remarque.
Il est clair que deux attachements de cellule en relation ont les mêmes intérieurs et frontières mais aussi mêmes images.
Pour un plan cellulaire $c : D^n \longrightarrow X$ de dimension n, la partie Im $\overset{\circ}{c} \subset X$ s'appelle cellule de dimension n, ou tout simplement n-cellule de X.
A noter que les 0-cellules sont des points de X et les 1-cellules sont des chemins tracés sur X.

Complexe cellulaire.
Un complexe cellulaire sur ensemble X est la donnée d'une famille $\mathcal{C}$, non vide, de descriptions cellulaires de X telle que :

$$X = \bigcup_{c \in \mathcal{C}} \text{ Im } \overset{\circ}{c}$$

$$\forall c \in \mathcal{C} \quad \exists \mathcal{C}' \subset \mathcal{C} \text{ tel que } \quad \begin{array}{l} \dim c' \leq \dim c - 1 \quad \forall c' \in \mathcal{C}' \\ \text{Im } \partial c = \bigcup_{c' \in \mathcal{C}'} \text{ Im } \overset{\circ}{c'} \end{array}$$

Intépretation.

On peut intépréter la definition ci-dessus ainsi :
X est ruénion non vide de cellules, dont la frontière de chacune de ces cellulles s'obtient en recollant plusieurs autres cellulles de dimension inférieure.

Remarque.
Dans un complexe cellulaire il y a bijection entre ses éléments et l'ensemble de cellules associés. En particulier si C est une description cellulaire représentée par un plan de cellule c, on écrit $\overset{\circ}{C} = \text{ Im } \overset{\circ}{c}, \partial C = \text{ Im } \partial c$.

Vocabulaire.
Un complexe cellulaire $(X, \mathcal{C})$ est dit de dimension finie si l'ensemble des dimensions de ses cellules est majorée, la plus grande parmi ces dimensions s'appelle dimension de $(X, \mathcal{C})$, il est dit fini ou dénombrable lorsque $\mathcal{C}$ est fini ou dénombrable.

Squelette.
Soit un complexe cellulaire $(X, \mathcal{C})$ de dimension finie, k, et $0 \leq n \leq k$. On appelle n-squelette de X, la partie de X, notée $sk^n(X, \mathcal{C})$ définie par :

$$sk^n(X, \mathcal{C}) = \bigcup_{c \in \mathcal{C}, \dim c \leq n} \text{ Im } \overset{\circ}{c}$$

CW-complexe.
Un CW-complexe sur un ensemble X est un complexe cellulaire $(X, \mathcal{C})$ tel que :
- La frontière de chacune de ses cellules soit égale à la ruénion disjointe d'un nombre fini d'intérieurs de cellules de moindres dimensions.
- La topologie qui lui est associée soit séparée.

Exemples.

1) Soit $z_0 \in S^1$, fixé alors z_0 et $\gamma : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & S^1 \\ t & \longmapsto & z_0 e^{2i\pi t} \end{array}$ sont des cellules, de dimensions respectives 0 et 1 qui munissent S^1 d'une structure de CW-complexe.

2) Soit a et b les deux chemins de S^1 d'extrémités z_0 et $-z_0$, ce sont des 1-cellules, qui réunies avec z_0 et $-z_0$ munissent S^1 d'une structure de CW-complexe.

3) En fixant trois points de S^1 et en considèrants les 3 chemins naturels liants ces 3 points, on muni S^1 d'une structure de CW-complexe formée par 3 0-cellules et 3 1-cellules.

.

4 Homologie et cohomologie.

4.1 Introduction

Le principe de l'homologie est d'associer à un objet topologique géométrique ou algébrique,... des invariants pour cetains types de transformations : homéomorphismes, homotopismes, holomorphismes, isomorphismes,... C'est à dire que l'on a un foncteur

H : {catégorie des objet étudiés et morphismes considérés} $\rightsquigarrow$ {Catégorie plus sympathique}

4.2 Algébre d'homologie.

Definition
Un complexe de chaines est une suite de modules $(C_n)_{n\in N}$ et de morphismes de modules $\partial_n : C_{n+1} \to C_n$ tels que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$. Autrement dit Im$\partial_{n+1}$ $\subset$Ker∂_n. Les morphismes ∂_n sont en général notés ∂, sans indice et appelés morphismes ou opérateurs de bord, et la famille $(C_n)_{n\in N}$ est plutôt notée, pour des raisons de graduations, $C = \bigoplus_{n\in N} C_n$. Le couple (C, ∂) désignera dans la suite un complexe de chaines.

Remarque.
Si Im∂_{n+1} =Ker∂_n, la suite est dite exacte longue.

Morphismes de complexes de chaines.
Un morphisme de complexes de chaines $\phi : (C, \partial) \to (D, \partial')$ est une suite de morphismes de modules $\phi_n : C_n \to D_n$ telle que $\phi_n o \partial_{n+1} = \partial'_n o \phi_{n+1}, \forall n \in N$. autrement dit tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccccc}
C_0 & \overset{\partial}{\longleftarrow} & C_1 & \overset{\partial}{\longleftarrow} & C_n & \overset{\partial}{\leftarrow} & C_{n+1} \longleftarrow \dots \\
\downarrow \phi_0 & & \downarrow \phi_1 & & & & \\
D_0 & \overset{\partial'}{\longleftarrow} & D_1 & \overset{\partial'}{\longleftarrow} & D_n & \overset{\partial'}{\longleftarrow} & D_{n+1} \longleftarrow \dots
\end{array}$$

Remarque.
On peut définir d'une façon naturelle la composée de deux morphismes de chaines, ainsi que le morphisme identité.

Groupes d'homologie.
Si (C, ∂) est un complexe de chaines les sous modules de C_n :

$$Z_n(C) = \ker\partial_{n-1} \text{ s'appelle l'espace des } n\text{- } \textit{cycles}$$

et

$$B_n(C) = \mathrm{Im}\partial_n \text{ celui des } n\textit{-bords}$$

et le module quotient

$$H_n(C) = Z_n(C)/B_n(C) \text{ est appelé } n\textit{-ème groupe d'homologie de } C$$

et enfin on notera

$$H_*(C) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H_n(C).$$

Quasi-isomorphisme.
Un morphisme de complexes de chaines $\varphi : C \longrightarrow C'$ envoie cycles sur cycles et bords sur bords en chaque degré donc induit pour tout entier un morphisme de modules sur les groupes d'homologie en posant

$$\begin{array}{rccc} H_*(\varphi): & H_*(C) & \longrightarrow & H_*(C') \\ & [x] & \longmapsto & [\varphi(x)] \end{array}$$

Il est clair que :

$$H_*(g\circ f) = H_*(g)\circ H_*(f) \text{ et que } H_*(\mathrm{id}_C) = \mathrm{id}_{H_*(C)}$$

On définit ainsi un foncteur covariant

$$H : \{\text{ Catégorie des complexes de chaines }\} \rightsquigarrow \{\text{Catégorie des modules gradués}\}$$

φ est dit quasi-isomorphisme quand $H(\varphi)$ est injective.

Morphismes homotopes.
Soient $\phi, \psi : C \to D$ deux morphismes de complexes de chaines. Une homotopie entre eux est une suite de morphismes de modules $\gamma : C_n \to D_{n+1}$ telle que $\forall n \in N$ on a : $\phi - \psi = \partial\gamma + \gamma\partial$
Le diagramme suivant n'est pas commutatif mais il donne une idée du sens des fléches.

$$\begin{array}{ccccc} C_{n-1} & \longleftarrow & C_n & \longleftarrow & C_{n+1} \\ & \gamma\searrow & \varphi\downarrow\psi & \searrow\gamma & \\ D_{n-1} & \longleftarrow & D_n & \longleftarrow & D_{n+1} \end{array}$$

Proposition.
Si deux morphismes de complexes de chaines sont homotopes alors ils induisent le même morphisme en homologie.

Preuve.
Si x est un cycle de C, $(\partial x = 0)$, alors $\varphi(x) - \psi(x) = \partial\gamma(x) + \gamma\partial(x) = \partial y$ avec $y = \gamma(x)$, d'où $[\varphi(x)] = [\psi(x)]$, donc $H_*(\varphi)[x] = H_*(\psi)[x]$.

Suite exacte courte.
Une suite exacte courte de complexes de chaines est la donnée de complexes de chaines (C, D, E) et de morphismes de complexes de chaines $f : C \to D, g : D \to E$ tels que pour tout n la suite de morphismes de modules $0 \longrightarrow E_n \xrightarrow{f_n} F_n \xrightarrow{g_n} G_n \longrightarrow 0$ soit exacte, c'est à dire : f_n injective, g_n surjective avec $\mathrm{Im} f_n = \mathrm{Ker} g_n$.

Lemme des serpents.
Soit $0 \longrightarrow E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \longrightarrow 0$ une suite exacte courte de complexes de chaines, alors il existe une suite exacte longue de modules

$$\begin{array}{llllll}
\downarrow \delta & & & & & \\
H_n(C) \overset{H_*(f)}{\longrightarrow} H_n(D) \overset{H_*(g)}{\longrightarrow} & H_n(E) & & & & \\
& \downarrow \delta & & & & \\
& H_{n-1}(C) \overset{H_*(f)}{\longrightarrow} H_{n-1}(D) \overset{H_*(g)}{\longrightarrow} & H_{n-1}(E) & & & \\
& & \downarrow \delta & & &
\end{array}$$

δ s'appelle connectant de la suite exacte.

