Université Hassan II Ain Chock
Faculté des Sciences
Casablanca

Thèse de

DOCTORAT

En Sciences mathématiques fondamentales
Option : Topologie algèbrique

Intitulé : *La conjecture H*
Une minoration de la dimension cohomologique pour un espace elliptique

Présentée et soutenue publiquement par

MY ISMAIL MAMOUNI

Le 31/10/2009 à la Faculté des Sciences Ain Chock, Casablanca

Président du jury :	Mohamed Bouchoum	Univ. Casablanca, Maroc
Rapporteurs :	Hinda Hamraoui	Univ. Casablanca, Maroc
	Aniceto Murillo	Univ. Malaga, Espagne
	Hamid Abchir	Univ. Casablanca, Maroc
Examinateurs :	Mohammed El Haouari	Univ. Lille 1, France
	Youssef Rami	Univ. Meknes, Maroc
Directeur de thèse :	Mohamed Rachid Hilali	Univ. Casablanca, Maroc

بِسمِ اللّٰهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ

وَ قُلِ إعمَلُوا فَسَيَرَى اللّٰهُ عَمَلَكُمْ وَ رَسوُلَهُ وَ المُؤمِنِين

صَدَقَ اللّٰهُ العَظِيم

Et dis : "Oeuvrez, car Dieu va voir votre oeuvre, de même que Son messager et les croyants".

بِسمِ اللّٰهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ

رَبَّنَا إغفِر لِي و لِوَالِدَى و لِلمُؤمِنِينَ يَومَ يَقُومُ الحِسَاب

صَدَقَ اللّٰهُ العَظِيم

« Ô notre Seigneur ! Pardonne-moi, ainsi qu'à mes père et mère et aux croyants, le jour de la reddition des comptes".

On peut déjà prédire sans grand risque d'erreur que le XX$^{\text{ème}}$ siècle restera dans l'histoire des mathématiques comme le siècle de la Topologie...

J.Dieudonné.

Dédicace

* ********** *
* *
* *
* *
* À mon père *
* *
* *
* *
* ********** *

À qui je n'ai jamais offert de cadeau
À celui qui tenait le plus à ce cadeau

Remerciements

Cette thèse est le fruit de trois années de recherche (2006-2008), au sujet d'une conjecture d'homotopie rationnelle. Elle n'aurait pu voir le jour sans la considération et la bienveillance des personnes rencontrées tout au long de ces années.

C'est pourquoi, en premier lieu, je tiens à remercier vivement mon directeur de thèse, *Mohamed Rachid Hilali*, d'avoir accepté de me confier un sujet auquel il tenait beaucoup ; c'était sa conjecture comme il disait modestement : *La Conjecture H.* Il était très patient, toujours disponible à m'éclairer. Par conséquent, j'ai pu tiré un grand profit de son savoir et de son expérience, comme de sa grande réputation dans le monde des chercheurs en homotopie rationnelle. Ainsi, ma participation au colloque d'Angers, en France (où j'ai été bien accueilli), n'a été un succès que grâce à la réputation dont jouit M. R. HILALI. En fait, M.R Hilali, était plus qu'un encadrant : je le voyais comme un grand frère, généreux et toujours présent dans les moments difficiles. J'espère que j'étais à la hauteur de sa confiance en moi.

D'autre part, ce travail n'aurait jamais abouti sans le dévouement de ma femme, *Lamya Ouichou* qui, en supportant toutes les lourdes tâches de gestion du quotidien de notre petite famille, en plus de celles de son travail, m'a permis de me consacrer complétement à mes recherches. Qu'elle trouve ici mes sincères gratitudes.

Je remercie sincèrement *Mohamed Bouchoum* qui m'a fait l'honneur de présider mon Jury. Je tiens à remercier particulièrement les rapporteurs : *Hinda Hamraoui, Aniceto Murillo et Hamid Abchir* qui ont lu minutieusement une première version du manuscrit et y ont relevé des erreurs, des incohérences, des points obscurs et des maladresses de toutes sortes. Par ailleurs, je tiens à remercier également mes examinateurs : *Mohamed El Haouari et Youssef Rami*, leurs remarques et leurs suggestions ont grandement amélioré la qualité de mon travail.

De même, je tiens à remercier *Abdellatif Rochdi*, qui en plus du cours d'algèbre qu'il nous enseignait, nous donnait l'exemple du chercheur dévoué, ponctuel, exigeant mais aussi tolérant. Je n'oublierai jamais son soutien ni celui de M.R. Hilali à mon égard dans les moments difficiles où j'allais tout abandonner. Je ne manquerai pas de remercier aussi *Hinda Hamraoui*, mon professeur de K-Theory en DESA. Elle suivait de prés mes travaux, m'aidait souvent dans la préparation de mes exposés, et faisait de son mieux pour me trouver de l'aide financière.

D'un autre côté, préparer une thèse est parfois plus une question de moyens financiers que de soutien moral. A ce propos, je remercie *Jean Claude Thomas* et *Kathryn Hess*, qui en tant qu'organisateurs des conférences en topologie algébrique respectivement à Angers en France (Octobre 2007) et à Arolla en Suisse (Août, 2008), m'ont fait bénéficier de l'aide financière pour participer à ces événements internationaux. Plus encore, ils étaient chaleureux et accueillants durant mon séjour. Et, si mes exposés dans ces conférences se sont bien passés, c'est en grande partie grâce à leur soutien et à leurs conseils. Nos contacts ont bien continué

après. Ainsi, J.C Thomas s'est impliqué volontairement dans la rédaction de mon article qui a été accepté d'ailleurs à "*Topology and its Applications*" (voir page 66). L'histoire de l'homotopie rationnelle, reprise dans le chapitre 1 de ma thèse (cf. page 2), est un résumé de l'article de K. Hess [Hs99], qu'elle a tenu à m'envoyer par courrier, avec en plus sa signature et un petit mot sympathique.

Toujours est-il que la participation à la conférence d'Angers m'a permis de connaître d'imminents chercheurs en homotopie rationnelle qui se sont intéressés à mes travaux de recherche tels *Yves Felix*, *Lionel Schwartz* et *Micheline Viguè*. Cette dernière m'encourageait à persévérer pour arriver à publier mes travaux. Et, malgré ses nombreuses occupations, elle lisait mes essais, les corrigeait quand il le fallait. Ainsi, grâce à sa bienveillance et à ses remarques d'experte, j'ai réussi à démontrer le résultat le plus important de ma recherche, en l'occurrence le Théorème 3.3.2, page 39. Cela m'a beaucoup réjoui.

J'avoue que la publication de mes deux articles ne fut pas possible sans les encouragements de *Pascal Lambrechts* et *Paul Goerss*. La première version de mon article acceptée dans "*Topology and its Applications*" était écrite dans un anglais horrible. Mais, grâce à la confiance et à la bienveillance de *P. Goerss*, l'article en question a été accepté et publié. Par la même occasion, je tiens à remercier *Barry Jessup* qui, malgré ses lourdes tâches scientifiques et administratives, me donnait de son temps pour m'initier à la rédaction en anglais scientifique.

Enfin, je ne saurai jamais assez remercier mes élèves des Classes Préparatoires pour leurs encouragements et pour l'intérêt qu'ils portent à mes travaux de recherche, ni exprimer ma reconnaissance à mes deux enfants Wassim (5 ans et 1/2) et Naim (1 an et 1/2), dont le seul regard ou sourire me faisait oublier la souffrance du quotidien et me donnait des forces pour continuer mes recherches avec confiance et acharnement.

Table des matières

Chapitre 1

Aperçu historique

L'homotopie rationnelle est une branche relativement récente de la topologie algébrique, fondée vers la fin des années 1960 par *Daniel Quillen*[1] et *Denis Sullivan*[2]. Pour mieux comprendre leurs motivations, il faut remonter le temps un peu plus loin, vers la fin du 19ème siècle avec les travaux de Henri Poincaré. C'est là que l'histoire a commencé. Dans cet aperçu historique, nous nous sommes inspirés du précieux travail de recherche effectué par *Kathryn Hess* dans [Hs99].

Les racines.

Dans *Analysis Situs* [Poi1895], Henri Poincaré a posé les premiers jalons pour les futurs chercheurs en homotopie rationnelle, en expliquant comment on peut obtenir des informations sur la topologie d'une variété différentielle M, en étudiant l'algèbre extérieure engendrée par les 1-formes munies de la différentielle extérieure, qui sera appelée dans le suite algèbre de *De Rham*[3], notée $\Omega^*_{DR}(M)$. Il s'était surtout interessé surtout au morphisme induit par l'intégration de la cohomolgie de De Rham réelle de M, défini de $H^*(\Omega^*_{DR}(M), \mathbb{R})$ vers sa cohomologie singulière réelle $H^*(M, \mathbb{R})$.

Inspiré par les travaux de H. Poincaré, Elie Cartan [4], avait conjecturé en 1928 dans [Ca28] que l'intégration induit un isomorphisme entre $H^*(\Omega^*_{DR}(M), \mathbb{R})$ et $H^*(M, \mathbb{R})$. Un an après, De Rham avait démontré dans [dRh31] la conjecture de Cartan qui depuis s'appelle *Théorème de De Rham*. H. Hopf avait continué sur la même voix en 1939 en étudiant la cohomologie réelle des groupes de Lie compacts et connexes. H. Samelson a appliqué les mêmes méthodes pour étudier la cohomologie des espaces homogènes.

Les prémices des modèles

Vers la fin des années 1940, des topologues de renommée ont commencé à s'intéresser à l'idée de construire des modèles algébriques sur $\mathbb{R}$ pour certaines classes d'espaces to-

[1] Daniel Quillen, américain (1940, -) medaillé Fields en 1978 pour ses travaux en topologie algébrique et K-théorie.

[2] Dennis Parnell Sullivan (1941,-) mathématicien américain, connu pour ses travaux en topologie algébrique et géométrique, ainsi qu'aux systèmes dynamiques, Prix Élie Cartan (1981) et Prix AMS Steele (2006).

[3] Georges De Rham, suisse, 1903-1990, encadré par Henri Lebesgue

[4] Elie Joseph Cartan, français, 1869-1951, père de Henri Cartan, encadré par G. Darboux et M.S Lie.

pologiques. Leur idée consistait à trouver des algèbres de cochaînes commutatives dont la cohomolgie singulière réelle est isomorphe à celle de l'espace topologique considéré.

Entre 1948 et 1956 *Guy Hirsh* fut l'un des premiers à utiliser les modèles algébriques pour déterminer la cohomolgie réelle de l'espace total d'une fibration connaissant celles de la base et de la fibre. En même temps, *Jean-Louis Koszul*[5] s'est intéressé au calcul de la cohomolgie réelle d'une algèbre de Lie.

Les premiers signes de la naissance de l'homotopie rationnelle sont apparus en 1954 dans le séminaire de H. Cartan, dans lequel *René Thom* avait participé. Ce qui distingue les travaux de R. Thom de ses prédecessurs est le fait que l'espace qu'il considérait n'est pas forcément une variété différentiable. Il pointait du doigt le problème fondamental de la théorie de l'homotopie rationnelle, celui d'associer canoniquement à tout espace "*raisonnable*", une cochaîne d'algèbres commutatives dont la cohomologie est isomorphe à celle de l'espace considéré. Il a conjecturé que c'etait possible pour les CW-complexes, et l' a démontré en 1957 dans le cas réel. Vingt ans après, *Swan* a résolu le problème dans la cas rationnel.

D'autres éminents topologues ont contribué autrement à la naissance de l'homotopie rationnelle sans utiliser des modèles algébriques. Les travaux précis et complets de *John Milnor* et *John Moore* sur les algèbres, coalgèbres, algèbre de Lie et algèbres de Hopf graduées ont énormèment influencé D. Quillen dans ses travaux pour associer à tout espace rationnel une algèbre de Lie sur $\mathbb{Q}$. En 1953 J.P. Serre fùt le premier à étudier la partie libre des groupes d'homotopie et d'homologie. Il a établi par exemple l'existence d'une équivalence d'homotopie rationnelle faible entre tout groupe de Lie, semi-simple, connexe et compact avec un produit fini de sphères de dimensions impaires.

La décennie des années soixante, a connu un mystérieux relâchement dans l'utilisation de modèles algébriques jusqu'à ce que Werner Greub, Steve Halperin et Ray Vanstone publient [GHV76]. Le volume III, plus précisément expose en détail les notions des modèles de Cartan, Chevalley, Koszul, Weil,... qui se sont avérés très utiles pour le développement de l'homotopie rationnelle.

Les maîtres

Daniel Quillen. En 1967, D. Quillen dans [Qu67] présentait à la communauté mathématique dans un cadre axiomatique la théorie de l'homotopie. Deux ans après dans [Qu69], il fonda les bases de l'homotopie rationnelle. Son résultat le plus important reste celui que :

L'étude du type d'homotopie rationnelle de tout espace simplement connexe pointé revient à l'étude de celle du type d'homotopie d'une $\mathbb{Q}$-algèbre de Lie.

Il a aussi répondu positivement à un problème posé par Hopf :

Toute $\mathbb{Q}$-algèbre de Lie graduée représente le type d'homotopie d'un espace topologique.

Les travaux de D. Quillen représentaient une étape cruciale dans le développement de l'homotopie rationnelle, en justifiant théoriquement la fiabilité des modèles algébriques comme outils pour déterminer le type d'homotopie rationnelle d'un espace topologique. Toutefois ces travaux souffraient d'un défaut de taille : Les calculs s'avéraient en général difficiles voire impossibles.

[5]Jean-Louis Koszul (1921-), mathématicien français, membre de l'Académie des sciences depuis 1980.

D. Sullivan. Vers les débuts des années 1970, D. Sullivan s'attaqua à ce problème de calculs. Motivé par les travaux de H. Whitney, il a défini pour tout espace topologique X un modèle dual au modèle de Quillen. Le modèle de D. Sullivan se note $A_{PL}(X)$ (cf. §2.1.6, page 21). Il a publié dans [Su73] ses premiers résultats, et a signalé la possibilité d'appliquer ses modèles pour la résolution de problèmes géométriques tels que l'étude des périodes non abéliennes dans une variété différentielle. C'est dans [Su77] qu'il a exposé les détails de sa notion de *modèle minimal* (c.f. 2.1.6, page 21). Sa philosophie était que :

Toute construction géométrique raisonnable sur un espace topologique peut être reflétée par une autre finie, algébrique, à l'aide des modèles minimaux.

La relève

Une fois les fondations de l'homotopie rationnelle posées, D. Quillen et D. Sullivan se sont intéressés à d'autres domaines de recherche, mais l'homotopie rationnelle a continué son développement grâce à un noyau de remarquables chercheurs, tels Steven Halperin, Yves Félix, Jean-Claude Thomas, Micheline Vigué, Daniel Tanré,... Ce groupe a commencé à se former, quand en 1974 Daniel Lehmann, un expert dans la notion des classes caractéristiques et qui avait entendu parler des travaux de D. Sullivan, était intrigué du fait que d'un point de vue topologique l'algèbre des formes différentielles sur un complexe de chaînes contient plus d'information que son algèbre de cohomologie.

L'union fait la force

La similarité évidente entre les modèles de Sullivan et ceux de Quillen a convaincu les défenseurs de chaque camp de joindre leurs savoir faire. Ainsi en 1979 D. Lehman et Y. Félix ont organisé à Louvain en Belgique un colloque sur l'homotopie rationnelle dans lequel participèrent S. Halperin, J-C. Thomas, M. Vigué, H.J. Baues, J.M. Lemaire et autres. Une collection de 17 problèmes ouverts a été dressée à la fin du colloque, dont une partie reste non résolue jusqu'à nos jours. Y. Félix et J.-C. Thomas publièrent après une synthèse minutieuse de comparaison entre les différents modèles [FxTh81]. C'était le début de l'apogée de l'homotopie rationnelle, et beaucoup d'équipes de recherche commençaient à se former. Les fruits remarquables de cette collaboration ont sans doute été les résultats suivants, très connus en homotopie rationnelle : (cf. [FxHa82])

Mapping Theorem
Si X et Y sont deux espaces simplement connexes et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue induisant une injection sur les groupes d'homotopies rationnels, alors

$$cat(X) \leq cat(Y).$$

Théorème de dichotomie
Si X est un espace simplement connexe tel que $\dim H^*(X, \mathbb{Q}) < \infty$*, alors l'une des conditions suivantes est réalisée :*
- $\dim(\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}) < \infty$ (cas elliptique).
- $\dim(\pi_k(X) \otimes \mathbb{Q})$ croît de façon exponentielle (cas hyperbolique).

Rappelons qu'on dit qu'une suite réelle $(a_k)_k$ croît de façon exponentielle si

$$\exists\, 1 < \alpha \leq \beta,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \alpha^n \leq \sum_{k \leq n} |a_k| \leq \beta^n \quad \forall n \geq N.$$

L'eclipse

Vers la fin des années 1986, l'effervescence autour de l'homotopie rationnelle a commençé à s'atténuer, et les travaux de recherche sont orientés plus vers la théorie de l'homotopie modulo p.

Chapitre 2

Nos outils

2.1 Les définitions

2.1.1 Catégories et foncteurs

Généralités.

Définition 2.1.1 *Une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée :*
- *d'une collection d'objets,*
- *pour tout couple d'objets X, Y, d'un ensemble $Hom(X,Y)$ dont les éléments sont appelés morphismes (ou flèches), permettant de relier ces objets.*
- *pour tout triplet d'objets (X,Y,Z) et de morphismes $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, d'une application :*

$$\begin{array}{rccc} \circ : & Hom(X,Y) \times Hom(Y,Z) & \longrightarrow & Hom(X,Z) \\ & (f,g) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

appelée composition vérifiant les propriétés suivantes :
- *associativité : $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, pour tous f, g, h.*
- *élément neutre : pour tout objet X il existe un unique élément i_X dans $Hom(X,X)$ tel que pour tout autre object Y, on a $f \circ i_X = f$ pour tout $f \in Hom(X,Y)$ et $i_X \circ g = g$ pour tout $g \in Hom(Y,X)$.*

Exemples. Comme exemple de catégorie on peut citer :
- La catégorie des ensembles dont les morphismes sont les applications.
- La catégorie des espaces topologiques dont les morphismes sont les applications continues.
- La catégorie des groupes dont les morphismes sont les morphismes de groupes.
- La catégorie des espaces vectoriels dont les morphismes sont les applications linéaires.

Définition 2.1.2

– *Un foncteur covariant H entre deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$' est la donnée pour tout objet X de $\mathcal{C}$ d'un objet $H(X)$ de $\mathcal{C}$' et pour tout morphisme $f \in$ Hom(X,Y) de $\mathcal{C}$ d'un morphisme $H(f) \in \hom(H(X), H(Y)$ de $\mathcal{C}$' tel que*

$$H(i_X) = i_{H(X)} \text{ et } H(f \circ g) = H(f) \circ H(g).$$

– *Un foncteur contravariant H entre deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$' est la donnée pour tout objet X de $\mathcal{C}$ d'un objet $H(X)$ de $\mathcal{C}$' et pour tout morphisme $f \in$ Hom(X,Y) de $\mathcal{C}$ d'un morphisme $H(f) \in \hom(H(X), H(Y))$ de $\mathcal{C}$' tel que*

$$H(i_X) = i_{H(X)} \text{ et } H(f \circ g) = H(g) \circ H(f).$$

2.1.2 Homologie et cohomologie.

Cohomologie.

Définition 2.1.3 *Un complexe de cochaines est une suite de modules $(C^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et de morphismes de $\mathbb{Z}$-modules $d^n : C^n \to C^{n+1}$ tels que $d^{n+1} \circ d^n = 0$. Autrement dit Im$d^n \subset \ker d^{n+1}$.*

Vocabulaire et notations.

– Dans la suite le complexe de cochaînes sera noté simplement par (C, d) où

$$C = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} C^n \text{ et } d^n = d|_{C^n}.$$

– Les éléments de $\ker d$ s'appellent des *cocycles*, ceux de Imd des *cobords*.

– C'est *Emmy Noether*[1] qui fût la première à définir le groupe abélien qui mesure l'obstruction pour qu'un cocycle soit un cobord :

$$H^n(C,d) = \ker d^{n+1}/\mathrm{Im} d^n \qquad (p-\text{ème groupe de cohomologie})$$

– La *cohomologie* du complexe (C, d) est définie par la relation :

$$H^*(C,d) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H^n(C,d)$$

– Tout cocycle x définit un élément $[x]$ dans $H^*(C, d)$, appelée classe de cohomologie de x.

En particulier un cocycle est un cobord si et seulement si sa classe de cohomologie est nulle.

[1]Emmy Noether (1882-1935) est une mathématicienne allemande, connue pour ses contributions novatrices à l'algèbre abstraite et à la physique théorique. Elle a aussi révolutionné les théories des anneaux, des champs, et des algèbres.

Homologie. La définition de l'homologie est pareille que celle de la cohomologie, avec de légères modifications dans les notations et dans le vocabulaire. Ainsi, un *complexe de chaînes* (C,d) est la donnée d'une suite de modules $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de morphismes de modules $d_n : C^n \to C^{n-1}$ tels que $d_n \circ d_{n-1} = 0$. Les éléments de $\ker d$ s'appellent des *cycles*, ceux de Imd des *bords*. Les groupes d'homologie sont définis par la relation :

$$H_n(C,d) = \ker d_n / \mathrm{Im} d_{n-1}.$$

L'*homologie* du complexe (C,d) est définie par la relation :

$$H_*(C,d) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H_n(C,d)$$

Dualité homologie-cohomologie. Si (C,d) est un complexe de chaînes, on définit le complexe de cochaînes (C^*,d^*) dual, en posant :

$$C^n = \mathrm{Hom}(C_n,\mathbb{Z}) \text{ et } d^n = (d_{n+1})^*,$$

où $(d_n)^*$ désigne l'application transposée de d_n. Rappelons que dans le cas général :

Définition 2.1.4 *Si $f : X \longrightarrow Y$ est une application entre deux ensembles, alors son application transposée notée f^* est définie par la relation suivante :*

$$\begin{array}{rccc} f^* : & Hom(Y,Z) & \longrightarrow & Hom(Y,Z) \ , \\ & g & \longmapsto & g\circ f \end{array}$$

où Z est un ensemble quelconque.

Quasi-isomorphisme

Définition 2.1.5 *Toute application linéaire $f : (C,d) \longrightarrow (C',d')$ qui commutte avec leurs différentielles, i.e. $d'\circ f = f\circ d$, transforme les cobords et cocycles de (C,d) respectivement en cobords et cocycles de (C',d'), donc induit en cohomologie l'application suivante :*

$$\begin{array}{rccc} H^*(f) : & H^*(C,d) & \longrightarrow & H^*(C',d') \\ & [x] & \longmapsto & H^*(f)([x]) = [f(x)] \end{array}$$

On dira que f est un quasi-isomorphisme, quand $H^*(f)$ est un isomorphisme. On écrit alors

$$f(C,d) \xrightarrow{\simeq} (C',d').$$

Cohomologie singulière d'un espace topologique.

Simplexe standard. Pour tout entier i, non nul, on pose $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ où 1 se trouve à la $(i+1)$-ème place. La famille $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^\infty$ espace vectoriel des suites à supports bornés, limite naturelle des espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$

On appelle *n-simplexe standard*, l'ensemble

$$\Delta^n = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i e_i \text{ tel que } \lambda_i \in \mathbb{R},\ 0 \leq \lambda_i \leq 1 \text{ et } \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

Simplexe singulier.

Définition 2.1.6 *Soit X un espace topologique, $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle n-simplexe singulier sur X, toute application continue*

$$\sigma : \Delta^n \longrightarrow X$$

L'ensemble des n-simplexes singuliers sur X se note $S_n(X)$

Applications face et dégénérescence. Un cas particulier des simplexes singuliers est celui des *simplexes linéaires*, définis de la façon suivante :

Définition 2.1.7

- *Soit X une partie convexe de $\mathbb{R}^m$, $n \in \mathbb{N}$ et $x_0, \ldots, x_n$ des éléments de X. Alors l'application notée $[x_0, \ldots, x_n]$, définie par :*

$$\begin{array}{rccc} [x_0, \ldots, x_n] : & \Delta^n & \longrightarrow & X \\ & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} t_i e_i & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} t_i x_i \end{array}$$

  est un n-simplexe singulier, appelé n-simplexe linéaire.
- *L'application $\lambda_i : [e_0, \ldots, \widehat{e_i}, \ldots, e_n] : \Delta^{n-1} \longrightarrow \Delta^n$ est un simplexe linéaire, appelé $i^{\text{ème}}$ face de Δ^n. ($\widehat{e_i}$ signifie que l'on omet e_i).*
- *L'application $\rho_i : [e_0, \ldots, e_i, e_i, \ldots, e_n] : \Delta^{n+1} \longrightarrow \Delta^n$ est un simplexe linéaire, appelé $i^{\text{ème}}$ dégénérescence de Δ^n.*

Définition 2.1.8 *Soit X un espace topologique, ses applications faces et dégénérescences sont définies respectivement par les relations suivantes :*

$$\begin{array}{rccc} \partial_i : & S_n(X) & \longrightarrow & S_{n-1}(X) \\ & \sigma & \longmapsto & \sigma \circ \lambda_i \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} s_j : & S_n(X) & \longrightarrow & S_{n+1}(X) \\ & \sigma & \longmapsto & \sigma \circ \rho_j \end{array}$$

Homologie singulière. Pour un espace topologique X, son homologie singulière est définie par les relations suivantes :

- On note par $CS_n(X, \mathbb{Q})$, le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par $S_n(X)$.
- Soit $(CS_*(X, \mathbb{Q}), d)$ le complexe de chaîne défini par :

$$CS_*(X, \mathbb{Q}) = \{CS_n(X, \mathbb{Q})\}_{n \geq 0} \text{ et } d = \sum_i (-1)^i \partial_i,$$

  dont l'homologie associée, notée $H_*(X, \mathbb{Q})$, est appelée l'*homologie singulière* de X, i.e.

$$H_*(X, \mathbb{Q}) = H_*(CS_*(X, \mathbb{Q}), d)$$

- On note par $DS_{n+1}(X)$, le $\mathbb{Q}$-sous espace vectoriel de $CS_{n+1}(X, \mathbb{Q})$ engendré par les simplexes de la forme $s_i\sigma$ où $\sigma \in S_n(X)$ et $0 \leq i \leq n$, et on définit alors le complexe de chaînes quotient formé par les simplexes singuliers dits *normalisés*

$$C_*(X; \mathbb{Q}) = CS_*(X, \mathbb{Q})/DS_*(X)$$

- La surjection canonique $CS_*(X; \mathbb{Q}) \longrightarrow C_*(X; \mathbb{Q})$ est un quasi-isomorphisme (cf. page 53, [FHT01]), donc

$$H_*(X; \mathbb{Q}) = H_*(C_*(X; \mathbb{Q}), \partial)$$

- Enfin, la *cohomologie singulière* de X, notée

$$H^*(X; \mathbb{Q}) = H^*(C^*(X; \mathbb{Q}), \partial^*)$$

  est définie à l'aide de la relation de dualité $C^*(X; \mathbb{Q}) = \operatorname{Hom}(C_*(X; \mathbb{Q}), \mathbb{Q})$.
- Si $f : X \longrightarrow Y$ est une application continue, on pose

$$\begin{array}{rrcl} S_n(X): & S_n(X) & \longrightarrow & S_n(Y) \\ & \sigma & \longmapsto & f \circ \sigma \end{array}$$

Ainsi, l'homologie singulière est un foncteur covariant de la catégorie des espaces topologiques vers celle des groupes abéliens, alors que la cohomologie singulière est un foncteur contravariant.

2.1.3 Homotopie.

Inroduction. L'homotopie est une notion de topologie algébrique. Elle étudie la notion de déformation continue d'un objet à un autre. Deux lacets sont dit homotopes lorsqu'il est possible de passer continûment de l'un à l'autre. La théorie de l'homotopie associe à un espace topologique connexe X, une famille de groupes $(\pi_n(X))$ appelés groupes d'homotopie. Plus, précisément, elle construit des foncteurs covariants de la catégorie des espaces topologiques pointés vers celle des groupes. Ces groupes sont invariants par "déformation" de l'espace. L'homotopie ne permet donc pas de distinguer deux objets équivalents à déformation près.