Preuve.
Construisons tout d'abord le morphisme $\delta : H_n(E) \to H_{n-1}(C)$.
Soit z un n-cycle de E, on désire lui associer un n-cycle x de C et un seul modulo un bord. Comme g_n est surjective il existe $y \in D_n$ tel que $g_n(y) = z$, d'autre part $\partial y \in D_{n-1}$ et $g_n(\partial y) = \partial g_n(y) = \partial z = 0$, donc, par exactitude $\partial y \in$Kerg_n =Imf_{n-1}, il existe donc $x \in C_{n-1}$ tel que $f_{n-1}(x) = \partial y$. On pose alors $\delta[z] = [x]$.
Vérifions maintenant que δ est bien défini.
Tout d abord x est bien un cycle car $f_{n-2}(\partial x) = \partial f_{n-1}(x) = \partial\partial y = 0$, or f_n est injective par exactitude, d'où $\partial x = 0$.
D'autre part $[x]$ ne dépend pas des choix de z dans $[z]$ ni des éléments y, x qui interviennent dans la construction ci dessus.
En effet soit z', y', x' un autre choix, alors $[z'] = [z], g(y') = z', f(x') = y'$, on ôte les indices sans crainte de perdre la généralité. donc $\exists z$“ $\in E$ tel que $z - z' = \partial z''$ et soit y“ $\in D$ tel que $z'' = g(y$“$)$, il existe grace à la surjection de g dûe à l'exactitude. Donc $g(y - y' - \partial y$“$) = z - z' - g(\partial y'') = z - z' - \partial g(y$“$) = z - z' - \partial z = 0''$, en utilisant l'exactitude encore une fois au niveau de D, soit x“ $\in C$ tel que $y - y' - \partial y'' = f(x$“$)$, alors $f(x - x' - \partial x$“$) = \partial y - \partial y' - \partial f(x'') = \partial\partial y$“ $= 0$, or f est injective, d'où $x - x' - \partial x$“ $= 0$, et donc $[x] = [x']$.
Vérifions maintenant l'exactitude de la suite au niveau de $H_n(D)$, c'est à dire Im$H_*(f)$ =Ker$H_*(g)$.
On sait que $H_*(g \circ f) = H_*(g) \circ H_*(f)$, et $g \circ f = 0$ d'où $H_*(g) \circ H_*(f) = 0$et donc Im$H_*(f) \subset$ ker $H_*(g)$.
Réciproquement soit y un cycle tel que $[y] \in$ker$H_*(g)$,d'où $[g(y)] = H_*(g)(y) = 0$ et donc $g(y)$ est bord, soit $z \in E$ tel que $g(y) = \partial z$ et soit $y' \in C$ tel que $z = g(y')$, il existe puisque g est surjective, donc $g(y - \partial y') = 0$, car g commute avec ∂, d'aprés l'exactitude $y - \partial y' \in$Imf, soit donc $x \in C$ tel que $y - \partial y' = f(x)$, donc $[y] = [f(x)]$. D'autre part $f(\partial x) = \partial f(x) = \partial y - \partial\partial y' = 0$ car y cycle, et donc comme f est injective alors x est un cycle et donc $H_*[x] = [f(x)] = [y]$, d'où $[y] \in$Im$H_*(f)$.
Vérifions ensuite l'exactitude au niveau de $H_n(E)$, c'est à dire montrons que Im$H_*(g)$ =kerδ.
Si y est un cycle de D, posons $z = g(y)$ et $x \in E$ tel que $[x] = \delta[z]$, donc par construction de δ on a $f(x) = y$ Comme y est un cycle et f injective , d'où $x = 0$ et donc $\delta \circ H_* g([y]) = \delta[g(y)] = \delta[z] = [x] = 0$, d'où $\delta \circ H_*(g) = 0$ et donc Im$H_*(g) \subset$kerδ.
Réciproquement montrons que ker$\delta \subset$Im$H_*(g)$. Soit z un cycle de E tel que $\delta[z] = 0$, $x \in C, y \in D$ construits comme précédement tels que $z = g(y)$ et $f(x) = \partial y$ donc $[x] = \delta[z] = 0$, d'où x est un bord, soit $x' \in C$ tel que $x = \partial x'$ et $y' = y - f(x')$, donc $g(y') = y = z$ car $g \circ f =$

0 en raison de l'exactitude de la suite courte, en plus $\partial y' = \partial y - \partial f(x') = \partial f(x) - f(\partial x') = 0$, donc y' est un cycle de D, donc $H_*(g)[y] = [g(y)] = [z]$, d'où $[z] \in \mathrm{Im} H_*(g)$.
Et de même on vérifie l'exactitude au niveau de $H_n(E)$, c'est à dire montrer que $\mathrm{Im}\delta = \mathrm{Ker} H_*(f)$. En effet, avec les notations précédentes $H_*(f)(\delta[z]) = H_*(f)[x] = [f(x)] = [\partial y] = 0$.

4.3 Complexes de cochaines cohomologie suite exacte longue de cohomologie

Un *complexe de cochaines* (C^*, d) est une suite de modules $(C^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de morphismes de modules $d_n : C^n \longrightarrow C^{n+1}$ tels que $d^{n+1} \circ d^n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Les d^n sont appelés morphismes de *cobord* ou *différentielles.*
On définit de même
un *morphisme de complexes de cochaines* $\phi : C^* \to D^*$ qui est une suite de morphismes de modules $\phi^n : C^n \to D^n$ tels que $\phi o d = d o \phi$.
l'espace des *n-cocycles* $Z^n(C^*) = \mathrm{Ker} d^n$
l'espace des *n-cobords*, $B^n(C^*) = \mathrm{Im} C^{n-1}$
On définit le *n-ème groupe de cohomologie* de C^* qui est un module par :

$$H^n(C) = Z^n(C) \diagup B^n(C)$$

l'application $H^*(f) : H^n(D) \to H^n(C)$ induite en cohomologie par un morphisme de complexes de cochaines $f : C \to D$ par $H^*(f)[z] = [f(z)]$ si z est un n-cocycle de D.

4.4 Homologie simpliciale.

Introduction.
L'homologie simpliciliale fût l'une des premières homologies à traiter les invariants topologiques. Elle étudie principalement des blocs géométriques, (points, triangles, tétraèdres,...) qui permettent la reconstruction de l'espace. On parle de l'espace triangulable.

Simplexes de $\mathbb{R}^n$.
Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, un p-simplexe de $\mathbb{R}^n$ est tout sous espace σ^p de $\mathbb{R}^n$ de la forme :

$$\sigma^p = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i \text{ tel que } \lambda_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

où $v_0, ..., v_p$ une famille de points géométriquemnt indépendants [1] dans $\mathbb{R}^n$.
On note $\sigma^p = [v_0, ..., v_p]$, v_i s'appellent sommets du simlexe et
$\left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i \text{ tel que } \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_j = 0 \right\}$ s'appelle sa j-ème face et p sa dimension.
Dans $\mathbb{R}^3$, les simplexes de dimension 1 sont les points, ceux de dimension 2 sont les segments, ceux de dimension 3 sont les triangles pleins et ceux de dimension 4 sont les tétaèdres.

[1] Ils forment des vecteurs linéairement indépendants

Fig. 4 – Exemple d'un 3-simplexe.

Complexe simplicial.
Un complexe simplicial dans $\mathbb{R}^n$ est un ensemble fini, $\mathcal{K}$ de simplexes de $\mathbb{R}^n$ tel que :
– Si $\sigma^p \in \mathcal{K}$ alors toutes ses faces sont aussi dans $\mathcal{K}$.
– Si $(\sigma^p, \sigma^q) \in \mathcal{K}^2$ alors $\sigma^p \cap \sigma^q = \emptyset$ ou bien c'est une face commune de σ^p et σ^q
La dimension de $\mathcal{K}$ est la dimension maximale de ses éléments.
Dans le but de définir une opération sur ses complexes simpliciaux on oriente alors les simplexes, en tenant compte de l'ordre de ses sommets, et dorénavant un simplexe orienté sera noté $\sigma^p =< v_0, ..., v_p >$, tout changement dans l'ordre des sommets se traduit avec une multiplication par la signature de la permutation associée.
Soit $\mathcal{K}$ un complexe simplicial, on appelle le complexe de chaines singulier de $\mathcal{K}$, le groupe abélien libre engendré par les p-simplexes orientés de $\mathcal{K}$ noté $\mathcal{C}_p(\mathcal{K})$ définit par

$$\mathcal{C}_p(\mathcal{K}) = \left\{ \sum_{fini} n_i \sigma_i^p \text{ tel que } n_i \in \mathbb{Z}, \sigma_i^p \in \mathcal{K} \right\}$$

On définit alors l'opérateur bord [2] sur les générateurs par :

$$\begin{array}{llll} \partial : & \mathcal{C}_p(\mathcal{K}) & \longrightarrow & \mathcal{C}_{p-1}(\mathcal{K}) \\ & < v_0, ..., v_p > & \longmapsto & \sum_{i=0}^{p} (-1)^i < v_0, ..., \widehat{v_i}, ..., v_p > \end{array}$$

qu'on peut prolonger par linéarité sur $\mathcal{K}$, on construit ainsi un complexe différentiel $(\mathcal{K}, \partial)$, qui n'est pas un espace vectoriel, mais seulement un $\mathbb{Z}$-module. L'homolgie de ce complexe s'appelle homologie simpliciale et se note $H_*(\mathcal{K})$.
Pour un complexe simplicial $\mathcal{K}$ de $\mathbb{R}^n$, la réunion de ses simplexes est un sous-espace topologique de $\mathbb{R}^n$, qu'on appelle polyèdre de $\mathcal{K}$ et qu'on note $|\mathcal{K}|$. Un espace topologique est dit triangulable[3] *si et seulement si* il est homéomorphe à un complexe simlpicial $\mathcal{K}$, on définit alors l'homologie simpliciale de X comme étant celle de $\mathcal{K}$, qui est un invariant topologique.

[2] $< v_0, ..., \widehat{v_i}, ..., v_p >$ signifie qu'on omet v_i.
[3] Les variétés compactes sont par exemple triangulables.

4.5 Homologie singulière.

Simplexe singulier.
Pour tout entier i, non nul, on pose $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ où 1 se trouve à la i-ème place, la famille $(e_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^\infty$ espace vectoriel des suites à supports bornés, limite naturelle des espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ liés entre eux par l'injection canonique

$$j : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & (x_1, \ldots, x_n, 0) \end{array}$$

On appelle p-simplexe standard l'ensemble

$$\Delta_p = \left\{ \sum_{i=0}^{p} \lambda_i e_i \text{ tel que } 0 \leq \lambda_i \leq 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1 \right\}$$

avec e_0, point d'origine de $\mathbb{R}^\infty$.

Fig. 5 – Exemples de simplexes standards.

Étant donné $p+1$ points $v_0, \ldots, v_p$ de $\mathbb{R}^\infty$, on appelle p-simplexe singulier affine associé, l'application notée $[v_0, \ldots, v_p]$ définie par :

$$[v_0, \ldots, v_p] : \begin{array}{ccc} \Delta_p & \longrightarrow & \mathbb{R}^\infty \\ \sum_{i=0}^{p} \lambda_i e_i & \longmapsto & \sum_{i=0}^{p} \lambda_i v_i \end{array}$$

Ici on ne suppose pas que ces points sont géométriquement indépendants, par exemple $[e_0, e_0, e_1, e_2]$ est un triangle et pas un tétraèdre, c'est de la que vient le mot singulièr.
Une expression de type $[v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_p]$ signifie que l'on omet v_i.
En particulier le $(p-1)$-simplexe singulier affine $F_i^p = [e_0, \ldots, \widehat{e_i}, \ldots, e_p] : \Delta_{p-1} \longrightarrow \Delta_p$ est appelé i-ème face de Δ_p, dont l'image n'est autre que la face de simplexe Δ_p opposée au sommet e_i.
On a les relations suivantes :

$$F_i^p(e_j) = \begin{array}{ll} e_j & \text{pour } j < i \\ e_{j+1} & \text{pour } j \geq i \end{array}$$

qui permettent de vérifier facilement que

$$F_j^{p+1} \circ F_i^p(e_j) = \begin{array}{ll} [e_0, \ldots, \widehat{e_i}, \ldots, \widehat{e_j}, \ldots, e_p] & \text{pour } j > i \\ [e_0, \ldots, \widehat{e_j}, \ldots, \widehat{e_{i+1}}, \ldots, e_p] & \text{pour } j \leq i \end{array}$$

Et enfin on appelle p-simplexe singulier d'un espace topologique, X toute application continue

$$\sigma : \Delta_p \longrightarrow X$$

Fig. 6 – Un simplexe singulier.

Ces p-simplexes singuliers engendrent le groupe abélien

$$\Delta_p(X) = \left\{ \sum_{\text{fini}} c_i\sigma_i \text{ tel que } c_i \in \mathbb{Z}, \quad \sigma_i \text{ } p\text{-simplexe singulier de } X \right\}$$

Soit $\sigma : \Delta_p \longrightarrow X$ un p-simplexe singulier de X, on appelle :
– i-ème face de σ, le $(p-1)$-simplexe singulier,

$$\sigma^i = \sigma \circ F_i^p : \Delta_{p-1} \longrightarrow X$$

– Bord de σ, la combinaison,

$$\partial\sigma = \sum_{i=1}^{p} (-1)^i \sigma^i$$

On a alors

$$\partial : \Delta_p \longrightarrow \Delta_{p-1}$$

Et ainsi, $(\Delta_*(X) = \bigoplus_{p\geq 0} \Delta_p(X), \partial)$ est un complexe différentiel, dont l'homologie associée notée $H_*(X, \mathbb{Z})$ s'appelle homologie singulière de X

Remarques.
– Au contraire de l'homolgie simpliciale, celle singulière est définie pour n'importe quel espace topologique.
– Comme on a défini l'homologie singulière à coefficients dans $\mathbb{Z}$, on peut aussi définir celle à coefficients dans $\mathbb{Q}$ notée $H(X, \mathbb{Q})$ ou celle à coefficients dans $\mathbb{R}$ notée $H(X, \mathbb{R})$, en prenant dans ce qui précède $c_i \in \mathbb{Q}$ ou $c_i \in \mathbb{R}$.
– Si X admet plusieurs composantes connexes, X_α, alors $\Delta_p(X) = \bigoplus_{\alpha} \Delta_p(X_\alpha)$, relation qui est préservée en homologie, on a alors $H_*(X, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{\alpha} H_*(X_\alpha, \mathbb{Z})$. Il suffit donc pour le calcul de l'homologie singulière de considérer des espaces connexes par arcs.
– Pour un espace triangulable, les homologies simpliciales et singulières sont identiques.

.

5 Homotopie.

5.1 Type d'homotopie.

Applications homotopes.
Soient X et Y deux espaces topologiques, on dit que deux applications $f, g : X \to Y$ continues sont homotopes *si et seulement si* elle existe $\gamma : X \times I \to Y$ continue telle que :

$$\forall x \in X \quad \begin{array}{l} \gamma(x,0) = f(x) \\ \gamma(x,1) = g(x) \end{array}$$

où I designera dans toute la suite l'intervalle $[0,1]$. Autrement dit : il existe un chemin dans $\mathcal{C}(X,Y)$, d'origine f et d'éxtremité g. On définit ainsi une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}(X,Y)$.

Terminologie.
Le mot "homotopie" signifie à peu près ressemblance des lieux.

Groupes d'homotopies.
Les espaces X et Y sont dits de même type d'homotopie si'ils existent deux applications continues $f : X \to Y, g : Y \to X$ telles que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont homotopes respectivement à id_Y et id_X. On dit alors que f est une équivalence d'homotopie de X vers Y et que g l'est de Y vers X, et on écrit alors $f : X \xrightarrow{\cong} Y$ ou que $X \cong Y$.
On définit ainsi une relation d'équivalence sur les espaces topologiques, en particulier ceux pointés , l'ensemble quotient associé se note $[(X,x_0),(Y,y_0)]$. Le cas le plus important reste le suivant :

$$\pi_n(X,x_0) = [(S^n,*),(X,x_0)] \quad n\text{-ème groupe d'homotopie de } X.$$

$\pi_0(X,x_0)$ représente les composantes connexes de X, en particulier si $\pi_0(X,x_0) = \{0\}$ alors X est connexe par arc, et dans ce cas tous les $\pi_n(X,x_0)$ sont isomorphes entre eux on note alors $\pi_n(X)$ tout court.
On dit que X est n-connexe *si et seulement si* $\pi_i(X,x_0) = \{0\} \quad \forall\, 0 \leq i \leq n$.
X est dit simplement connexe lorsqu'il est 1-connexe.

Propriétés.
– Soit $\varphi : (X,x_0) \longrightarrow (Y,y_0)$, l'application :

$$\begin{array}{rrcl} \pi_n(\varphi): & \pi_n(X,x_0) & \longrightarrow & \pi_n(Y,y_0) \\ & [f] & \longmapsto & [f \circ \varphi] \end{array}$$

est bien définie et ne dépend que de la classe d'homotopie de ϕ.

- $\pi_n(X \times Y, *) \xrightarrow{\cong} \pi_n(X, *) \times \pi_n(Y, *)$.
- $\pi_n(X, *)$ est abélien pour $n \geq 2$.

Théorème de Hopf.[9]

$$\begin{array}{rcll} \pi_i(S^n) & = & 0 & \text{si } i < n \\ & = & \mathbb{Z} & \text{si } i = n \end{array}$$

5.2 Equivalence d'homotopie faible.

Une application $f : Y \longrightarrow Z$ est dite une équivalence d'homotopie faible *si et seulement si* toutes les applications $\pi_n(f) : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(Y, y_0)$ sont bijectives.
Deux espaces X et Y sont dits de même type d'homotopie faible s'ils sont liés par une suite d'équivalences d'homotopie faible

$$X \longrightarrow Z_0 \ldots \longrightarrow Z_n \longrightarrow Y$$

5.3 Modèle cellulaire.

Un modèle cellulaire d'un espace topologique X est un CW-complexe Y lié à X via une équivalence d'homotopie faible.

Théorème du modèle cellulaire.[10]
Tout espace topologique admet un modèle cellulaire.

Remarque.
En plus du théorème cité ci-dessus, on peut énoncer un autre résultat aussi important :

Toute équivalence d'homotopie faible entre deux CW-complexe est une equivalence d'homotopie.