Groupes d'homotopie .

Définition 2.1.9 *Soient X et Y deux espaces topologiques, on dit que deux applications $f, g : X \to Y$ continues sont homotopes s'i existe une applicatio continue $\gamma : X \times I \to Y$ telle que :*

$$\begin{array}{ll} \forall x \in X & \gamma(x,0) = f(x) \\ & \gamma(x,1) = g(x) \end{array}$$

où I désignera dans toute la suite l'intervalle $[0,1]$. Autrement dit : il existe un chemin dans $\mathcal{C}(X,Y)$, d'origine f et d'extrémité g.

On définit ainsi une relation d'équivalence sur les fonctions continues entre deux espaces topologiques, en particulier ceux pointés. L'ensemble quotient associé se note $[(X,*),(Y,*)]$. Les cas les plus importants sont les suivants :

$$\begin{array}{lll} \pi_n(X,*) & = [(\mathbb{S}^n,*),(X,*)] & n\text{-ème groupe d'homotopie de } X \\ \pi_1(X,*) & \quad [(\mathbb{S}^1,*),(X,*)] & \text{groupe fondamental de } X \end{array}$$

Ces groupes sont abéliens pour $n \geq 2$.

Remarque 2.1.10

- *Tous ces groupes sont abeliens quand $n \geq 2$.*
- *$\pi_0(X,*)$ représente les composantes connexes par arcs de X.*
  En particulier si $\pi_0(X,x_0) = \{0\}$ alors X est connexe par arc, et dans ce cas tous les $\pi_n(X,*)$ ne dépondent pas du choix du point de base, on les notera tout simplement par $\pi_n(X)$.
- *On dira que X est n-connexe si $\pi_i(X,*) = \{0\} \quad \forall\, 0 \leq i \leq n$.*
- *X est dit simplement connexe lorsqu'il est 1-connexe. Tous les espaces considérés dans la suite seront 1-connexes, sauf mention du contraire.*
- *Les sphère $\mathbb{S}^n$ sont simplement connexes pour $n \geq 2$, alors que les espaces projectifs complexes $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ le sont pour $n \geq 1$.*

Type d'homotopie.

Définition 2.1.11 *On dit que deux espaces topologiques X et Y ont le même type d'homotopie s'ils existent deux applications continues $f : X \to Y, g : Y \to X$ telles que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont homotopes respectivement à id_Y et id_X.*
On dit alors que f et g sont des équivalences d'homotopie, et on écrit $f : X \xrightarrow{\simeq} Y$ ou bien $X \simeq Y$.

Remarque 2.1.12 *Le type d'homotopie permet de procéder à une classification des espaces topologique, car deux applications homotopes induisent la même application en homologie, et car deux espaces topologiques de même type d'homotopie ont leurs groupes d'homologie singulière isomorphes.*

Définition 2.1.13 *Toute application continue $f : X \longrightarrow Y$ induit en homotopie, les applications suivantes :*

$$\begin{array}{rccc} \pi_n(f): & \pi_n(X) & \longrightarrow & \pi_n(Y) \\ & [\gamma] & \longmapsto & [f \circ \gamma] \end{array}.$$

Elle est dite équivalence d'homotopie faible, quand tous les $\pi_n(f)$ sont des isomorphismes, dans ce cas on dit que les deux espaces sont de même type d'homotopie faible.

Les calculs des groupes d'homotopie sont en général plus difficiles que ceux d'autres invariants d'homotopie. Jusqu'à maintenant on ne connaît pas de moyens simples pour le calcul des groupes d'homotopie, à part le théorème de *Seifert-van Kampen* pour le groupe fondamental, ou le *théorème d' excision.* Parfois pour des espaces n-connexes, les groupes d'homotopie peuvent être calculés à partir de ceux de l'homologie ou cohomologie, via le *théorème d'Hurewicz.* [2] Toutefois depuis 1980, d'autres idées commencent à se développer dans ce sens, en s'inspirant du théorème de *Seifert-van Kampen.* On notera surtout les travaux récents de *G.J. Ellis et R. Mikhailov* [EM08].

2.1.4 CW-complexes.

Introduction. Les CW-complexes jouent un rôle fondamental en homotopie rationnelle, vu leur structure et les propriétés qu'ils vérifient. On donnera dans cette section des définitions accessibles au lecteur non specialiste et survoler leurs propriétés essentielles.

L'histoire des *CW-complexes* (appelés aussi *complexes cellulaires*) remonte à *J. H. C. Whitehead* [3] qui les a introduits dans le but d'étudier des problèmes d'homotopie. L'idée était de créer une classe d'objets plus grande que celle des complexes simpliciaux, mais qui gardent les mêmes propriétés combinatoires de telle sorte que les considérations de calcul ne soient pas ignorées. Le nom CW provient du qualificatif de l'espace topologique, en anglais : *closure-finite, weak topology*, et n'a aucune relation avec les initiales de *C. Whitehead.*

Définitions.

Un CW-complexe est un espace topologique obtenu par recollement de cellules.

[2] Witold Hurewicz (1904-1956) est un mathématicien polonais. Il participe aussi à la fondation de l'algèbre homologique. Il mourra en tombant d'une pyramide maya au cours d'une sortie pendant l'International Symposium on Algebraic Topology au Mexique. connu pour ses travaux en topologie, théorie des ensembles et mathématiques appliquées.

[3] John Henry Constantine Whitehead (1904-1960), était un mathématicien britannique qui fût un des fondateurs de la théorie de l'homotopie. Il a fondé la revue *Topology*

Définition 2.1.14 *Soient X, Y deux espaces topologiques, A une partie de X et $f : A \longrightarrow Y$ une application continue. Le recollement de X sur Y par f est l'espace topologique quotient $X \cup_f Y = (X \coprod Y)/\mathcal{R}$, où $\mathcal{R}$ est la relation engendrée par $x \sim f(x)$ pour tout $x \in A$.*

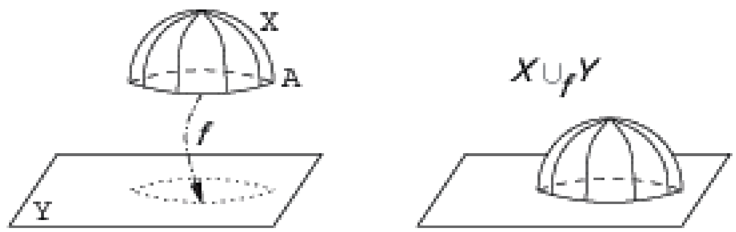


FIG. 2.1 – Un exemple de recollement

Définition 2.1.15
- *Pour $n \geq 1$, on appelle n-cellule tout espace topologique homéomorphe à la boule unité $\mathbb{D}^n$.*
- *Par convention une 0-cellule est un point.*
- *On appelle n-cellule (ou cellule de dimension n) ouverte tout espace topologique homéomorphe à $\mathbb{D}^n \setminus \partial\mathbb{D}^n = \mathbb{D}^n \setminus \mathbb{S}^{n-1}$.*

Construction. La construction d'un CW-complexe X se fait de façon récurrente de la façon suivante :

1. La construction de tout CW-complexe commence à partir d'une collection discrète de points qui forment le 0-squelette de X, qu'on notera X^0.
2. Le n-squelette X^n s'obtient en attachant X^{n-1} à un nombre fini de n-cellules e^n_α, à l'aide d'applications continues
3. On peut arrêter la construction à un ordre fini et prendre $X = X^n$, ou bien continuer indéfiniment et prendre $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n$.
4. Closure-finite : La frontière de chacune de ses cellules est égale à la réunion disjointe d'un nombre fini d'intérieurs de cellules de dimensions plus petites.
5. Weak topology : X est muni d'une structure de topologie faible, i.e., $A \subset X$ est ouvert si et seulement si $A \cap X^n$ est ouvert pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Vocabulaire.
- Les 0-cellules d'un CW-complexes, s'appellent *sommets*. Celles de dimension 1, s'appellent des *arêtes*.
- La *dimension* d'un CW-complexe est par définition, la borne supérieure des dimension de ses cellules.

– Un *graphe* topologique est CW-complexe de dimension ≤ 1.
– Un CW-complexe est dit *fini*, quand il n'a qu'un nombre fini de cellules ouvertes, dans ce cas il est de dimension finie et compact. Sa cohomologie est alors de dimension finie.

Exemples.

1. La sphère $\mathbb{S}^n$ est un CW-complexe fini formé par un sommet et une n-cellule.

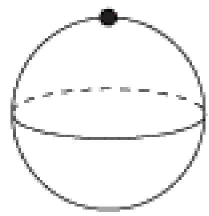


FIG. 2.2 – La sphere $\mathbb{S}^2$

2. Le tore $\mathbb{T}^2$ est un CW-complexe fini formé par un sommet, deux 1-cellules et une 2-cellule, parce qu'il est homéomorphe à

$$([0,1] \times [0,1])/((1,t) \sim (0,t), (t,1) \sim (t,0))$$

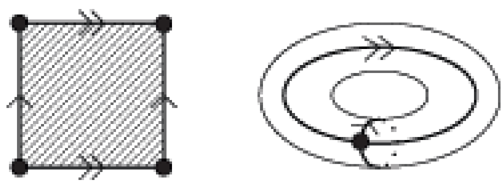


FIG. 2.3 – Le tore $\mathbb{T}^2$

3. La *bouteille de Klein* est un CW-complexe fini formé aussi par un sommet, deux 1-cellules et une 2-cellule, parce qu'elle est homéomorphe à

$$([0,1] \times [0,1])/((1,t) \sim (0,1-t), (t,1) \sim (t,0))$$

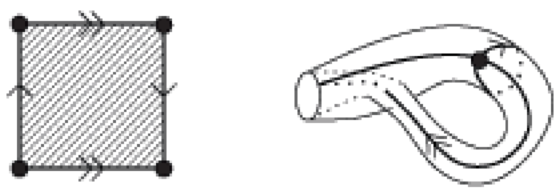


FIG. 2.4 – Bouteille de Klein

4. L'espace projectif $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ est un CW-complexe fini, ayant une k-cellule pour tout $0 \leq k \leq n$, dont le k-squelette est $\mathbb{R}\mathrm{P}^k$.

Propriétés. Notons que le produit et quotient de deux CW-complexes sont des CW-complexes. La catégorie des CW-complexes se révèle alors être une bonne catégorie pour travailler en homotopie, comme l'illustrent les résultats suivants :

Définition 2.1.16 *Si $X = \cup X^n$ et $Y = \cup Y^n$ sont deux CW-complexes, on dit que $f : X \longrightarrow Y$ est une application cellulaire si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a, $f(X^n) \subset Y^n$*

Théorème 2.1.17 ***Théorème d'approximation cellulaire.***
Toute application continue entre deux CW-complexes est homotope à une application cellulaire.

Théorème 2.1.18 ***Théorème de Whitehead.***
Toute équivalence d'homotopie faible entre deux CW-complexes est une équivalence d'homotopie.

Définition 2.1.19 *Un modèle cellulaire d'un espace topologique X est la donnée d'un CW-complexe Y et d'une équivalence d'homotopie faible $f : Y \longrightarrow X$.*

Théorème 2.1.20 ***Théorème du modèle cellulaire.***
Tout espace topologique admet un modèle cellulaire, unique à équivalence d'homotopie près.

Remarque 2.1.21 *Enfin rappelons ce résultat qui montre encore une fois que les CW-complexes sont les espaces les plus adaptés à la théorie de l'homotopie.*

Si X et Y sont des CW-complexes pointés, avec Y connexe, et $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ induisant un isomorphisme $\mathbb{P}_i*(f) : \pi*(X) \longrightarrow \pi_*(Y)$ alors $H^*(f) : H^*(X;\mathbb{Q}) \longrightarrow H^*(Y;\mathbb{Q})$ est un isomorphisme.

2.1.5 Homotopie rationnelle

Torsion

Définition 2.1.22
- *Dans un groupe, un élément est dit de torsion quand il est d'ordre fini.*
- *Un groupe est dit de torsion si tous ses éléments le sont, il est dit sans torsion si son unique élément de torsion est son élément neutre.*

Remarque 2.1.23 *Les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels sont des groupes abéliens sans torsion.*

En gros, l'*homotopie rationnelle* a pour objectif celui d'étudier le type d'homotopie d'un espace topologique en ignorant la torsion de ses groupes d'homotopie. La théorie d'homotopie rationnelle a connu ses débuts avec Daniel Quillen (1969) puis Denis Sullivan (1971). La référence standard et inévitable pour tout chercheur en ce domaine est le livre commun de Yves Félix, Stephen Halperin et Jean-Claude Thomas [FHT01].

Définition 2.1.24 *Un espace topologique simplement connexe est dit rationnel quand tous ses groupes d'homotopie sont des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels.*

Remarque 2.1.25
- *Pour tout CW-complexe simplement connexe X, il existe un espace rationnel noté $X_{\mathbb{Q}}$ (unique à équivalence d'homotopie près) et une application continue $f : X \longrightarrow X_{\mathbb{Q}}$ qui induit un isomorphisme de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels de $\pi_n(X) \otimes \mathbb{Q}$ vers $\pi_n(X_{\mathbb{Q}})$.*
- *On dit que $X_{\mathbb{Q}}$ est le rationalisé de X.*
- *$X_{\mathbb{Q}}$ est la localisation de X sur le corps des rationnels, son type d'homotopie est ce qu'on appelle le type d'homotopie rationnelle de X.*
- *On obtient $X_{\mathbb{Q}}$ à partir de X en tuant la torsion de ses groupes d'homotopie.*

On présentera dans la suite les détails de toutes ces notions.

Localisation. En mathématiques, spécialement en géométrie algébrique, la localisation permet d'étudier un problème (localement) modulo les nombres premiers, avant de le résoudre dans le cas global. L'exemple le plus simple de ce procédé est celui de la résolution des équations Diophantiennes (équations polynomiales à coefficients entiers), dont on cherche d'abord les solutions p-adiques avant d'en déduire celles dans le cas général. On trouve beaucoup d'applications de la localisation dans les domaines de la théorie des nombres, de la géométrie et de la topologie algébrique.