Ce qui reflète l'imposant rôle des CW-complexe en topologie algébrique.

5.4 Morphisme d'Hurweicz.

Il est défini pour un espace topologique X à l'aide de la relation :

$$\begin{array}{rrcl} hur_X : & \pi_n(X, x_0) & \longrightarrow & H_n(X, \mathbb{Z}) \\ & [\varphi] & \longmapsto & H_n(\varphi)[S^n] \end{array}$$

où $[S^n]$ générateur de $H_n(S^n, \mathbb{Z})$ appelé classe fondamentale de S^n. Ce morphisme permet de liér l'homologie et homotopie d'un même espace topologique pointé, à retenir surtout le résulat suivant : Si $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ alors

$$H_*(f) \circ hur_X = hur_Y \circ \pi_*(f)$$

Théorème d'Hurweicz.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\pi_i(X, x_0) = 0 \quad \forall\, i \leq n$ alors $H_i(X, \mathbb{Z}) = 0 \quad \forall\, 1 < i \leq n$.
En plus $hur_X : \pi_{n+1}(X, x_0) \longrightarrow H_{n+1}(X, \mathbb{Z})$ est un isomorphisme.

5.5 Homotopie relative.

Définition.
Soit A un sous espace de X, deux application $f, g : X \to Y$ qui coincident sur A sont homotopes relativement à A *si et seulement si* elle existe $\gamma : X \times I \to Y$ homotopie de f vers g telle que : $\gamma(x,t) = f(x) = g(x) \quad \forall x \in A$.
Ceci permet encore de définir une relation d'équivalence sur les applications continues qui coincident sur A.

5.6 Espaces contractiles.

Espaces contractiles.
Un espace est dit contractile *si et seulement si* il est de même type d'homotopie qu'un singleton.

Remarques.
- Tout espace contractile est connexe par arcs.
- Un espaces X est contractile *si et seulement si* id_X est homotope à une application constante.

Contraction.
Une contraction de X est la donnée d'une application continue surjective de X vers l'un des ses sous espaces.

Remarque.
Tout application continue de X dans lui même se factorise canoniquement à l'aide d'une contraction comme le montre le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\widehat{f}} & f(X) \\ & f \searrow & \downarrow i \\ & & X \end{array}$$

On a alors tendance à confondre l'application continue f avec la contraction $\widehat{f}$.

Contraction progressive.
Une contraction $r : X \to A$ est dite progressive si elle est homotope à id_X relativement à A.

Remarques.
- Toute contraction progressive $r : X \to A$ est une équivalence d'homotopie d'inverse homotopique l'injection canonique $i : A \to X$. Autrement dit X et son sous-espace A ont le même type d'homotopie.
- Un espace X est contractile *si et seulement si* il existe une contraction progressive de X vers l'un des ses points. Donc de même type d'homotopie qu'un point.

Rétraction.
Une contraction $r : X \to A$ est dite rétraction lorsque $r = \mathrm{id}_A$ sur A. Si de plus elle homotope à id_X relativement à A on dit alors qu'elle est progressive.

Espaces rétractiles. X est dit rétractile si elle existe une rétraction progressive de X vers l'un de ses points.

Remarque.
Tout espace rétractile est contractile.

5.7 Opérations sur les chemins.

Composée de deux chemins.
Soient γ et γ' on appelle composé de γ avec γ', le chemin noté $\gamma\gamma'$ définit par :

$$\begin{aligned} \gamma * \gamma' &= \gamma(2t) & \forall t \in [0, \tfrac{1}{2}] \\ &= \gamma'(2t-1) & \forall t \in [\tfrac{1}{2}, 1] \end{aligned}$$

Chemin inverse.
On définit le chemin inverse de γ, noté $\overline{\gamma}$ par :

$$\overline{\gamma}(t) = \gamma(1-t) \quad \forall t \in [0,1]$$

5.8 Homotopie entre chemins.

Définition.
Deux chemins γ et γ' de mêmes extremités et origines sont dits homotopes *si et seulement si* ils le sont relativement par rapport à 0 et 1.
On définit ainsi une relation d'équivalence entre les chemins joignant deux points de X donnés, compatible avec la composée et inverse de chemins, dont les classes d'équivalence seront appelées les classes d'homotopie et sur lesquelles on peut donc définir une composition qui plus encore est associative et pour laquelle les chemins constants sont homotopiquement neutres, et où chaque chemin composé avec son inverse est homotopiquement neutre.
L'ensemble de toutes les classes d'homotopie présente alors une structure semblable à celle d'un groupe, on l'appelle *groupoide fondamendal* ou *groupoide de Poincaré*, de X.

5.9 Groupe fondamental.

Lacet.
On rappelle qu'un lacet de base $x \in X$ est un chemin fermé, d'origine et d'éxtremité x.

Définition.
L'ensemble noté $\pi_1(X, x)$ des classes d'homotopies de lacets de base x est un groupe, appelé *groupe fondamendal* ou *groupe de Poincaré*, de X de base x.

Remarque.
Si x et y sont dans une même composante connexe de X, alors $\pi_1(X, x) \cong \pi_1(X, y)$, en particulier, si X est connexe par arc on ne fait plus référence au point de base, et on parle du groupe fondamental de X, qu'on note tout simplement $\pi_1(X)$.

5.10 Compatibilité entre classes d'homotopie et applications continues.

Soit $f : X \to Y$ continue et γ un chemin joignant x_1 et x_2 dans X, alors le chemin noté f_γ défini par $f_\gamma(t) = f(\gamma(t))$ est un chemin dans Y qui joigne $f(x_1)$ et $f(x_2)$. Cette composé entre chemins et applications continues est compatible avec l'homotopie des chemins ($[\gamma] = [\gamma'] \Longrightarrow [f_\gamma] = [f_{\gamma'}]$), et induit un morphisme entre les groupes fondamentaux défini par :

$$\begin{array}{rrcl} \pi_1(f): & \pi_1(X,x) & \longrightarrow & \pi_1(Y,f(x)) \\ & [\gamma] & \longmapsto & [f_\gamma] \end{array}$$

Propriétés.

1) $\pi_1(\mathrm{id}_{(X,x)}) = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x)}$.

2) Si $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, alors $\pi_1(g \circ f) = \pi_1(g) \circ \pi_1(f)$.

3) Si f est un homémorphisme, alors $\pi_1(f)$ est un ismorphisme avec $\pi_1(f)^{-1} = \pi_1(f^{-1})$.

4) Si f est une équivalence d'homotopie alors $\pi_1(f)$ est un isomorphisme. En particulier deux espaces connexes par arcs ayant même type d'homotopie ont des groupes fondamentaux isomorphes.

5) Le groupe fondamental de tout espace contractile est trivial.

6) $\pi_1(S^n, e) \cong \mathbb{Z}$ et $\pi_1(T^n) \cong \mathbb{Z}^n$.

7) $\pi_1(SO(2,\mathbb{R}), e) \cong \mathbb{Z}$ et $\pi_1(SO(m,\mathbb{R}), e) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad \forall m \geq 3$.

.

6 Fibration.

6.1 Vocabulaire.

Définitions.
On dit qu'une application continue $p : X \longrightarrow Y$ vérifie la propriété de relèvement relativement à un couple (A, Z) *si et seulement si* pour tout diagramme commutatif de la forme suivante :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p} & Y \\ f \uparrow & \nwarrow k & \downarrow g \\ A & \overset{i}{\hookrightarrow} & Z \end{array}$$

il existe $k : Z \longrightarrow X$ continue telle que $p \circ k = g$ et $k \circ i = f$.
On appelle alors fibration toute application continue surjective qui vérifie la propriété de relèvement relativement à toute paire $(Z \times \{0\}, Z \times I)$ où Z est un espace topologique quelconque.
Soit $p : X \longrightarrow Y$ une fibration.
– Pour $y \in Y$, l'ensemble $X_y = p^{-1}\{y\}$ s'appelle fibre au-dessus de y.
– X espace total de la fibration, Y sa base et p se nomme la projection.

Exemple.
L'exemple le plus simple d'une fibration est la projection canonique :

$$\begin{array}{rccc} p: & F \times Y & \longrightarrow & X \\ & (x, y) & \longmapsto & y \end{array}$$

pour la quelle toutes les fibres sont "égales" à F.

Notation.
Pour une fibration $p : X \longrightarrow Y$, lorsqu'on se fixe $y_0 \in Y$ et si F est la fibre au-dessus de y_0, (exemple des espace pointés) on adopte la notation suivante :

$$F \longrightarrow X \xrightarrow{p} Y$$

G-fibration.
Soit G un monoide qui agit sur un espace topologique, X. Une G-fibration est la donnée d'une fibration $p : X \longrightarrow Y$ vérifiant les propriétés suivantes :
- $p(g.x) = p(x) \quad \forall x \in X, \forall g \in G$, *compatibilité de la fibre avec l'action.*
- Pour tout $x \in X$, l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi_x : & G & \longrightarrow & X_{p(x)} \\ & g & \longmapsto & g.x \end{array}$$

  est une équivalence d'homotopie faible, *Toutes les fibres sont de même type d'homotopie faible.*

6.2 Espaces de Moore.

Soit (X, x_0) espace topologique pointé, on note par $\widehat{P}X$ l'ensemble des chemins γ qui se terminent en x_0, (i.e : $\gamma(1) = x_0$). On note aussi $\widehat{\Omega}X$ l'ensemble des chemins γ qui commencent et se terminent en x_0, (i.e : $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$).
D'aprés les lois exponentielles[14], l'application suivante :

$$\begin{array}{ccccc} \widehat{\Omega}X \longrightarrow & \widehat{P}X & \xrightarrow{p} & X \\ & \gamma & \longmapsto & \gamma(0) \end{array}$$

est une fibration de fibre $\widehat{\Omega}X$.
D'autre part sur $\widehat{\Omega}X$, on définit la loi de composition interne suivante :

$$\gamma * \omega(t) = \begin{array}{ll} \gamma(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \omega(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{array}$$

qui est "homotopiquement associative", mais non associative. Pour y remédier, on définit un chemin de Moore comme étant un couple (γ, l) où $\gamma : [0, +\infty[\longrightarrow X$ continue tel que $\gamma(t) = \gamma(l), \quad \forall t \geq l$.
l s'appelle longueur du chemin γ qui commence en $\gamma(0)$ pour se terminer en $\gamma(l)$.
Dans la suite PX désigne l'ensemble des chemins de Moore qui se terminent en x_0, et ΩX celui des lacets de Moore qui commencent et se terminent en x_0.
On note enfin que $\widehat{P}X$ et $\widehat{\Omega}X$ s'identifient respectivement aux chemins et lacets de Moore de longueur 1, et que ΩX peut être muni d'une structure de monoide en posant

$$(\gamma, l) * (\omega, r) = (\gamma * \omega, l + r)$$

où $\gamma * \omega$ est défini par la relation :

$$\gamma * \omega(t) = \begin{array}{ll} \gamma(t) & \text{si } t \leq l \\ \omega(t-l) & \text{si } t \geq l \end{array}$$

Dont l'élément neutre est le lacet constant

$$\gamma_{x_0}(t) = x_0 \quad \forall t \geq 0$$

La relation $\gamma * \omega \in PX$ pour tout $\gamma \in \Omega X$ et $\omega \in PX$ induit une action à droite de ΩX sur PX, soit donc la fibration :

$$\begin{array}{ccccc} \Omega X \longrightarrow & PX & \xrightarrow{p} & X \\ & (\gamma, l) & \longmapsto & \gamma(0) \end{array}$$

D'autre part on a les résultats suivants :

- $p(\gamma * \omega) = p(\gamma)$.
- $\Omega X = (PX)_{x_0}$.
- L'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi_x : & \Omega X & \longrightarrow & (PX)_{x_0} \quad \text{tel que } p(\gamma) = x_0 \\ & \omega & \longmapsto & \omega * \gamma \end{array}$$

  n'est autre que l'identité, donc équivalence d'homotopie faible, d'où $\Omega X \longrightarrow PX \xrightarrow{p} X$ est une ΩX-fibration.

Remarque.
soit $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ continue, l'application :

$$\begin{array}{rccc} \Omega f : & \Omega X & \longrightarrow & \Omega Y \\ & f & \longmapsto & f \circ \gamma \end{array}$$

définit un foncteur sur la catégorie des espaces topologiques.
En particulier, si $F \longrightarrow X \xrightarrow{p} Y$ est une fibration de fibre et de base connexes par arcs,

$$\Omega F \longrightarrow \Omega X \xrightarrow{\Omega p} \Omega Y$$

est une ΩF-fibration.

.

7 Modèle minimal de Sullivan.

7.1 Introduction.

Soit X un espace topologique, l'algèbre graduée $S^*(X)$ est en général jamais commutative, bien que son homologie associée l'est, toute fois en caractéristique nulle il est possible de l'identifier via un quasi-isomorphisme [1] avec une agc, autrement dit $H^*(X) = H^*(A_{PL}(X))$.

$$S^*(X) \longrightarrow D(X) \longrightarrow A_{PL}(X)$$

La construction de $A_{PL}(X)$ due a Sullivan, s'inspire des formes différentielles de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur X et reflète la nature combinatoire du comportement des simplexes singuliers définies sur X. Notons enfin que le foncteur $X \longrightarrow A_{PL}(X)$ est un foncteur contravaiant. Et que $f : X \longrightarrow Y$ est une équivalence d'homotopie rationnelle *si et seulement si* $A_{PL}(f) : A_{PL}(X) \longrightarrow A_{PL}(Y)$ est un quasi-isomorphisme.

7.2 Objet simplicial dans une catégorie $\mathcal{C}$.

On appelle objet simplicial de $\mathcal{C}$, toute suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liés entre eux par des morphismes

$$\partial_i : K_{n+1} \longrightarrow K_n \quad 0 \leq i \leq n+1 \text{ et } s_j : K_n \longrightarrow K_{n+1} \quad 0 \leq i \leq n+1$$

qui remplissent les relation suivantes :

$$\begin{array}{rrll} & \partial_i\partial_j = & \partial_{j-1}\partial_i & \text{si } i < j \\ & s_i s_j = & s_{j+1}s_i & \text{si } i \leq j \\ (1) & \partial_i s_j = & s_{j-1}\partial_i & \text{si } i < j \\ & & id & \text{si } i = j \text{ ou } i = j+1 \\ & & s_j\partial_{i-1} & \text{si } i > j+1 \end{array}$$

Un morphisme simplicial est un morphisme qui commute avec toutes les ∂_i et s_j.

7.3 Exemple.

Aves des notations précédentes on définit les application suivantes :

$$\lambda_i =< e_0, \ldots, e_i, \ldots, e_n >: \Delta_{n-1} \longrightarrow \Delta_n \rho_j =< e_0, \ldots, e_j, e_j, \ldots, e_n >: \Delta_{n+1} \longrightarrow \Delta_n$$

appelées respectivement i-ème face d'inclusion et j-éme dégènérécence de Δ_n.

[1] Application qui induit un isomorphisme en homologie

Pour un espace topologique on définit ses faces et dégénérances à l'aide des relations suivantes :

$$\begin{array}{rccc} \partial_i : & S_{n+1}(X) & \longrightarrow & S_n(X) \\ & \sigma & \longmapsto & \sigma \circ \lambda_i \end{array} \quad \begin{array}{rccc} s_j : & S_n(X) & \longrightarrow & S_{n+1}(X) \\ & \sigma & \longmapsto & \sigma \circ \rho_j \end{array}$$

qui vérifient bien les relations (1)
On note par $CS_n(X)$ le $\mathbb{K}$-module libre engendré par $S_n(X)$. Un $(n+1)$-simplexe est dit dégénéré *si et seulement si* il est de la forme $s_i\sigma$ où $\sigma \in S_n(X)$, l'ensemble de tels simplexes se note $DS_{n+1}(X)$ sous module de $CS_{n+1}(X)$, on pose alors

$$C_*(X) = CS_*(X)/DS_*(X)$$

appelée chaine de complexes des simplexes singuliers normalisés, qu'on peut munir de la différentielle

$$d_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial_i$$

et on construit ainsi un objet simplicial dans la catégorie des adgc.

7.4 Construction de $A(\mathcal{K})$.

Soit $\mathcal{K}$ un objet simplicial et $(A^p)_{p\geq 0}$ complexe de cochaines simpliciaux. On définit

$$A(\mathcal{K}) = (A^p(\mathcal{K}))_{p\geq 0}$$

à l'aide des relations suivantes :
- $A^p(\mathcal{K})$ est l'ensemble des mophismes simpliciaux $\Phi : \mathcal{K} \longrightarrow A^p$. En particulier le fait que $_Phi$ commutte avec les ∂_i et s_j se traduit, en posant $\Phi(\sigma) = \Phi_\sigma$, par :

$$\Phi_{\partial_i\sigma} = \partial_i\Phi_\sigma, \quad \Phi_{s_j\sigma} = s_j\Phi_\sigma$$

- La structure d'adcg est définie à l'aide des relations suivantes :

$$(\Phi + \lambda\Psi)_\sigma = \Phi_\sigma + \lambda\Psi_\sigma, \quad (\Phi.\Psi)_\sigma = \Phi_\sigma.\Psi_\sigma \quad (d\Phi)_\sigma = d(\Phi_\sigma)$$

Pour un espace topologique, X on pose :

$$A(X) = A(S_*(X))$$

7.5 Construction de $A_{PL}(X)$.

On considère l'agc libre $\wedge(t_0, \ldots, t_n, y_0, \ldots, y_n)$ avec $\deg t_i = 0$ et $\deg y_i = 1$, l'adgc $A_{PL} = ((A_{PL})_n)_{n\geq 0}$ est définie par :
- Les éléments de $(A_{PL})_n$ s'appellent formes différentielles polynômiales à coefficients dans $\mathbb{K}$ et sont définies par

$$(A_{PL})_n = \frac{\wedge(t_0, \ldots, t_n, y_0, \ldots, y_n)}{< \sum t_i - 1, \sum y_i >}$$

- La dérivation est définie par $\mathrm{d}t_i = y_i$ et $\mathrm{d}y_i = 0$.