Localisation d'un anneau. La localisation est une des opérations de base sur un anneau commutatif unitaire ; C'est une construction plus générale que celle du corps des fractions. Cela consiste à plonger l'anneau considéré dans un anneau plus grand dans lequel on a autorisé des divisions que l'on ne faisait pas avant. Par exemple, le localisé de $\mathbb{Z}$ en 7 est l'anneau $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{11}, \ldots\right]$ dans lequel tout nombre entier qui n'est pas multiple de 7 admet un inverse.

Définition 2.1.26
- *Pour tout anneau commutatif unitaire A, on note A^* l'ensemble des ses éléments inversibles.*
- *On appelle une partie multiplicative S d'un anneau A, toute partie de A contenant 1, et stable par multiplication.*
- *La localisation de l'anneau A en la partie S est alors un anneau, noté $S^{-1}A$, et un morphisme $\varphi : A \longrightarrow S^{-1}A$, tels que : $\varphi(S) \subset (S^{-1}A)^*$, et qui soient universels pour cette propriété; c'est-à-dire que pour tout morphisme d'anneaux $f : A \longrightarrow B$, si $f(S) \subset B^*$, alors il existe un unique morphisme $g : S^{-1}A \longrightarrow B$ tel que $f = g \circ \varphi$.*

Construction. Pour construire l'anneau localisé d'un anneau commutatif A, on procède comme dans la construction du corps des fractions mais avec une précaution supplémentaire pour tenir compte du fait que l'anneau n'est pas toujours intègre. Sur le produit cartésien $A \times A$, on définit la relation d'équivalence la suivante :

$$(p, q) \sim (p', q') \text{ si et seulement } \exists t \in A \text{ tel que } t(pq' - q'p) = 0.$$

Exemples importants. Soit A un anneau commutatif.
- Les éléments réguliers $A^\times$ forment une partie multiplicative ; l'anneau $(A^\times)^{-1} A$ est l'anneau total des fractions de A.
- Le complémentaire d'un idéal premier $\mathcal{P}$ est une partie multiplicative, et peut donc l'utiliser pour localiser l'anneau. Dans ce cas, on note $A_\mathcal{P} = (A \setminus \mathcal{P})^{-1} A$. C'est un anneau local appelé localisé de A en $\mathcal{P}$.

Localisation d'un espace. Quelques espaces topologiques peuvent être localisés de façon similaire que celles pour les anneaux. Cette construction a été décrite par Denis Sullivan en 1970 dans des notes qu'il n'a publiées qu'en 2005 (voir [Su05]).

Définition 2.1.27 *Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de nombres premiers et $\mathcal{I}$ l'ensemble des entiers naturels premiers à ceux de $\mathcal{P}$. Un groupe abélien G est dit $\mathcal{P}$-local si pour tout $k \in \mathcal{I}$, la multiplication par k dans G est un isomorphisme de groupe.*

Remarque 2.1.28
- *Avec les notations de la définition précédente, l'ensemble $\mathbb{K} = \{\frac{m}{k},\ m \in \mathbb{Z}, k \in \mathcal{I}\}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$. Dans ce cas, G est $\mathcal{P}$-local si et seulement si G est un $\mathbb{K}$-module.*
- *Par convention, quand $\mathcal{P} = \emptyset$, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$. Dans ce cas G est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel .*
- *Le morphisme* $\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q} \\ x & \longmapsto & x \otimes 1 \end{array}$ *s'appelle $\mathcal{P}$-localisation de G.*
  C'est un isomorphisme si et seulement si G est $\mathcal{P}$-local.

– *En particulier, si G est abélien, alors $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{K}$ est $\mathcal{P}$-local.*

Définition 2.1.29
– *Un espace topologique simplement connexe X, est dit $\mathcal{P}$-local quand $\pi_*(X)$ est $\mathcal{P}$-local.*
– *Quand $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ (i.e. $\mathcal{P} = \emptyset$), on dit qu'il est rationnel. Dans ce cas ses groupes d'homotopie $\pi_n(X)$ sont des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels.*

Définition 2.1.30 *On appelle $\mathcal{P}$-localisation d'un espace topologique simplement connexe X, toute application continue $f : X \longrightarrow X_{\mathcal{P}}$, où $X_{\mathcal{P}}$ est un espace topologique, simplement connexe, $\mathcal{P}$-local qui induit l'isomorphisme*

$$\pi_*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{K} \xrightarrow{\cong} \pi_*(X_{\mathcal{P}})$$

Remarque 2.1.31 *Cas particulier, quand $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ (i.e. $\mathcal{P} = \emptyset$).*
– *L'espace $X_{\emptyset}$ est noté plutôt $X_{\mathbb{Q}}$, et s'appelle le rationalisé de X.*
– *L'application $f : X \longrightarrow X_{\mathcal{P}}$ s'appelle la rationalisation de X.*

Les théorèmes suivants (voir [FHT01], page 108-109) montrent que la rationalisation est toujours possible pour un espace topologique simplement connexe. Plus encore, elle est compatible avec la cohomologie de l'espace. Les résultats sont vrais dans le cas général de localisation, mais comme on est intéressés uniquement par le cas rationnel, on énoncera les théorème dans ce cas particulier.

Théorème 2.1.32 *Une application continue entre deux espaces topologiques simplement connexes, $\varphi : X \longrightarrow Y$ est une rationalisation si et seulement si Y est rationnel et $H_*(\varphi, \mathbb{Q}) : H_*(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} H_*(Y, \mathbb{Q})$ est un isomorphisme.*

Théorème 2.1.33 *Pour tout espace topologique X, il existe une rationalisation $f : X \longrightarrow X_{\mathbb{Q}}$, unique à isomorphisme près, où $X_{\mathbb{Q}}$ est un CW-complexe.*

Le lecteur intéressé par les détails de la construction de $X_{\mathbb{Q}}$ peut se référer à la page 102 de [Su05].

Type d'homotopie rationnelle. Avant d'introduire cette notion, et toujours dans le même souci : celui de familiariser le lecteur avec les outils de l'homotopie rationnelle, commençons par rappeler le résultat suivant :

Théorème 2.1.34 ***Théorème de Whitehead-Serre.***
Soit une application continue $\varphi : X \longrightarrow Y$ entre deux espaces topologiques simplement connexes. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
- $\pi_*(\varphi) \otimes \mathbb{Q}$ *est un isomorphisme.*
- $H_*(\varphi; \mathbb{Q})$ *est un isomorphisme.*
- $H^*(\varphi; \mathbb{Q})$ *est un isomorphisme.*

Définition 2.1.35 *On appelle équivalence d'homotopie rationnelle, toute application continue $\varphi : X \longrightarrow Y$ entre deux espaces topologiques simplement connexes vérifiant l'une des conditions équivalentes du théorème de Whitehead-Serre.*

Remarque 2.1.36 *D'après les théorèmes 2.1.18 (page 15) et 2.1.34, on peut affirmer que tous les rationalisés $X_{\mathbb{Q}}$ d'un espace topologique simplement connexe X ont même type d'homotopie faible, celui de X. Ce qui nous permet de définir le type d'homotopie rationnel de X de la façon suivante :*

Définition 2.1.37 *Le type d'homotopie rationnelle d'un espace topologique simplement connexe X, est par définition le type d'homotopie faible de ses rationalisés $X_{\mathbb{Q}}$.*

Définition 2.1.38 *Un modèle rationnel cellulaire d'un espace topologique simplement connexe X, est la donnée d'une équivalence d'homotopie rationnelle $X \longrightarrow Y$ où Y est un CW-complexe vérifiant $Y^0 = Y^1 = \{pt\}$.*
On dit alors que X est rationnellement modélisé par Y.

Et pour confirmer une autre fois le rôle imposant des CW-complexes en homotopie rationnelle, on rappelle le résultat suivant :

Théorème 2.1.39 *Soit X un espace topologique simplement connexe, dont la cohomologie $H^*(X;\mathbb{Q})$ est de dimension finie et concentrée en les degrés $\leq n$, (i.e. $H^*(X;\mathbb{Q}) = \bigoplus_{k=0}^{n} H^k(X;\mathbb{Q})$). Alors X est rationnellement modélisé par un CW-complexe Y de dimension égale à n.*

C'est ainsi que dans toute la suite, les espaces topologiques que nous allons considérer sont des CW-complexes simplement connexes de dimension finie (sauf mention du contraire).

Homotopie rationnelle.

Introduction. La théorie de l'homotopie est l'étude des invariants des espaces topologiques ou ceux des applications continues, qui ne dépendent que du type d'homotopie de l'espace ou de la classe d'homotopie de l'application. Les exemples classiques de tels invariants pour un espace topologique X, sont les groupes d'homologie singulière $H_n(X)$ et les groupes d'homotopie $\pi_n(X)$.

Les groupes $H_n(X)$ et $\pi_n(X)$, $n \geq 2$, sont abéliens, et donc peuvent être *rationalisés* (tuer leurs torsions) pour obtenir les sous-espace vectoriel $H_i(X;\mathbb{Q})$ et $\pi_n(X)\otimes\mathbb{Q}$. L'idée de Sullivan vers la fin des années 60 fût de rationaliser tous les espaces topologiques X et Y et toute les applications continues $f : X \longrightarrow Y$ en des espaces rationnels $X_{\mathbb{Q}}$ et $Y_{\mathbb{Q}}$ et en des applications continues $f_{\mathbb{Q}} : X_{\mathbb{Q}} \longrightarrow Y_{\mathbb{Q}}$ tels que

$$H_*(X_{\mathbb{Q}}) = H_*(X;\mathbb{Q}) \text{ et } \pi_*(X_{\mathbb{Q}}) = \pi_*(X)\otimes\mathbb{Q}.$$

Le type d'homotopie rationnelle d'un CW-complexe est par définition, le type d'homotopie faible de son rationalisé $X_{\mathbb{Q}}$.
La classe d'homotopie rationnelle d'une application continue $f : X \longrightarrow Y$ est la classe d'homotopie de $f_{\mathbb{Q}} : X_{\mathbb{Q}} \longrightarrow Y_{\mathbb{Q}}$.

L'homotopie rationnelle est l'étude des propriétés qui ne dépondent que du type d'homotopie rationnel d'un espace topologique ou que de la classe d'homotopie rationnelle d'une application continue.

Ses qualités et ses défauts. L'homotopie rationnelle présente un défaut : celui de perdre beaucoup d'informations lors du calcul. Par exemple, une infinité de groupes d'homotopie de la sphère $\mathbb{S}^2$ sont non nuls, alors qu'en homotopie rationnelle ils sont tous nuls à partir du degré 3. Mais on peut aussi dire que ce défaut est exactement son point fort : Les calculs sont simples. Par exemple, le calcul explicite des groupes d'homotopie rationnelle de plusieurs CW-complexes est facile, alors qu'il ne l'est pas (voir impossible) dans le cas général dans la théorie d'homotopie.

C'est cette simplicité de calcul en homotopie rationnelle qui a permis de résoudre des problèmes très délicats tels :

Théorème 2.1.40 ***M.Vigue et D.Sullivan*** *[VS76]*
Soit M une variété Riemannienne simplement connexe compacte dont l'algèbre $H^*(M;\mathbb{Q})$ admet au moins deux générateurs. Alors $\dim H_k(\Omega M;\mathbb{Q})$ *n'est pas bornée, où ΩM désigne l'ensemble de chemins de M.*

Théorème 2.1.41 ***D.Gromoll et W.Meyer*** *[GM69]*
Soit M une variété lisse simplement connexe compacte sans bord tel que $\dim H^*(LM;\mathbb{Q})$ *n'est pas bornée. Alors toute métrique Riemanienne sur M admet une infinité de géodésiques fermées géométriquement distinctes, où LM désigne l'ensemble de lacets de M.*

Théorème 2.1.42 ***C.Allday et S.Halperin*** *[AH78]*
Si un tore $\mathbb{T}^r$ opère librement sur espace homogène G/H, où G et H sont des groupes de Lie compacts, alors

$$r \leq \ rg(G) - \ rg(H).$$

Son point fort : Les modèles. Sans aucun doute, le point fort de l'homotopie rationnelle est la notion de modèle minimal introduite par D. Quillen puis par D. Sullivan. Ce sont des formules algébriques explicites où le type d'homotopie rationnel d'un espace topologique est celui de son modèle, et où la classe d'homotopie rationnelle d'une application continue entre deux espaces topologiques est la classe d'homotopie du morphisme induit entre les modèles de ces espaces. C'est avec cette brève introduction qu'on va aborder maintenant l'un de ces modèles : celui de D. Sullivan.

2.1.6 Modèles de Sullivan

Introduction. Notre outil principal dans cette thèse, est la notion de *modèle minimal de Sullivan*, noté en général $(\Lambda V, d)$. Ces modèles permettent d'identifier le type d'homotopie rationnelle de tout espace topologique simplement connexe X, au type d'homotopie d'une *algèbre différentielle graduée commutative (adgc)*, $(\Lambda V, d)$. On essayera dans cette section d'expliquer cette notion de modèle, très fondamentale en théorie de l'homotopie rationnelle, en suivant le plan suivant :

- Introduire la notion d'adgc.
- Donner un aperçu sur la construction du modèle de Sullivan

$$(\Lambda V, d) \xrightarrow{\simeq} (A, d)$$

pour tout adgc (A, d) vérifiant $H^0(A, d) = \mathbb{Q}$

– Donner un aperçu sur le foncteur (contravariant) de Sullivan :

$$\begin{array}{rrcl} A_{PL}: & \{\text{Espaces topologiques}\} & \to & \{adgc\} \\ & X & \rightsquigarrow & A_{PL}(X) \end{array}$$

qui vérifie en plus

$$A_{PL}(X) \simeq C^*(X, \mathbb{Q}),$$

où $C^*(X, \mathbb{Q})$ désigne le *complexe des cohaînes singulières normalisés* de X, dont la cohomologie n'est autre que la cohomologie singulière de X, i.e.

$$H^*(X; \mathbb{Q}) = H(C^*(X, \mathbb{Q})).$$

– Donner un aperçu sur la construction inverse, qui à chaque algèbre de Sullivan $(\Lambda V, d)$, simplement connexe et de type fini, associe un espace topologique rationnel $|(\Lambda V, d)|$ tel que $(\Lambda V, d)$ soit un modèle minimal pour $A_{PL}(|(\Lambda V, d)|)$.

Dans ce qui suit, on essayera de détailler un peu plus ces notions.

Algèbre différentielle graduée commutative (adgc).

Espaces vectoriels gradués.

Définition 2.1.43 *Un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel gradué est la donnée d'une famille $V = (V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels. Les éléments de V_n sont dits de degré n. On écrit alors* $\deg v = n$ *ou bien* $|v| = n$, *Pour tout* $v \in V_n$.

Notations. Pour des raisons de simplicité de l'écriture, on adoptera les notations suivantes :

– V^{-n} au lieu de V_n quand $n \leq -1$.
– $V^{\geq n} := \bigoplus_{p\geq n} V^p$ et $V^+ := \bigoplus_{p\geq 1} V^p$.
– Les morhismes dans la catégorie des espaces vectoriels gradués sont les applications linéaires.
– Un morhpisme $d : V \longrightarrow W$ est dit de degré k, si $d : V^n \longrightarrow V^{n+k}$ et $d : V^n \longrightarrow V^{n-k}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Produit tensoriel gradué.

Définition 2.1.44 *Pour tous espaces vectoriels gradués V et W, on définit leur produit tensoriel gradué à l'aide des relations suivantes :*

– $(V \otimes W)^n := \bigoplus_{p+q=n} V^p \otimes W^q$.
– *Si $f : V \longrightarrow V'$ et $g : W \longrightarrow W'$ on pose :*

$$\begin{array}{rrcl} f \otimes g: & V \otimes W & \longrightarrow & V' \otimes W' \\ & v \otimes w & \longmapsto & (-1)^{\deg(g)\deg(v)} f(v) \otimes g(w) \end{array}$$

algèbre différentielle graduée commutative (adgc).

Définition 2.1.45 *Une différentielle sur un espace vectoriel gradué V est la donnée d'une application linéaire, $d : V \longrightarrow V$ de degré 1 tel que $d^2 = 0$. Plus précisément, $d : V^n \longrightarrow V^{n+1}$, autrement dit les différentielles augmentent les degrés en notation "puissance".*

Définition 2.1.46 *Une algèbre graduée différentielle (adg) est une algèbre A graduée en tant qu'espace vectoriel, muni d'une différentielle d, vérifiant la relation suivante, appelée formule de Leibniz :*

$$d(x.y) = (dx).y + (-1)^{|x|}x.dy \quad \forall x, y \in A.$$

Définition 2.1.47 *Une algèbre différentielle graduée commutative (adgc) est une adg (A, d), vérifiant la relation suivante :*

$$x.y = (-1)^{|x||y|}y.x, \quad \forall x, y \in A.$$

En particulier, on a : $y^2 = 0$ *si* $|y|$ *impair*

$x.y = y.x$ *si* $|x|$ *pair et* y *quelconque.*

Un Exemple fondamental.

- À partir de tout espace vectoriel gradué (V, d), on peut construire une adgc libre notée $(\Lambda V, d)$ de la façon suivante :
$$\Lambda V := TV/\mathcal{I},$$
où TV est l'algèbre tensorielle engendrée par V, et $\mathcal{I}$ est l'idéal engendré par $\{x \otimes y - (-1)^{|x||y|}y \otimes x\}$.
- La différentielle sur ΛV est prolongée à partir de celle définie initialement sur V, en respectant la linéarité et la formule de *Leibniz*.
- On vérifie que
$$\Lambda V = \mathcal{E}xt(V^{\text{impair}}) \otimes \mathcal{S}ym(V^{\text{pair}})$$
où $\mathcal{E}xt(V^{\text{impair}})$ désigne l'algèbre extérieure engendrée par V^{impair} et $\mathcal{S}ym(V^{\text{pair}})$ l'algèbre symétrique engendrée par V^{pair}.
- On a la relation suivante :
$$\Lambda(V \oplus W) = \Lambda V \otimes \Lambda W$$

Notations. Soit V un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel gradué.

- Si $\{v_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{J}\}$ est une base de V, on notera parfois $\Lambda\{v_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{J}\}$ au lieu de ΛV.

– $\forall k \in \mathbb{N}$, $\Lambda^k V$ désigne le $\mathbb{Q}$-sous espace vectoriel de ΛV engendré par les mots de ΛV de longueur constante égale à k.
Plus précisement : $y \in \Lambda^k V \iff y = \sum \alpha x_{i_1} \dots x_{i_k}$ où $\alpha \in \mathbb{Q}$ et $x_{i_1} \dots x_{i_k} \in V$. Ce qui permet de munir ΛV de deux graduations : celle du degré herité de la graduation en degré de V et celle de la longueur des mots.
– $\forall k \in \mathbb{N}$, $\Lambda^{\geq k} V$ désigne le $\mathbb{Q}$-sous espace vectoriel de ΛV engendré par les mots de ΛV de longueur au mois égale à k.
Plus précisement : $\Lambda^{\geq k} V = \oplus_{p \geq k} \Lambda^k V$

Signalons enfin que adgc (A, d) est une algèbre de cochaînes commutatives $\dots \longrightarrow A^n \xrightarrow{d_n} A^{n+1} \longrightarrow \dots$, dont la cohomolgie $H^*(A, d)$ hérite d'une structure d'agc.

Modèle de Sullivan d'une adgc.

Définition 2.1.48 *Une algèbre de Sullivan est une adgc $(\Lambda V, d)$, où V est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel muni d'une base $(v_i)_{i \in \mathcal{I}}$ vérifiant les conditions suivantes :*
– $\mathcal{I}$ est un ensemble totalement ordonné d'indices.
– $dv_\alpha \in \Lambda\{v_\beta,\ \beta < \alpha\}$, condition dite de nilpotence.
Si de plus $\alpha \leq \beta \Longrightarrow |v_\alpha| \leq |v_\beta|$, on dit que $(\Lambda V, d)$ est une algèbre de Sulivan minimale.
Quand $V^1 = 0$, cette condition de nilpotence est équivalente à

$$dV \subset \Lambda^{\geq 2} V$$

Vocabulaire. Soit $(\Lambda V, d)$ une algèbre de Sullivan.
– On dira que $(\Lambda V, d)$ est simplement connexe, quand $V^1 = 0$.
– On dira $(\Lambda V, d)$ est de type fini, quand $\dim H^k(\Lambda V, d) < \infty$, $\forall k \geq 0$.

Définition 2.1.49 *On appelle modèle minimal de Sullivan d'une algèbre graduée commutative, (A, d), tout quasi-isomorphisme*

$$m : (A, d) \longleftarrow (\Lambda V, d),$$

où $(\Lambda V, d)$ est une algèbre minimale de Sullivan.

Théorème 2.1.50 *Toute adgc (A, d) telle que $H^0(A, d) = \mathbb{Q}$ admet un modèle minimal de Sullivan.*
Si de plus $H^1(A, d) = 0$, alors ce modèle est unique à isomorphisme près (voir page 154, [FHT01]).

On réfère le lecteur intéressé par les détails de la construction de ce modèle à la page 140 du livre [FHT01].

Modèle minimal de Sullivan d'un espace topologique.

Object simplicial.

Définition 2.1.51 *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On appelle object simplicial dans $\mathcal{C}$, toute suite $(\mathcal{K}_n)_{n\geq 0}$ d'objects de $\mathcal{C}$ reliés par des morphismes*

$$\partial_i : \mathcal{K}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{K}_n,\ 0 < i < n+1 \quad et \quad s_j : \mathcal{K}_n \longrightarrow \mathcal{K}_{n+1},\ 0 \leq i \leq n$$

vérifiant les relations suivantes :

$$\begin{array}{rcll} \partial_i\partial_j & = & \partial_{j-1}\partial_i & ,i<j \\ s_is_j & = & s_{j+1}s_i & ,i\leq j \\ \partial_is_j & = & s_{j-1}\partial_i & ,i<j \\ \partial_is_j & = & id & ,i=j,j+1 \\ \partial_is_j & = & s_j\partial_{i-1} & ,i>j+1 \end{array}$$

Vocabulaire.

- Un morphisme simplicial $f : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ entre deux objets simpliciaux $\mathcal{K}$ et $\mathcal{L}$, est une suite de morphismes $f_n : \mathcal{K}_n \longrightarrow \mathcal{L}_n$ qui commute avec les applications ∂_i et s_j.
- Un object simplicial dans la catégorie des ensembles s'appelle *ensemble simplicial.*
- Un object simplicial dans la catégorie des complexes de cochaînes s'appelle *complexe de cochaînes simplicial.* Il s'agit d'une suite de complexes de cochaînes $(A_n)_{n\geq 0}$ muni chacun de ses propres applications faces et dégénérescences appropriées.

Exemple. Si X est un espace topologique, alors $S_*(X) = S_n(X)_{n\geq 0}$, muni des applications faces et dégénérescences est un ensemble simpilicial.

1ère étape de la construction du modèle. Dans un premier temps, on considère $\mathcal{K}$ un ensemble simplicial et $A = (A_n)_{n\geq 0}$ un complexe de cochaînes simplicial. On définit le complexe de cochaînes (ordinaire)

$$A(\mathcal{K}) = (A^p(\mathcal{K}))_{p\geq 0}$$

à l'aide des relations suivantes :

- $A^p(\mathcal{K})$ est l'ensemble des morphismes simpliciaux

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathcal{K}_n & \longrightarrow & (A^p)_n \\ & \sigma & \longmapsto & \Phi_\sigma \end{array}$$

  vérifiant

$$\Phi_{\partial_i\sigma} = \partial_i\Phi_\sigma \quad \text{et} \quad \Phi_{s_j\sigma} = s_j\Phi_\sigma$$

– Les opérations élémentaires sont définies par les formules suivantes :
  – Addition : $(\Phi+\Psi)_\sigma = \Phi_\sigma + \Psi_\sigma$.
  – Multiplication par un scalaire : $(\lambda.\Psi)_\sigma = \lambda.\Psi_\sigma$.
  – Produit : $(\Phi.\Psi)_\sigma = \Phi_\sigma.\Psi_\sigma$.
  – Différentielle : $(d\Psi)_\sigma = d(\Psi_\sigma)$.
– Si $\varphi : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ est un morphisme entre deux ensembles simpliciaux, alors

$$A(\varphi) : A(\mathcal{L}) \longrightarrow A(\mathcal{K})$$

est le morphisme de complexes de cochaînes, défini par la formule suivante :

$$(A(\varphi)\Phi)_\sigma = \Phi_{\varphi\sigma}.$$

– Si $\theta : A \longrightarrow B$ est un morphisme entre deux complexes de cochaînes simpliciaux, alors

$$\theta(\mathcal{K}) : A(\mathcal{K}) \longrightarrow B(\mathcal{K})$$

est le morphisme défini par la formule suivante :

$$(\theta(\mathcal{K})\Phi)_\sigma = \theta(\Phi_\sigma).$$

Remarque 2.1.52 *On remarque que la construction $A \rightsquigarrow A(\mathcal{K})$ est un foncteur covariant, alors que $\mathcal{K} \rightsquigarrow A(\mathcal{K})$ est un foncteur contravariant.*

Étape finale de la construction du modèle : $X \rightsquigarrow A_{PL}(X)$. Soit X un espace topologique. Pour construire notre modèle, en s'insipirant de la construction précédente, on a besoin de :
– $\mathcal{K}$: un ensemble simplicial.
– $A = (A_n)_{n\geq 0}$: un complexe de cochaînes simplicial.

Prenons d'abord $\mathcal{K} = S_*(X)$, et construisons A, qu'on notera plutôt par A_{PL}, en suivant les étapes suivantes :
– Soit $(\Lambda\{t_0, \ldots, t_n, y_0, \ldots, y_n\}, d)$ l'adgc définie par les relations suivantes :

$$|t_i| = 0 \quad , \quad |y_i| = 1 \quad , \quad dt_i = y_i \quad , \quad dy_i = 0.$$

– On remarque que la différentielle d préserve l'idéal engendré par les deux éléments $\sum\limits_{i=0}^{n} t_i - 1$ et $\sum\limits_{i=0}^{n} y_i$, on pose alors :

$$\begin{aligned} (A_{PL})_n &= \frac{\Lambda\{t_0, \ldots, t_n, y_0, \ldots, y_n\}}{\sum\limits_{i=0}^{n} t_i - 1 \ , \ \sum\limits_{i=0}^{n} y_i}, \\ dt_i &= y_i, \\ dy_i &= 0. \end{aligned}$$

– Les applications faces et dégénérescences

$$\partial_i : (A_{PL})_{n+1} \longrightarrow (A_{PL})_n \quad \text{ et } s_j : (A_{PL})_n \longrightarrow (A_{PL})_{n+1}$$

sont définies par les formules suivantes :

$$\partial_i : t_k \mapsto \begin{cases} t_k & , k < i \\ 0 & , k = i \\ t_{k-1} & , k > i \end{cases} \quad \text{et} \quad s_j : t_k \mapsto \begin{cases} t_k & , k < j \\ t_k + t_{k+1} & , k = j \\ t_{k+1} & , k > j \end{cases}$$

Enfin pour tous espaces topologiques X et Y, et application continue $f : X \longrightarrow Y$, notre modèle sera défini par les relations suivantes :

$$A_{PL}(X) := A_{PL}(S_*(X)) \quad \text{et} \quad A_{PL}(f) := A_{PL}(S_*(f)).$$

On définit ainsi un foncteur contravariant $X \rightsquigarrow A_{PL}(X)$ de la catégorie des espaces topologiques vers celle des algèbres de cochaînes commutatives.

Terminologie. Un élément de $A^p_{PL}(X)$ est une fonction, qui à chaque n-simplexe singulier de X associe une p-forme polynômiale sur Δ^n, compatible avec les applications faces et dégénérescences. On dit que $A^p_{PL}(X)$ est le complexe de cochaînes des *formes différentielles polynômiales* sur X. Mais l'intérêt de ce complexe de cochaînes est que sa cohomologie n'est autre que la cohomologie singulière de l'espace X selon le résultat suivant :

Théorème 2.1.53 *Si X est un espace topologique, alors*

$$H^*(X; \mathbb{Q}) = H^*(A_{PL}(X), d).$$

Modèle minimal de Sullivan d'un espace topologique.