– Les morphismes faces et dégénérécence sont définies par les relations suivantes

$$\begin{array}{rcll} \partial_i : \ (A_{PL})_{n+1} & \longrightarrow & (A_{PL})_n & \\ & & t_k & \text{si } k < i \\ t_k & \longmapsto & 0 & \text{si } k = i \\ & & t_{k-1} & \text{si } k > i \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} s_j : \ (A_{PL})_n & \longrightarrow & (A_{PL})_{n+1} & \\ & & t_k & \text{si } k < i \\ t_k & \longmapsto & t_k + t_{k+1} & \text{si } k = i \\ & & t_{k+1} & \text{si } k > i \end{array}$$

Les inclusions $t_i \longrightarrow (A_{PL})_n$ et $y_i \longrightarrow (A_{PL})_n$ se prolongent en isomorphisme de cochaines d'algèbres

$$\wedge(t_1, \ldots, t_n, y_1, \ldots, y_n) \longrightarrow (A_{PL})_n$$

.
Cette construction fonctorielle est possible pour n'importe quel objet simplicial, $\mathcal{K}$, en particulier pour un espace topologique, en considérant l'objet simplicial $\mathcal{K} = S^*(X)$, on définit alors un foncteur contravariant de la catégorie des espaces topologiques vers celle des adgc.

$$X \longrightarrow A_{PL}(X)$$

Les éléments de $A^p_{PL}(X)$ associent a chaque p-simplexe singulier de X une p-forme polynômiale de Δ_n compatible avec les applications faces et dégénérance. D'où le nom $A_{PL}(X)$ est l'ensemble des formes différentielles polynômiales à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Une PL-forme de degré p sur X est une application $\omega : S^*(X) \longrightarrow \Omega^p(\Delta^*, \mathbb{Q})$ où $\Omega^p(\Delta_*, \mathbb{Q})$ designe l'ensemble des p-formes différentielles définies sur $\Delta^* = \bigoplus_{p\geq 0} \Delta^p$ qui commute avec les opérateurs face et dégénerance, et vérifiant : $\omega_\sigma \in \Omega^p(\Delta^q, \mathbb{Q})$ pour tout $\sigma \in S^q(X)$.
$A^p_{PL}(X)$ est le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de ces PL-formes, et on pose

$$A_{PL}(X) = \bigoplus_{p\geq 0} A^p_{PL}(X)$$

qu'on peut munir d'une structure d'adgc.

Théorème de Sullivan-Whitney-Thom.
L'intégration des PL-formes induit un isomorphisme naturel

$$H^*(A_{PL}(X), d) \longrightarrow H^*(X, \mathbb{Q})$$

Vocabulaire.
Un modèle minimal de $(A_{PL}(X), d)$ s'appelle modèle minimal de X.[1]

[1]Voir page 38, pour la définition de modèle minimal.

.

8 Suites spectrales.

8.1 Introduction.

Une suite spectrale est un objet algébrique naturellement associée à un complexe différentiel $(C = \bigoplus\limits_{k\geq 1} C^k, d)$ muni d'une filtration décroissante $C = C_0 \supset C_1 ... \supset C_n \supset 0$ qui est préservée par la différentielle i.e. $d(C_p) \subset C_p$.
La suite spectrale est constituée de "pages" $E_r = (E^r_{p,q}, d_r)$ qui sont des complexes différentiels bi-gradués, avec d_r une différentielle de bi-degré $(r, -r+1)$ i.e :

$$d_r : E^r_{p,q} \longrightarrow E^r_{p+r,q-r+1}$$

La propriété fondamentale de la suite spectrale est que :

$$E_{r+1} = H(E_r), \quad d = \sum_i d_i$$

Dans de nombreuses situations intéressantes, par exemple, lorsque la filtration est finie, les groupes $E^r_{p,q}$ se stabilisent pour r assez grand. La suite spectrale $(E_r)_{r\geq 1}$ converge alors vers la cohomologie $H(C)$ du complexe initial filtrée.

8.2 Construction de la suite spectrale.

On pose $A = \bigoplus\limits_{p\geq 0} C_p$ et $B = \bigoplus\limits_{p\geq 0} C_p/C_{p+1}$, soient $j : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ C_{p+1} & \hookrightarrow & C_p \end{array}$ injection et $j : A \longrightarrow B$ la surjection canonique, d'où la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} A \xrightarrow{j} B \longrightarrow 0$$

qui induit en cohomologie une suite exacte longue

$$\ldots \longrightarrow H^k(A) \xrightarrow{i_1} H^k(A) \xrightarrow{j_1} H^k(B) \xrightarrow{k_1} H^{k+1}(A) \longrightarrow \ldots$$

et on pose

$$d_1 = j_1 \circ k_1$$

On peut formuler cette construction ainsi : tout triangle exacte

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "i"] & & A \arrow[dl, "j"] \\ & B \arrow[ul, "k"] & \end{tikzcd}$$

induit en cohomolgie un autre triangle exacte

$$\begin{array}{ccc} A_1 = H(A) & \xrightarrow{i_1} & A_1 H(A) \\ k_1 \nwarrow & & \swarrow j_1 \\ & B_1 = H(B) & \end{array}$$

et ainsi de suite, on construit la suite (E_r, d_r) définie par :

$$\begin{array}{ll} E_1 = B_1 = H(B) & d_1 = j_1 \circ k_1 \\ E_2 = H(E_1) & d_2 = j_2 \circ k_2 \end{array}$$

.

9 Théorème de Cartan.

9.1 Définitions préliminaires.

Modèle minimal. On dit que $(\wedge V, d)$ est un modèle minimal fini *si et seulement si* :
- $\dim V < +\infty$.
- Il existe une base $(x_1, \dots, x_n)$ tel que $\deg x_1 \leq \dots \deg x_n$ et vérifiant $dx_i \in \wedge(x_1, \dots, x_{i-1})$ pour tout $i \in \{1, \dots n\}$.

Modèle minimal elliptique. Un modèle minimal $(\wedge V, d)$ est dit elliptique *si et seulement si*
- $\dim H^*(\wedge V, d) < +\infty$.
- $dx_1 = 0$ et $dx_i \in \wedge^{\geq 2}\{x_1, \dots x_{i-1}\}$.

Modèle pur. Un modèle minimal $(\wedge V, d)$ est dit pur *si et seulement si*
- $dV^{\text{pair}} = 0$.
- $dV^{\text{impair}} \subset V^{\text{pair}}$.

$(E_0 = \wedge V, d_0)$ le 1ér élément de la suite spéctrale est un modèle pur dit modèle pur associé à $(\wedge V, d)$.

La caractéristique d'Euler . Elle est définie pour tout module gradué, V à l'aide de la relation :

$$\chi(V) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \dim V^k$$

L'invariant cohomologique d'Euler-Poincaré . Elle est définie pour tout espace topologique, X à l'aide de la relation :

$$\chi_c(X) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \dim H^k(X, \mathbb{Q})$$

L'invariant homotopique d'Euler-Poincaré. Elle est définie pour tout espace topologique, X à l'aide de la relation :

$$\chi_\pi(X) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \dim(\pi_k(X) \otimes \mathbb{Q})$$

9.2 Exemple fondamental.

Soit $(\wedge V \otimes \wedge y, d)$ un modèle minimal tel que y de degré impair, et la suite exacte courte définie par

$$0 \longrightarrow \wedge V \xrightarrow{\phi} \wedge V \otimes \wedge y \xrightarrow{\psi} \wedge V \longrightarrow 0$$

définie par

$$\begin{array}{rcl} \phi(a) & = & a \otimes 1 \\ \psi(a \otimes y + b \otimes 1) & = & a \end{array}$$

Elle induit en cohomologie une suite exacte longue dont le connectant est définie par :

$$\begin{array}{cccc} \delta : & H^*(\wedge V, d) & \longrightarrow & H^*(\wedge V, d) \quad \text{où } \alpha = [dy] \\ & \beta & \longmapsto & \beta\alpha \end{array}$$

En effet : Respectant l'esprit de la démonstration du théorème 5.2, soit donc b un cycle tel que $[b] = \beta$, on a : $b = \psi(b \otimes y), d(b \otimes y) = bdy \otimes 1$ car $db = 0$, (cycle) et car $dy \in \wedge V$, (modèle minimal). D'autre part $\phi(bdy) = bdy \otimes 1$ et donc $\delta[b] = [bdy]$, ce qu'il fallait démontrer.
Rappelons enfin que cette suite exacte longue donne naissance à son tour à la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \text{coker}\delta \longrightarrow H^*(\wedge V, d) \longrightarrow \ker\delta \longrightarrow 0$$

9.3 Énoncé

Soit $(\wedge V, d)$ un modèle connexe elliptique alors :

$$\chi_\pi \leq 0 \quad \text{et} \quad \chi_c \geq 0$$

Avec l'équivalence suivante

$$\chi_\pi = 0 \quad \textit{si et seulement si} \quad \chi_c > 0$$

9.4 Démonstration.

Lemme 1. Soit (C, ∂) une adgc telle que $\dim H_*(C, \partial) < +\infty$ alors :

$$\chi(C) = \chi(H_*(C, \partial))$$

Preuve. On a $\partial_k : C_k \to C_{k-1}$, donc $Z_k(C) = \ker\partial_k$, $B_k(C) = \text{Im}\partial_{k+1}$, d'aprés la formule du rang on a $\dim C_k = \dim Z_k(C) + \dim B_{k-1}(C)$, or $\dim H_k(C, \partial) = \dim Z_k(C) - \dim B_k(C)$, donc
$\dim C_k - \dim H_k(C, \partial) = -(\dim B_k + \dim B_{k-1})$, d'où $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \dim C_k - \chi_C(X) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^{k+1}(\dim B_k + \dim B_{k-1}) = \dim B_0 + \dim B_{-1} - \dim B_1 + \dim B_2 + \ldots = 0$, car la somme alternée avec la convention $C_{-1} = 0$ et vu que la suite $\dim B_k$ est nulle à partir d'un certain rang.

Vocabulaire. $b_k = \dim H_k(C, \partial)$ s'appelle k-ème nombre de Betti.

Conséquence. Soit $(\wedge V, d)$ un modèle minimal elliptique et $(\wedge V, d_0)$ son modèle pur associé alors :

$$\chi(\wedge V, d) = \chi(\wedge V, d_0)$$

En effet : La suite spectrale (E_r, d_r) converge vers $H(\wedge V, d)$ et comme $E_{r+1} = H(E_r)$ alors $\chi(E_{r+1}) = \chi(E_r)$ et que $E_0 = (\wedge V, d_0)$ alors $\chi(\wedge V, d) = \chi(\wedge V, d_0)$.

Remarque. Ceci nous permet de supposer que le modèle est minimal pour χ_c, d'autre part l'invariant homotopique χ_c ne dépond pas de la différentielle on peut supposer dans tout le théorème que le modèle est pur.

Lemme 2. On pose $V^{pair} = Q, V^{impair} = P$, et

$$\begin{aligned}\lambda_r &= \sum_{k\geq 0}(-1)^k \dim(\wedge Q\otimes\wedge^k P)^{r-k}\\ \mathcal{U}_{\wedge V}(z) &= \sum_{r\geq 0}\lambda_r z^r \qquad\qquad \text{(série formelle)}\end{aligned}$$

alors $\lambda_r = 0$ à partir d'un certain rang, en particulier $\mathcal{U}_{\wedge V}(z)$ est un polynôme en z.
De plus

$$\chi_c = \mathcal{U}_{\wedge V}(1)$$

Preuve. Posons $C_r = \bigoplus_{k\geq 0}(\wedge Q\otimes\wedge^k P)^{r-k}$, soit $v \in \wedge Q\otimes\wedge^k P)^{r-k}$ alors $\deg v$ pair *si et seulement si* k pair, ainsi on aura

$$\begin{aligned}C_r^{pair} &= \bigoplus_{k\ pair}(\wedge Q\otimes\wedge^k P)^{r-k}\\ C_r^{impair} &= \bigoplus_{k\ impair}(\wedge Q\otimes\wedge^k P)^{r-k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{d'où}\quad \lambda_r &= \sum_{k\ pair}\dim(\wedge Q\otimes\wedge^k P)^{r-k} - \sum_{k\ impair}\dim(\wedge Q\otimes\wedge^k P)^{r-k}\\ &= \dim C_r^{pair} - \dim C_r^{impair}\\ &= \chi(C_r)\end{aligned}$$

Or d diminue la longueur du mot, car $dx = 0$ si deg x pair et $dy \in \wedge Q$ si deg y impair (le modèle est pur).
D'autre part d augmente le degré d'où

$$d\left((\wedge Q\otimes\wedge^k P)^{r-k}\right) \subset (\wedge Q\otimes\wedge^{k-1}P)^{r-k+1}$$

et par suite

$$d(C_r) \subset C_r$$

D'où (C_r, d) une adgc, et donc $\lambda_r = \chi(C_r) = \chi(H(C_r, d)) = \sum_{k\geq 0}\dim H_k^{r-k}(\wedge V, d)$.

Or $\wedge V = \bigoplus_{r\geq 0} C_r$ et $\dim H(\wedge V, d) < +\infty$ d'où $\sum_{r\geq 0}\dim H(C_r) < +\infty$, d'où $H(C_r) = 0$ à partir d'un certain rang et donc $\lambda_r = 0$ à partir du même rang.
Enfin $\wedge V = \bigoplus_{r\geq 0} C_r$, doù $\chi_c = \chi(\wedge V) = \sum_{r\geq 0}\chi(C_r) = \sum_{r\geq 0}\lambda_r = \mathcal{U}_{\wedge V}(1)$.

Lemme 3.

Si deg $x = 2a$, alors :

$$\mathcal{U}_{\wedge Vx}(z) = \frac{1}{1 - z^{2a}}$$

Si deg $y = 2b - 1$, alors :

$$\mathcal{U}_{\wedge Vy}(z) = 1 - z^{2b}$$

Preuve.
- 1ér cas : deg $x = 2a$, alors $\wedge x = \wedge V$ avec $\wedge P = \wedge x = \mathbb{K}[x]$ et $Q = 0$, et donc $(\wedge Q \otimes \wedge^k P)^{r-k} = 0$ si $k \neq 0$ car on n'a aucun élément de degré impair pour former avec des mots de longueurs k, et donc $\lambda_r = \dim(\wedge x)^r = \dim(\mathbb{K}[x])^r$ or les seuls degré possibles dans $\mathbb{K}[x]$ sont $2ap$, d'où $\lambda_r = \dim(\mathbb{K}[x])^r = 0$ si $r \neq 2ap$ et $\lambda_{2ap} = \dim(\mathbb{K}[x])^{2ap} = \dim \mathbb{K}x^p = 1$, d'où $\mathcal{U}_{\wedge x}(z) = \sum_{p \geq 0} z^{2ap} = \dfrac{1}{1 - z^{2a}}$.
- 2ème cas : deg $y = 2b - 1$, alors $\wedge y = \wedge V$ avec $\wedge Q = \wedge y = \mathbb{K}_1[y]$ et $P = 0$ et donc $(\wedge Q \otimes \wedge^k P)^{r-k} = 0$ si $k \notin \{0, 1\}$ car on 'a qu'un seul élément de degré impair c'est y, donc il ne peut y'avoir que des mots de longueurs 0 ce sont ceux de $\mathbb{K}$ ou de longueur 1 ce sont ceux de $\mathbb{K}y$, d'où $\lambda_r = \dim(\wedge^0 y)^r - \dim(\wedge^1 y)^{r-1} = \dim(\mathbb{K})^r - \dim(Ky)^{r-1}$ or les éléments de $\mathbb{K}$ sont de degré nul et ceux de $\mathbb{K}y$ de degré égal à $2b - 1$, d'où $\dim(\mathbb{K})^r = 0$ si $r \neq 0$ et $\dim(Ky)^{r-1} = 0$ si $r - 1 \neq 2b - 1$ on conclut alors que $\lambda_r = 0$ si $r \notin \{0, 2b\}$ avec $\lambda_0 = \dim(\wedge^0 y)^0 = \dim \mathbb{K} = 1$ et que $\lambda_{2b} = -\dim(\wedge^1 y)^{2b-1} = \dim(\mathbb{K}y) = 1$, d'où $\mathcal{U}_{\wedge y}(z) = 1 - z^{2b}$.

Lemme 4.

$$\mathcal{U}_{\wedge V \otimes \wedge W}(z) = \mathcal{U}_{\wedge V}(z)\mathcal{U}_{\wedge W}(z)$$

Preuve. Comme on a 3 algébres libres donc 3 séries formelles les coéfficients λ_r seront indéxés par l'algébre libre associée, et on écrira plutôt

$$\begin{aligned} \lambda_r(\wedge V) &= \sum_{k \geq 0} (-1)^k \dim(\wedge Q \otimes \wedge^k P)^{r-k} \\ \mathcal{U}_{\wedge V}(z) &= \sum_{r \geq 0} \lambda_r(\wedge V) z^r \qquad \text{(série formelle)} \end{aligned}$$

et alors

$$\mathcal{U}_{\wedge V}(z)\mathcal{U}_{\wedge W}(z) = \left(\sum_{r \geq 0} \lambda_r(\wedge V) z^r\right)\left(\sum_{r \geq 0} \lambda_r(\wedge W) z^r\right) = \sum_{r \geq 0}\left(\sum_{\alpha + \beta = r} \lambda_\alpha(\wedge V)\lambda_\beta(\wedge W)\right) z^r.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha(\wedge V)\lambda_\beta(\wedge W) &= \left(\sum_{p \geq 0} \dim H_p^{\alpha - p}(\wedge V)\right)\left(\sum_{q \geq 0} \dim H_q^{\alpha - q}(\wedge W)\right) \\ &= \sum_{k \geq 0} (-1)^k \left(\sum_{p + q = k} \dim H_p^{\alpha - p}(\wedge V) \dim H_q^{\alpha - q}(\wedge W)\right) \\ &= \sum_{k \geq 0} (-1)^k \dim H_k^{\alpha + \beta - k}(\wedge V \otimes \wedge W) \end{aligned}$$

La dérnière égalité s'obtient à partir de la formule de Kunneth

$$H(\wedge V \otimes \wedge W) = H(\wedge V) \otimes H(\wedge W)$$

En particulier
$$H^k(\wedge V\otimes\wedge W)=\bigoplus_{p+q=k}H^p(\wedge V)\otimes H^q(\wedge W)$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{\alpha+\beta=r}\lambda_\alpha(\wedge V)\lambda_\beta(\wedge W) = \sum_{k\geq 0}(-1)^k\dim H_k^{r-k}(\wedge V\otimes\wedge W) = \lambda_r(\wedge V\otimes\wedge W)$