Définition 2.1.54 *Soit X est un espace topologique. On appelle modèle de Sullivan de X, tout quasi-isomorphisme*

$$m_X : (\Lambda V, d) \xrightarrow{\simeq} (A_{PL}(X), d).$$

Le modèle $(\Lambda V, d)$ est dit minimal, quand

$$dV \subset \Lambda^{\geq 2} V.$$

Les calculs montrent que quand X est simplement connexe, on a :

$$H^0(A_{PL}(X), d) = \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad H^1(A_{PL}(X), d) = 0.$$

On en déduit alors le résultat suivant :

Définition 2.1.55 *(cf. page 146, [FHT01]).*
Tout espace topologique simplement connexe X dont la cohomolgie singulière $H^*(X;\mathbb{Q})$ est de type fini (i.e. $\dim H^k(X;\mathbb{Q}) < \infty$, $\forall k$), admet un modèle minimal de Sullivan, unique à isomoprhisme près,

$$m_X : (\Lambda V, d) \longrightarrow (A_{PL}(X), d),$$

vérifiant

$$V = \bigoplus_{i\geq 2} V_i \quad \textit{avec} \quad \dim V_i < \infty,\ \forall i.$$

Ainsi, le modèle minimal $(\Lambda V, d)$ d'un espace topologique simplement connexe X, permet de modéliser sa cohomologie singulière à l'aide de la formule suivante :

$$H^*(X;\mathbb{Q}) = H^*(\Lambda V, d).$$

Plus encore, à l'aide du théorème suivant, on verra qu'il modélise aussi son homotopie rationnelle.

Théorème 2.1.56 *(cf. page 208, [FHT01]).*
Soit X espace topologique simplement connexe, dont la cohomolgie singulière $H^*(X;\mathbb{Q})$ est de type fini. Soit $(\Lambda V, d)$ son modèle minimal de Sullivan, alors

$$V \cong \ \textit{Hom}(\pi_*(X)\otimes\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) \quad \textit{en tant qu'espaces vectoriels.}$$

Foncteur inverse : Réalisation spatiale. (pour plus de détails, voir page 237, [FHT01].)
Dans cette partie, on verra la construction du foncteur, appelé *réalisation spatiale*

$$\begin{array}{rccc} |\quad| : & \{\text{adgc}\} & \to & \{\text{CW-complexes}\} \\ & (\Lambda V, d) & \rightsquigarrow & |(\Lambda V, d)| \end{array}$$

tel que

$$(\Lambda V, d) \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(|(\Lambda V, d)|).$$

C'est un foncteur contravariant, réciproque du foncteur $X \rightsquigarrow A_{PL}(X)$.

Réalisation spatiale de Milnor pour un ensemble simplicial. Soit $\mathcal{K}$ un ensemble simplicial. On munit chaque $\mathcal{K}_n$ de sa topologie discrète. La réalisation spatiale de Milnor de $\mathcal{K}$ est l'espace topologique

$$|\mathcal{K}| = \left(\coprod_n \mathcal{K}_n \times \Delta^n\right) \diagup \sim ,$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence définie par les relations suivantes :

$$\partial_i\sigma \times x \sim \sigma \times \lambda_i x \quad , \quad \sigma \in \mathcal{K}_{n+1}, x \in \Delta^n$$

et

$$s_j\sigma \times x \sim \sigma \times \rho_j x \quad , \quad \sigma \in \mathcal{K}_n, x \in \Delta^n$$

où ∂_i et s_j sont les applications faces et dégénérescences de l'ensemble simplicial $\mathcal{K}$ et λ_i, ρ_j sont celles définies dans la page 9.

On définit ainsi un foncteur, car pour tout morphisme d'ensemble simplicial $f : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$, où $f = \{f_n : \mathcal{K}_n \longrightarrow \mathcal{L}_n\}$, on considère les applications continues $f_n \times id : \mathcal{K}_n \times \Delta_n \longrightarrow \mathcal{L}_n \times \Delta_n$, qui au passage au quotient, se factorise par l'application continue

$$|f| : |\mathcal{K}| \longrightarrow |\mathcal{L}|.$$

Réalisation de Sullivan pour une adgc. D. Sullivan a construit le foncteur contravariant

$$\begin{array}{rrcl} \langle\ \ \rangle : & \{\text{adgc}\} & \rightarrow & \{\text{ensembles simpliciaux}\} \\ & (A,d) & \rightsquigarrow & \langle A,d\rangle \end{array}$$

à l'aide des relations suivantes :

- Les n-simplexes de $\langle A,d\rangle$ sont les morphismes d'adg $\sigma : (A,d) \longrightarrow (A_{PL})_n$.
- Les applications faces et dégénérescences sont définies par $\partial_i\sigma = \partial_i \circ \sigma$ et $s_j\sigma = s_j \circ \sigma$.
- Pour tout morphisme d'adgc $\varphi : (A,d) \longrightarrow (B,d)$, on définit le morphisme d'ensembles simpliciaux

$$\begin{array}{rrcl} \langle\varphi\rangle : & \langle B,d\rangle & \longrightarrow & \langle A,d\rangle \\ & \sigma & \longmapsto & \sigma\circ\varphi \end{array}$$

Et ainsi on peut définir la réalisation spatiale pour une adgc de la façon suivante :

Définition 2.1.57

- *La réalisation spatiale d'une adgc (A,d) est le CW-complexe*

$$|A,d| = |\langle A,d\rangle|$$

- *La réalisation spatiale d'un morphisme d'adgc $\varphi : (A,d) \longrightarrow (B,d)$ est l'application continue*

$$|\varphi| = |\langle\varphi\rangle|$$

On obtient ainsi la diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \{\text{adgc}\} \arrow[rr, "\langle\ \ \rangle"] \arrow[dr] & & \{\text{ensembles simpliciaux}\} \arrow[dl, "|\ \ |"] \\ & \{\text{CW-complexes}\} & \end{tikzcd}$$

Enfin, le théorème suivant permet d'affirmer que toute algèbre de Sullivan simplement connexe et de type fini, est le modèle minimal d'un CW-complexe.

Théorème 2.1.58 *(voir page 250, [FHT01]).*
Soit $(\Lambda V, d)$ *une algèbre de Sullivan de type fini tel que* $H^1(\Lambda V, d) = 0$, *alors :*
– $|(\Lambda V, d)|$ *est simplement connexe.*
– $\pi_n(|(\Lambda V, d)|) \cong Hom_{\mathbb{Q}}(V, \mathbb{Q})$, *pour* $n \geq 2$.
– $m_{|(\Lambda V,d)|} : (\Lambda V, d) \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(|(\Lambda V, d)|)$ *est un quasi-isomorphisme.*

Plus encore, la réalisation spatiale préserve la classe d'homotopie des morphismes, comme le montre la remarque suivante :

Remarque 2.1.59 *Si* $\varphi \sim \psi : (\Lambda V, d) \longrightarrow (\Lambda W, d)$ *sont deux morphismes d'algèbres de Sullivan, homotopes. Alors :*

$$|\varphi| \sim |\psi| : |(\Lambda V, d)| \longrightarrow |(\Lambda W, d)|$$

Définition 2.1.60
Deux algèbres de cochaînes commutatives (A, d) *et* (B, d) *sont dites faiblement équivalentes s'ils sont liés par une suite de quasi-isomorphismes d'algèbres de cochaînes commutatives de la forme :*

$$(A, d) \xrightarrow{\cong} (C(0), d) \xleftarrow{\cong} \cdots \xrightarrow{\cong} (C(k), d) \xleftarrow{\cong} (B, d)$$

Remarque 2.1.61
Deux espaces topologiques X *et* Y *sont de même type d'homotopie rationnelle si et seulement si* $A_{PL(X)}$ *et* $A_{PL(Y)}$ *sont faiblement equivalents.*

Conclusions. Maintenant, nous sommes en mesure de conclure les résultats suivants :
–
$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Types d'homotopie} \\ \text{rationnelle} \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Classes d'équivalence faible} \\ \text{d'algèbres de cochaînes commutatives.} \end{array} \right\}$$

Cette correspondance est bijective, lorsqu'on se restreint aux espaces topologiques simplement connexes X et aux adgc (A, d) tels que $H^*(X; \mathbb{Q})$ et $H^*(A, d)$ soient de type fini.
– D'où les bijections

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Classes d'homotopie} \\ \text{rationnelle des} \\ \text{CW-complexes simplement connexes} \end{array} \right\} \xleftrightarrow{\cong} \left\{ \begin{array}{c} \text{Classes d'isomorphismes} \\ \text{des algèbres de Sullivan} \\ \text{minimales.} \end{array} \right\}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Classes d'homotopie} \\ \text{des applications continues} \\ \text{entre espaces rationnels} \end{array} \right\} \xleftrightarrow{\cong} \left\{ \begin{array}{c} \text{Classes d'homotopie} \\ \text{des applications entre} \\ \text{algèbres de Sullivan.} \end{array} \right\}$$

Mais le résultat qui nous importe le plus lors des preuves de nos résultats est le suivant :

Théorème 2.1.62 *Si X est un espace topologique simplement connexe de modèle minimal $(\Lambda V, d)$, alors*

$$\begin{array}{rcll} H^*(X, \mathbb{Q}) & \cong & H^*(\Lambda V, d) & \text{en tant qu'agc} \\ \pi_n(X) \otimes \mathbb{Q} & \cong & Hom(V^n, \mathbb{Q}) & \text{en tant qu'espaces vectoriels} \end{array}$$

Exemples de modèles.

- La sphère $\mathbb{S}^{2n+1}$, $n \geq 1$ a pour modèle minimal de Sullivan, $(\Lambda\{x\}, 0)$ où $|x| = 2n+1$, en particulier $\dim(\pi_{2n+1}(\mathbb{S}^{2n+1}) \otimes \mathbb{Q}) = 1$ et les autres groupes d'homotopie triviaux, avec $H^*(\mathbb{S}^{2n+1}; \mathbb{Q}) = \Lambda\{x\}$.
- La sphère $\mathbb{S}^{2n}$ a pour modèle minimal de Sullivan, $(\Lambda\{x, y\}, d)$ où $|x| = 2n,\ |y| = 4n-1$, avec $dx = 0$ et $dy = x^2$. Les calculs donnent que $H^*(\mathbb{S}^{2n}; \mathbb{Q})$ est engendrée par 1 et x. Tous les groupes d'homotopie rationnelle sont nuls, sauf $\dim(\pi_{2n}(\mathbb{S}^{2n}) \otimes \mathbb{Q}) = \dim(\pi_{4n-1}(\mathbb{S}^{2n}) \otimes \mathbb{Q}) = 1$.

2.1.7 Quelques espaces particuliers.

Espaces elliptiques. Ce sont les espaces topologiques X, à cohomologie et homotopie rationnelles toutes les deux de dimensions finies, plus précisement

$$\dim H^*(X; \mathbb{Q}) < \infty \quad \text{et} \quad \dim(\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}) < \infty.$$

Dans ce cas, quand X est simplement connexe, alors il admet un modèle minimal, vérifiant :

$$\dim H^*(\Lambda V, d) < \infty \quad \text{et} \quad \dim V < \infty.$$

Espaces hyperelliptiques. Ce sont les CW-complexes finis et simplement connexes, dont le modèle minimal $(\Lambda V, d)$ vérifie :

$$dV^{\text{pair}} = 0 \quad \text{et} \quad dV^{\text{impair}} \subset \Lambda^+ V^{\text{pair}} \otimes \Lambda V^{\text{impair}}.$$

Espaces purs. Ce sont les CW-complexes finis et simplement connexes, dont le modèle minimal $(\Lambda V, d)$ vérifie :

$$dV^{\text{pair}} = 0 \quad \text{et} \quad dV^{\text{impair}} \subset \Lambda^{\geq 2} V^{\text{pair}}.$$

On remarque donc que les espaces purs sont hyperelliptiques.

2.2 Les théorèmes

2.2.1 Invariants d'Euler-Poincaré

Définition 2.2.1 *Pour tout espace topologique elliptique, X, on définit deux invariants :*
- *Invariant cohomologique :* $\chi_c(X) := \sum_{k\geq 0}(-1)^k \dim H^k(X,\mathbb{Q})$.
- *Invariant homotopique :* $\chi_\pi(X) := \sum_{k\geq 0}(-1)^k \dim(\pi_k(X)\otimes\mathbb{Q})$.

Remarque 2.2.2 *Soit X un espace topologique elliptique simplement connexe, de modèle minimal $(\Lambda V, d)$. S'il n'y a pas de risque de confusion, on note ces invariants par χ_c et χ_π. Ainsi*

$$\begin{aligned}\chi_c &= \dim H^{pair}(X,\mathbb{Q}) - \dim H^{impair}(X,\mathbb{Q}),\\ \chi_\pi &= \dim V^{pair} - \dim V^{impair}.\end{aligned}$$

Deux résultats importants, dûs en premier lieu à *H. Cartan*, puis reformulés et démontrés correctement par *S. Halperin* sont les deux théorèmes suivants, dont on trouvera les démonstrations dans ([FHT01]-page 444) :

Théorème 2.2.3 *Si $(\Lambda V, d)$ est un modèle minimal d'un espace elliptique simplement connexe, alors*

$$\chi_c \geq 0\ ,\ \chi_\pi \leq 0.$$

Remarque 2.2.4 *D'après la relation de la remarque 2.2.2 et le théorème 2.2.3, on conclut que pour tout modèle minimal $(\Lambda V, d)$, d'un espace elliptique simplement connexe, on a toujours*

$$\dim V^{pair} \leq \dim V^{impair}.$$

Théorème 2.2.5 *Si $(\Lambda V, d)$ est un modèle minimal d'un espace elliptique simplement connexe, les propriètes suivantes sont équivalentes*

1. $\chi_c > 0$.
2. $\chi_\pi = 0$, *(i.e.,* $\dim V^{pair} = \dim V^{impair}$*).*
3. $H^*(X,\mathbb{Q}) = H^{pair}(X,\mathbb{Q})$, *(i.e.,* $H^{impair}(X,\mathbb{Q}) = 0$*).*
4. $(\Lambda V, d)$ *est pur, avec d qui envoie une base de V^{impair} en une suite régulière de ΛV^{pair}.*

2.2.2 Dimension formelle

Définition 2.2.6 *Pour un espace elliptique X, on définit sa dimension formelle, qu'on note $fd(X)$, comme étant le plus grand entier n, quand il existe, tel que $H^n(X,\mathbb{Q}) \neq 0$. Sinon on pose $fd(X) = +\infty$.*

Remarque 2.2.7 *Soit X un espace elliptique, de dimension formelle finie, $n = fd(X)$. On a les résultats suivants :*

- $\dim H^n(X,\mathbb{Q}) = 1$,
- *le produit $H^k(X,\mathbb{Q}) \times H_{n-k}(X,\mathbb{Q}) \longrightarrow H_n(X,\mathbb{Q})$ est une application bilinéaire non dégénérée (Dualité de Poincaré).*

Dans [FrHa79], J. Friedlander et S. Halperin ont donné la comparaison ci-dessous entre la dimension formelle d'un espace elliptique 1-connexe et la dimension de l'espace qui engendre son modèle minimal.

Théorème 2.2.8 *Si X est un espace elliptique et 1-connexe de modèle minimal $(\Lambda V, d)$, alors*

$$fd(X) \geq \dim V.$$

Dans le même article, les deux auteurs proposent les relations ci dessous (très utiles) entre la dimension formelle et les degrés d'une famille particulière de générateurs du modèle.

Théorème 2.2.9 *Pour tout espace elliptique 1-connexe X, de modèle minimal $(\Lambda V, d)$, on peut trouver une base $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de V^{pair} et une base $\{y_1, \ldots, y_{n+p}\}$ de V^{impair} vérifiant les propriétés suivantes :*

- $|x_1| \leq \cdots \leq |x_n|$ *et* $|y_i| \geq 2|x_i| - 1$ *pour tout* $i \in \{1, \ldots, n\}$.
- $\sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq fd(X)$ *et* $\sum_{i=1}^{n+p} |y_i| \leq 2fd(X) - 1$.
- $\sum_{i=1}^{n+p} |y_i| - \sum_{i=1}^{n} (|x_i| - 1) = fd(X)$.

2.2.3 Rang torique

Définition 2.2.10

1. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *On dit que le tore* $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$, *de dimension* n, *opère presque librement sur un espace topologique* X, *quand ses sous-groupes d'isotropie* $G_x = \{g \in G \text{ tel que } g.x = x\}$ *sont finis pour tout* $x \in X$.
2. *Le plus grand entier* n, *quand il existe, tel que* $\mathbb{T}^n$ *opère presque librement sur* X *s'appelle le rang torique de* X, *et se note* $rk(X)$.
3. *Si ce maximum n'existe pas, on écrit alors* $rk(X) = \infty$.
4. *Si aucun tore n'agit presque librement sur* X, *on écrit* $rk(X) = 0$.

Remarque 2.2.11 *Soit* X *un espace topologique 1-connexe. Comme on est intéressé seulement par son type d'homotopie rationnelle, on appelle rang torique rationnel de* X, *l'entier noté* $rk_0(X)$, *défini par la relation suivante :*

$$rk_0(X) := rk(X_{\mathbb{Q}}).$$

Dans [AH78] C. Allday et S. Halperin ont donné une majoration du rang torique pour un espace elliptique, 1-connexe.

Théorème 2.2.12 *Si* X *est un CW-complexe, fini et 1-connexe, alors*

$$rk_0(X) \leq -\chi_\pi.$$

Plus encore si $rk_0(X) = -\chi_\pi$, *alors* X *est pur.*

La formulation originale de ce résultat, comportait des conditions techniques sur la topologie de l'espace, mais comme elles sont satisfaites par les CW-complexes finis et 1-connexes, on ne les mentionnera pas ici.

Dans [FrHa79], J. Friedlander et S. Halperin se sont intéressès à la réciproque et ont montré que :

Théorème 2.2.13 *Si* X *est un espace 1-connexe pur, alors* $\chi_\pi = -rk_0(X)$.

S. Halperin avait conjecturé dans [Ha85] une autre majoration du rang torique :

Conjecture du Rang Torique. Si X est simplement connexe, alors

$$\dim H^*(X,\mathbb{Q}) \geq 2^{rk_0(X)}.$$

Dans [Hi00], M.R Hilali confirme la conjecture de Halperin sous les conditions supplémentaires suivantes :

Théorème 2.2.14 *Si X est simplement connexe, alors* $\dim H^*(X,\mathbb{Q}) \geq 2^{rk_0(X)}$ *dans les cas suivants :*
- *X est CW complexe hyperelliptique fini.*
- *X est elliptique vérifiant $fd(X) - rk_0(X) \leq 6$.*

Rappellons que :

Définition 2.2.15 *Un espace topologique simplement connexe X, de modèle minimal $(\Lambda V, d)$ est dit hyperelliptique si son modèle vérifie les conditions suivantes :*

$$dV^{pair} = 0$$
$$dV^{impair} \subset \Lambda V^{pair} \otimes \Lambda V^{impair}$$

2.2.4 Catégorie de Lusternick-Schnirelmann

Définition 2.2.16 *La catégorie de Lusternick-Schnirelmann d'un espace topolgique X, qui se note $cat(X)$, désigne le plus petit entier n tel que X soit couvert par $n+1$ ouverts contractibles dans X. Sa LS-catégorie rationnelle est définie par la relation*

$$cat_0(X) = cat(X_{\mathbb{Q}}).$$

Si $(\Lambda V, d)$ est un modèle minimal associé à X, on pose

$$cat_0(\Lambda V) = cat_0(X).$$

Dans [FxHa82], Y. Felix et S. Halperin montrèrent le résultat suivant :

Théorème 2.2.17 *Si $(\Lambda V, d)$ est un modèle minimal, de LS-catégorie fini, alors*

$$\dim V^{impair} \leq cat_0(\Lambda V)$$

Chapitre 3

Nos résultats

3.1 Le cas H-espace

Définition 3.1.1 *Un H-espace est un espace topologique X pointé (en général supposé connexe), muni d'une application pointée continue $\mu : X \times X \longrightarrow X$, pour laquelle le point de base est un élèment neutre à homotopie près.*
Autrement dit, les applications $X \xrightarrow{1,*} X \times X \xrightarrow{\mu} X$ et $X \xrightarrow{*,1} X \times X \xrightarrow{\mu} X$ sont homotopes à l'identité.

Il est clair que les groupes topologiques sont des H-espaces, toutefois il peut manquer dans un H-espace l'associativité et l'inversibilité.

C'est *Jean-Pierre Serre*[1] qui les a appelé ainsi, en l'honneur de *Heinz Hopf*[2]. Notons enfin que le groupe fondamental d'un H-espace est abelien, et que les seules sphères qui sont des H-espaces sont $\mathbb{S}^0, \mathbb{S}^1$(complexes), $\mathbb{S}^3$(quaternions) et $\mathbb{S}^7$(octanions) [Ad60].

Les H-espaces abondent en géométrie et en topologie :

- Les espaces projectifs réels $\mathbb{RP}^1, \mathbb{RP}^3, \mathbb{RP}^7$. Dans le cas général $\mathbb{RP}^n$ est un H-espace si et seulement si $n+1$ est une puissance de 2.
- L'espace des lacets ΩX, d'un espace pointé X.
- Les espaces d'*Eilenberg*[3]-*MacLane*[4], $K(G,n)$, avec $n \geq 1$ et G abélien, parce que $K(G,n) = \Omega K(G, n+1)$.
  En particulier l'espace projectif complexe, $\mathbb{CP}^\infty = K(\mathbb{Z}, 2)$ est un H-espace.

[1] Jean-Pierre Serre (1926-) est un mathématicien français, médaille Fields en 1954, prix Abel en 2003, étudiant de Henri Cartan. Il a effectué des travaux fondamentaux en théorie des nombres et géométrie algébrique.

[2] Heinz Hopf (1894-1974), mathématicien allemand, connu pour ses travaux en topologie. Au début de la Première Guerre mondiale, Hopf s'était engagé dans l'armée. Il a été blessé deux fois et avait reçu la croix de Fer en 1918. Au cours de la 2ème guerre mondiale, il fût chassé par les nazis et ses biens confisqués.

[3] Samuel Eilenberg (1913-1998) était un mathématicien américain-polonais, connu par ses travaux en topologie algébrique, la théorie de l'homologie et la théorie des catégories. Membre du groupe Bourbaki et lauréat du Prix Wolf.

[4] Saunders MacLane (1909-2005) est un mathématicien américain, l'un des fondateurs, de la théorie des catégories avec Eilenberg.

Ce qui nous intéresse à la fin est de montrer que la conjecture H est vérifiée par les H-espaces.

Théorème 3.1.2 *Si X est un H-espace de type fini, alors*
$$\dim H^*(X,\mathbb{Q}) \geq \dim(\pi_*(X)\otimes\mathbb{Q}).$$

Preuve. L'argument est assez simple, dans ([FHT01]-page 143-example 3), on peut lire que tout H-espace admet un modèle minimal de la forme $(\Lambda V, 0)$, donc $H^*(\Lambda V,d)\cong \Lambda V$, et par suite $\dim H^*(\Lambda V,d)\geq \dim V$. □

3.2 Le cas pur

Rappelons d'abord que :

Définition 3.2.1 *Un espace topologique X, simplement connexe, de modèle minimal $(\Lambda V,d)$ est dit pur si*

$$\begin{cases} dV^{pair} = 0 \\ dV^{impair} \subset \Lambda V^{pair} \end{cases}$$

Dans ce cas, son modèle est aussi appelé modèle pur.

Comme signalé auparavant, M.R. Hilali à déjà résolu en 1990 la conjecture H dans le cas pur. Dans le but de rendre accessibles au lecteur nos démonstrations, on a jugé utile de rappeler la démonstration faite par M.R. Hilali dans le cas pur avec la condition supplémentaire $\chi_\pi = 0$. Démonstrartion dont on s'est inspiré pour prouver quelques résultats.

Théorème 3.2.2 *Si $(\Lambda V,d)$ est un modèle elliptique pur tel que $\chi_\pi = 0$, alors* $\dim H^*(\Lambda V,d)\geq \dim V$.

Preuve. On sait d'après (théorème 2.2.5, page 32) que

$$\dim V^{\text{pair}} = \dim V^{\text{impair}},$$

donc

$$\dim V = 2\dim V^{\text{pair}},$$

mais aussi que

$$\dim H^*(\Lambda V,d) = \dim H^{\text{pair}}(\Lambda V,d).$$

Notons par $\{x_1,\ldots,x_n\}$ une base homogène de V^{pair} et par W_1 et W_2 les sous-espaces vectoriels de $H^{\text{pair}}(\Lambda V,d)$ engendrés respectivement par $([x_i])_{1\leq i\leq n}$ et $([x_ix_j])_{1\leq i\leq j\leq n}$. Posons

$W_0 := H^0(\Lambda V, d) \cong \mathbb{Q}$. La minimalité du modèle assure que $W_0 \oplus W_1 \oplus W_2$ est une somme directe dans $H^{\text{pair}}(\Lambda V, d)$ et que$([x_i])_{1 \leq i \leq n}$ sont linéairement indépendants, donc

$$\dim H^{\text{pair}}(\wedge V, d) \geq 1 + n + \dim W_2.$$

D'autre part

$$W_2 \oplus (\Lambda^2 V^{\text{pair}} \cap dV^{\text{impair}}) = \Lambda^2 V^{\text{pair}}.$$

Mais

$$\dim \Lambda^2 V^{\text{pair}} = \frac{n(n+1)}{2}$$

et

$$\dim(\Lambda^2 V^{\text{pair}} \cap dV^{\text{impair}}) \leq n.$$

Alors

$$\dim W_2 \geq \frac{n(n+1)}{2} - n,$$

donc $\dim H^*(\Lambda V, d) \geq \dfrac{n(n+1)}{2} + 1 \geq 2n = \dim V$. □

3.3 Le cas formel

Définition 3.3.1 *Un espace topologique 1-connexe X est dit formel, quand il admet le même modèle que sa cohomologie singulière $H^*(X, \mathbb{Q})$. Ce modèle est aussi dit formel.*

Autrement dit l'homotopie de l'espace peut être lue à partir de sa cohomologie rationnelle. Comme exemples d'espaces formels, on peut citer :
- Les sphères.
- Les H-espaces.
- Les espaces symétriques.
- Les variétés de Kähler compactes.
- Les espaces elliptiques de charactéristique d'Euler-Poincaré $\chi > 0$.

Signalons que les nilvariétés (voir définition à la page 42) ne sont presque jamais formelles, et que dans [HS79], S. Halperin et J. Stasheff ont étudié en détails l'obstruction pour qu'un espace soit formel.

Théorème 3.3.2 *Si $(\Lambda V, d)$ est un modèle 1-connexe, elliptique et formel, alors* $\dim H^*(\Lambda V, d) \geq \dim V$.

Preuve. D'après [FxH82] le modèle $(\Lambda V, d)$ est de la forme

$$V = V_0 \oplus V_1$$

avec

$$dV_0 = 0, V_1 = V_1^{\text{pair}}$$

et

$$dV_1 \subset \Lambda V_0.$$

Plus encore V_1 admet une base $\{y_j\}_{1\leq j\leq m}$ telle $\{dy_j\}_{1\leq j\leq m}$ que est une suite régulière dans ΛV_0.

Soit $(\Lambda V, d_\sigma)$ le modèle pur associé à $(\Lambda V, d)$ (cf. [FHT01]-page 438), et écrivons $dy_j = \alpha_j + \beta_j$ où $\alpha_j \in \Lambda V_0^{\text{pair}}$ et $\beta_j \in \Lambda^+ V_0^{\text{impair}}$, donc $d_\sigma y_j = \alpha_j$. D'après (Proposition 32.4, [FHT01], page 438), on a $\dim H^*(\Lambda V, d_\sigma) < \infty$.

Soit maintenant $\{x_i\}_{1\leq i\leq n}$ et $\{z_k\}_{1\leq k\leq q}$ bases respectives de V_0^{pair} et de V_0^{impair}. Donc

$$H^*(\Lambda V, d_\sigma) = \frac{\Lambda(x_1, \cdots, x_n)}{(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)} \otimes \Lambda(z_1, \cdots, z_q)$$

Comme la suite α_j est aussi régulière dans $\Lambda\{x_1, \ldots, x_n\}$, on a $m = n$ et par suite $\dim V = 2n + q$.