Et finalement : $\displaystyle\mathcal{U}_{\wedge V}(z)\mathcal{U}_{\wedge W}(z) = \sum_{r\geq 0}\lambda_r(\wedge V\otimes\wedge W)z^r = \mathcal{U}_{\wedge V\otimes\wedge W}(z)$

Démonstration du théorème. Soit $\{x_1,\ldots,x_q,y_1,\ldots,y_p\}$ base de V tel que $\deg x_i=2a_i$ et $\deg y_j=2b_j-1$, on a donc :
$$\mathcal{U}_{\wedge V}(z) = \prod_{i=1}^{q}\mathcal{U}_{\wedge x_i}(z)\prod_{j=1}^{p}\mathcal{U}_{\wedge y_j}(z) = \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{p}1-z^{2b_i}}{\displaystyle\prod_{j=1}^{q}1-z^{2a_j}}$$

Ainsi 1 est une racine de $\mathcal{U}_{\wedge V}(z)$ de multiplicité $p-q$ or $\mathcal{U}_{\wedge V}(z)$ est un polynôme d'où $\chi_\pi=q-p\leq 0$
D'autre part si $\chi_\pi<0$, 1 serait une racine de $\mathcal{U}_{\wedge V}(z)$, donc $\chi_c=\mathcal{U}_{\wedge V}(1)=0$

Si $\chi_\pi=0$, alors $p=q$ et donc $\chi_c=\mathcal{U}_{\wedge V}(1)=\dfrac{\displaystyle\prod_{i=1}^{p}2b_i}{\displaystyle\prod_{j=1}^{q}2a_j}>0$

Remarques.
– Le théorème de Cartan affirme aussi l'équivalence suivante :

$$\chi_\pi=0 \quad \textit{si et seulement si} \quad \chi_c>0 \quad \textit{si et seulement si} \quad H^{impair}(\wedge V,d)=0$$

– $\chi_\pi=0\Longrightarrow X$ pur.

.

10 La conjecture (H) de la dimension cohomologique.

La conjecture est la suivante :
Si X est un CW-complexe fini 1-connexe, elliptique alors :

$$\dim H^*(X,\mathbb{Q}) \geq dim(\pi_*(X)\otimes\mathbb{Q})$$

Conjecture qu'on peur formuler algébriquement, en considérant $(\wedge V,d)$ modèle minimal de X de la façon suivante

$$\dim H^*(\wedge V,d) \geq \dim V$$

Dans ce qui suit on se fera un plaisir mais aussi un honneur de rappeller les résultats étabils par Mr. M.R Hilali dans ce contexte.

Théorème 1. Si X est un espace hyperelliptique, la conjecture (H) est vrai dans les cas suivants :

1) X pur.

2) $\dim(\pi_{\text{pair}}\otimes\mathbb{Q}) \geq \frac{1}{2}(1+\sqrt{-12\chi_\pi(X)-15})$.

On rappelle qu'un CW-complexe fini 1-connexe, X est dit hyperelliptique s'il existe une fibration $F\longrightarrow X\longrightarrow B$ telle que :
– $H^*(F,\mathbb{Q})=\wedge A^{\text{impair}}$ où A est un espace vectoriel.
– $\dim(\Omega B,\mathbb{Q})<+\infty$.

Corollaire 1. La conjecture (H) est vraie si X est hyperelliptique tel que :

$$rk_0(X)+\chi_\pi(X)\in\{0,-1,-2\}$$

On rappelle ici quelques définitions préliminaires pour ce corollaire.
– $T^k=(S^1)^k$ s'appelle tore.
– Si G est un groupe qui agit sur X, pour $x\in X$ l'ensemble

$$G_x=\{g\in G \text{ tel que } g.x=x\}$$

s'appelle sous-groupe d'isotropie en x, l'action de G sur X est dite presque libre si G_x est fini pour tout $x\in X$.
– Le rang torique de X est défini par la relation :

$$rk_0(X)=\max\{k\in\mathbb{N} \text{ tel que } T^k \text{ agit presque librement sur } X\}$$

Corollaire 2. La conjecture (H) est vérifiée pour un espace elliptique 1-connexe de dimension formelle inférieur à 10.

On rappelle que la dimension formelle d'un espace vectoriel gradué A fini est l'entier naturel

$$fd(A) = \max\{k \in \mathbb{N} \text{ tel que } A^k \neq 0\}$$

et que pour un espace topologique elliptique, X elle est définie par la relation

$$fd(X) = fd(H^*(X, \mathbb{Q}))$$

Théorème 2. La conjecture (H) est vrai pour un espace elliptique 1-connexe de codimension inférieur à 6.

On rappelle encore une fois que la codimension d'un CW-complexe fini, notée $\mathrm{codim}(X)$ est définie par la relation

$$\mathrm{codim}(X) = fd(X) - rk_0(X)$$

Théorème 3. Soit X un espace elliptique rationnel, 1-connexe tel que $\pi_{\text{pair}} \otimes \mathbb{Q} = 0$, et $(\wedge V, d) = \wedge(\{y_1, \dots y_n\}, d)$ le modèle minimal associé, on pose $A_i = H^*(\wedge\{y_1, \dots, y_i\}, d)$ et

$$\begin{array}{cccc} \delta_i : & A_{i-1} & \longrightarrow & A_{i-1} \\ & \beta & \longmapsto & \alpha_i\beta \end{array} \qquad \text{où } \alpha_i = [dy_i]$$

La cojecture (H) est vérifiée si

$$\dim(\mathrm{Ker}\delta_i) > \dim(\mathrm{Im}\delta_i) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Corollaire 3. Avec les mêmes notations et hypothèses que le théorème ci-dessus, on a la conjecture (H) est vraie si

1) $\alpha_i^2 = 0 \quad \forall i \geq 3$.

2) Pour tout $i \geq 3$, ils existent $\gamma_{i,1}, \gamma_{i,2} \in A_i^+$ tels que :

$$\alpha_i = \gamma_{i,1}\gamma_{i,2} \text{ et } \gamma_{i,1}^2 = 0$$

.

Références

[1] R. Hilali *Modèles elliptiques* Cours de topologie algébrique DESA, Faculté des sciences de Casablanca, 2005.

[2] R. Hilali *Sur une minoration de la dimension cohomologique* , Article, 2005.

[3] R. Hilali *Sur la conjecture de Halperin relative au rang torique*, Bulletin belge de la sociéte mathématique, 2000.

[4] R. Hilali *Action du tore sur les espaces simplement connexes*,Thèse d'état, université catholique de Louvain, 1990.

[5] Y. Félix, S. Halperin, J-C. Thomas *Rational Homotopy Theory* Springer-Verlag, 2003.

[6] A. Oancea *La suite spectrale de Leray-Serre en cohomologie de Floer*, Thèse d'état Paris XI Orsay.

[7] T. Masson *Introduction à l'homologie et la cohomolgie avec exemples*, Laboratoire de physique théorique. Paris XI, 2003

[8] F. Paulin *Topologie algébrique élémentaire*, Cours de Magistère 2001-2002, ENS.

[9] J.C.H. Whitehead, *On adding relations to homotopy groups*, Ann. of Math. 1941.

[10] J.C.H. Whitehead, *Combinatorial homotopy I and II.* Bull.Amer.Math. Soc, 1941.

[11] H. Poincaré, *Ouevres complètes.* Volume 6, Gauthier Villar, 1953.

[12] E. Spanier, *Algebraic topology.* Tata Mc Graw-Hill, 1981.

[13] Y. Olivier, J. Riou, *Notions de cohomologie* Groupe de travail 2000-2001, ENS.

[14] G. Whitehead, *Elements of homotopy theory.* Springer-Verlag, 1957.

[15] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Presse, 2002.

[16] S. Halperin, *Finitness in the minimal models of Sullivan*, T.A.M.S, 1983.

[17] D.S. Sullivan, *Infinitesimal computation in topology*, I.H.E.S, 1983.

[18] F. Loeser, *Normale Sup Info*, Revue hebdo de l'ENS, Numéro 41, 21 Juin 2004.

Index

A

adg, 13
adgc, 13

B

bord, 3

C

Cartan, 5
catégorie, 4
cellulaire, 15
cellule, 15
cobords, 21
cocycles, 21
cohomologie, 18
complexe, 13
connexe, 25
contractiles, 27
Contraction, 27
Contraction progressive, 27
contravariant, 11
covariant, 11
CW-complexes, 15
cycles, 19

D

dégènérécence, 33
degré, 12
Différentielle, 13
dual, 12

E

elliptique, 38
Equivalence d'homotopie faible, 26
Euler, 38
exacte, 18

F

face, 21
Fibration, 30
filtration, 36
foncteur, 4

G

G-fibration, 31
gradué, 12
Groupe fondamental, 28

H

Hom, 12
Homologie, 18
Homologie simpliciale, 21
Homologie singulière, 23
Homotopie, 25
Hurweicz, 26
hyperelliptique, 43

I

invariant, 38

K

Kunneth, 41

L

lacet, 28
Lemme des serpents, 20
libre, 14

M

Modèle minimal, 33
Moore, 31
morphismes, 11

P

Poincaré, 3
pur, 38

Q

Quasi-isomorphisme, 19

R

rétraciles, 27
Rétraction, 27

S

simplexe, 21
Simplexe singulier, 23
sommets, 21
squelette, 16
suite exacte courte, 19
suite exacte longue, 20
Suites spectrales, 36
Sullivan, 33

T

tensoriel, 12
triangulable, 22