Avec les mêmes notations et arguments que ceux utilisés dans le preuve du cas pur (cf. page 38), la somme $W_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus V_0^{\text{impair}}$ est aussi directe dans $H^*(\Lambda V, d)$.

Donc
$$\begin{aligned} \dim H^*(\Lambda V, d) &\geq 1 + \dim W_1 + \dim W_2 + \dim V_0^{\text{impair}} \\ &\geq \tfrac{n(n+1)}{2} + 1 + q \\ &\geq 2n + q \\ &= \dim V. \end{aligned}$$

□

3.4 Le cas symplectique

Définition 3.4.1 *Une variété symplectique (cf. [La98]) est une variété différentielle $X = M^{2m}$, munie d'une forme différentielle de degré deux ω fermée et non dégénérée, appelée forme symplectique.*

Les variétés symplectiques apparaissent lors de l'étude des formulations abstraites de la mécanique classique (Hamiltonnienne) et analytique (quantique), notamment dans la description hamiltonienne de la mécanique, où les configurations d'un système forment une variété dont le fibré cotangent décrit l'espace des phases du système.

Les variétés dites de *Kähler*[5] sont l'exemple le plus connu mais aussi étudié des variétés symplectiques, elles vérifient en plus une propriété dite propriété de relèvement de *Lefshetz*[6]
.

[5]Erich Kähler (1906 - 2000), est un mathématicien allemand connu pour ses travaux en très vastes géometrie . Il a aussi travaillé sur la mécanique céleste. Il fut un des précurseurs de la théorie des schémas.

[6]Solomon Lefschetz (1884 - 1972), est un mathématicien américain, essentiellement connu pour ses travaux en topologie algébrique, géométrie algébrique et théorie des équations différentielles non linéaires.

Théorème 3.4.2 *Si $X = M^{2m}$ est une variété différentielle symplectique, alors*

$$\dim H^*(X,\mathbb{Q}) \geq \dim \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}.$$

Preuve. On sait que toute variété symplectique $X = M^{2m}$, vérifie les propriétés suivante :
- $fd(X) = 2m$.
- $\exists w \in H^2(X,\mathbb{Q})$ tel que $H^{2m}(X,\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}w^m$.
- Le cup-produit $w^k : H^{m-k}(X,\mathbb{Q}) \longrightarrow H^{m+k}(X,\mathbb{Q})$ est un isomorphisme.

Ainsi tous les nombres de Betti[7] $b_{2i} = \dim H^{2i}(X,\mathbb{Q}), 0 \leq i \leq m$ sont non nuls, donc $\dim H^{\text{pair}}(X,\mathbb{Q}) \geq m+1$, on distingue deux cas :

1. $\chi_c > 0$. Dans ce cas X est pur (d'après le théorème 2.2.5, cf. page 32), et pour les espaces purs la conjecture H est déjà résolue (cf. page 38).
2. $\chi_c = 0$. D'après Théorème 2.2.5, page 32), on a :
$$\begin{aligned} \dim H^*(X,\mathbb{Q}) = &\ 2\dim H^{\text{pair}}(X,\mathbb{Q}) \\ \geq &\ 2m+2 \\ > &\ 2m = fd(X) \\ \geq &\ \dim V \qquad \text{(d'après Théorème 2.2.8, page 33)} \end{aligned}$$

□

3.5 Le cas cosymplectique

Définition 3.5.1 *Une structure cosymplectique sur une variété M de dimension $2m+1$ est la donnée d'une 1-forme fermée θ et une 2-forme fermée ω telles que $\theta \wedge \omega^m$ soit une forme de volume sur M, où ω^m désigne le produit de m copies de ω.*

Théorème 3.5.2 *Si $X = M^{2m+1}$ est une variété différentielle cosymplectique, alors*

$$\dim H^*(X,\mathbb{Q}) \geq \dim \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}.$$

Preuve. On sait d'après [BG67], que les nombres de Betti sont tous non nuls, plus encore, on peut lire dans [CLM93] qu'ils croient de la façon suivante :

$$b_0 = b_{2m+1} \leq b_1 = b_{2m} \leq \cdots \leq b_m = b_{m+1}$$

[7] Enrico Betti (1823-1892), est un mathématicien italien connu pour ces contributions à l'algèbre et à la topologie, ainsi qu'à la théorie de l'élasticité (théorème de la réciprocité) et du potentiel. Il est parmi les premiers à comprendre l'importance de la théorie de Galois.

donc

$$\dim H^*(\Lambda V, \mathbb{Q}) = \sum_{i=0}^{2m+1} b_i \geq 2m+2 > 2m+1 = fd(X) \geq \dim V.$$

Remarque 3.5.3 *D'après la définition d'une variété cosymplectique il existe une 1-forme fermée η et donc une classe dans $H^1(X, \mathbb{Q})$ qui n'est pas nulle. Tous les exemples connus de variétés cosymplectiques sont non 1-connexes. Cependant il s'agit d'espaces simples (π_1 abélien opérant trivialement sur les π_n) ou bien d'espaces nilpotents (π_1 nilpotent opérant de manière nilpotente sur les π_n). Ces espaces admettent des modèles minimaux de Sullivan (non 1 connexes) qui vérifient la propriété $fd(X) \geq \dim V$.*

3.6 Le cas nilvariété

Définition 3.6.1 *On appelle nilvariété, tout quotient d'un groupe de Lie nilpotent par un sous groupe discret cocompact*

On rappelle d'abord les résultats suivants :

- Un sous groupe discret Γ d'un groupe G est dite cocompact (ou cristalographique) si l'espace homogène G/Γ est compact.
- Toute nilvariété admet un modèle minimal de la forme

$$(\Lambda V, d) = (\Lambda\{x_1 \cdots, x_n\}, d) \text{ tel que } |x_i| = 1 \text{ (cf [LP82], [Op92])}$$

Théorème 3.6.2 *Si X est une nilvariété, alors*

$$\dim H^*(X, \mathbb{Q}) \geq \dim \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}.$$

Preuve. On sait d'après [Dix55], que pour toute nilvariété X, les nombres de Betti vérifient $b_i \geq 2$ donc $\dim H^*(\Lambda V, d) \geq 2fd(X)$. D'autre part, nilvariétés sont des $K(\pi, 1)$ où π est un groupe nilpotent donc vérifient l'inégalité $fd(X) \geq \dim V$.

3.7 Le cas hyperelliptique, avec condition

Définition 3.7.1 *Un espace elliptique 1-connexe X et son modèle $(\Lambda V, d)$ sont dits hyperlliptiques, quand la condition suivante est remplie*

$$\begin{cases} dV^{pair} = 0, \\ dV^{impair} \subset \Lambda V^{pair} \otimes \Lambda V^{impair}. \end{cases}$$

Soit $\{x_1, \ldots, x_n\}$ une base de V^{pair} et $\{y_1, \ldots, y_{n+p}\}$ une base de V^{impair} où $p = -\chi_\pi \geq 0$ (voir 2.2.2, page 32). Donc

$$\begin{aligned} dx_i &= 0, \\ dy_j &= P_j + \omega_j \text{ où } P_j \in \Lambda V^{\text{pair}}, \omega_j \in \Lambda V^{\text{pair}} \otimes \Lambda^+ V^{\text{impair}}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Une simple comparaison entre cette définition et celle d'un espace pur (voir (**??**), page **??**) montre que les w_j représentent l'obstruction pour qu'un espace hyperelliptique soit pur. Comme la conjecture H est déjà résolue dans le cas pur (cf. page 38), on supposera ici que l'espace ne l'est pas, donc $\exists w_j \neq 0$. C'était l'idée clé à l'origine du résultat suivant :

Théorème 3.7.2 *Si* $(\Lambda V, d)$ *est un modèle hyperellitique tel que*

$$n \geq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{12p - 15})$$

où $n = \dim V^{pair}$ *et* $p = -\chi_\pi$*, alors* $\dim H^*(\Lambda V, d) \geq \dim V$.

Preuve. Avec les mêmes notations que celles utilisées dans la preuve du cas pur (page 38), la somme $W_0 \oplus W_1 \oplus W_2$ est encore directe dans $H^{\text{pair}}(\Lambda V, d)$. On supposera encore que le modèle n'est pas pur, puisque la conjecture H est déjà résolue dans ce cas, donc $\exists w_j \neq 0$, par suite $dy_j \notin \Lambda^2 V^{\text{pair}}$.

D'autre part $\{dy_1, \ldots, dy_{n+p}\}$ est une famille génératrice de dV^{impair}, ainsi seulement $n + p - 1$ éléments parmi $\{dy_1, \ldots, dy_{n+p}\}$ peuvent engendrer $\Lambda^2 V^{\text{pair}} \cap dV^{\text{impair}}$ et donc $\dim \Lambda^2 V^{\text{pair}} \cap dV^{\text{impair}} \leq n + p - 1$. On a

$$\begin{aligned} &W_2 \oplus (\Lambda^2 V^{\text{pair}} \cap dV^{\text{impair}}) = \Lambda^2 V^{\text{pair}}, \\ &\dim \Lambda^2 V^{\text{pair}} = \tfrac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

donc

$$\dim W_2 \geq \frac{n(n+1)}{2} - n - p + 1$$

et enfin

$$\dim H^{\text{pair}}(\Lambda V, d) \geq \frac{n(n+1)}{2} - p + 2.$$

Le modèle est toujours non pur, donc d'après le théorème 2.2.5-page 32, $\chi_c = 0$ et alors

$$\dim H^*(\Lambda V, d) = 2 \dim H^{\text{pair}}(\Lambda V, d) \geq n(n+1) - 2p + 4.$$

Comme $\dim V = 2n + p$, alors

$$\dim H^*(\Lambda V, d) - \dim V \geq n^2 - n - 3p + 4$$

L'étude du binôme $P(n, p) = n^2 - n - 3p + 4$, montre que $\dim H^*(\Lambda V, d) \geq \dim V$ quand :

$$\begin{cases} p \geq 2 & \text{et} \quad n \geq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{12p - 15}). \\ p \in \{0, 1\} & \text{et} \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

□

3.8 Sous condition sur la dimension formelle

Remarque 3.8.1 *La dernière ligne de la démonstration du théorème 3.7.2 affirme que la conjecture H est vraie pour tout modèle hyperelliptique* $(\Lambda V, d)$ *dans les cas suivants :*

- $p \in \{0, 1\}$ *et* $n \in \mathbb{N}$.
- $p = 2$ *et* $n \geq 2$.

Pour le cas où $p = 2$ *et* $n \in \{0, 1\}$, *on a* $\dim H^*(\Lambda V, d) \geq 2(1 + \dim W_1) = 2 + 2n = \dim V$. *On conclut donc que*

$$\dim H^*(\Lambda V, d) \geq \dim V \ \textit{si} \ p \in \{0, 1, 2\}$$

Théorème 3.8.2 *Si* X *est un espace elliptique, 1-connexe tel que* $fd(X) \leq 10$, *alors*

$$\dim H^*(X, \mathbb{Q}) \geq \dim(\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}).$$

Preuve. Soit $\{x_1, \ldots, x_n\}$ une base de V^{pair} et $\{y_1, \ldots, y_{n+p}\}$ une base de V^{impair}, vérifiant les conditions du théorème 2.2.9-page 33. On obtient alors les tableaux récapitulatifs suivants, dans lesquels on donne les degrés des éléments x_i et y_j suivant les valeurs possibles de $fd(X)$. On écrit 0 pour dire qu'il n'y a pas de tels éléments :

$fd(X)$	$(\lvert x_1\rvert, \ldots, \lvert x_n\rvert)$	$(\lvert y_1\rvert, \ldots, \lvert y_{n+p}\rvert)$
10	0	(5,5)
	0	(3,7)
	(2)	(3,3,5)
	(2,2)	(3,3,3,3)
	(2,2,2)	(3,5,5)
	(2,2,2)	(3,3,7)
	(2,2,2,2)	(3,3,3,5)
	(2,2,2,2,2)	(3,3,3,3,3)
	(2,4)	(7,7)
	(2,6)	(5,11)
	(2,4,4)	(3,7,7)
	(4)	(7,3,3)
	(4,6)	(7,11)

On vérifie à la main pour ce tableau que tous les espaces sont hyperelliptiques avec $\chi_\pi \in \{0, -1, -2\}$, donc vérifient la conjecture (H) d'après la remarque 3.8.1-page 44.

$fd(X)$	$(\|x_1\|, \ldots, \|x_n\|)$	$(\|y_1\|, \ldots, \|y_{n+p}\|)$
2	(2)	(3)
3	0	(3)
4	(2)	(5)
	(2,2)	(3,3)
	(4)	(7)
5	0	(5)
	(2)	(3,3)
6	0	(3,3)
	(2)	(7)
	(2,2)	(3,5)
	(2,4)	(3,7)
	(2,2,2)	(3,3,3)
7	0	(7)
	(2)	(3,5)
	(4)	(7.3)
	(2,2)	(3,3,3)
8	0	(3,5)
	(2)	(3,3,3)
	(2,2,2)	(3,3,5)
	(2,4)	(5,7)
	(2,2,2,2)	(3,3,3,3)
	(4,4)	(7,7)
	(6)	(13)
9	0	(9)
	(2)	(3,7)
	(2)	(5,5)
	(2,2)	(3,3,5)
	(2,2,2)	(3,3,3,3)
	(2,4)	(3,7,3)
	(4)	(7,5)
	(6)	(11,3)

On vérifie aussi à la main, cas par cas que tous les espaces sont purs, donc vérifient la conjecture H, d'après le théorème 2.2.5-page 32. $\square$

3.9 Sous condition sur les suites exactes

Définition 3.9.1 *Une suite exacte longue est la donnée d'un schèma de la forme*

$$0 = V_0 \xrightarrow{f_0} V_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \longrightarrow V_n \xrightarrow{f_n} V_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \cdots$$

où $V_n \xrightarrow{f_n} V_{n+1}$ *sont des applications linéaires entre espaces vectoriels vérifiant*

$$Imf_n = \ker f_{n+1}$$

Définition 3.9.2 *Une suite exacte courte est la donnée d'un schèma de la forme*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

où f, g *sont des applications linéaires entre espaces vectoriels telles que*

$$\begin{array}{l} f \ \textit{injective} \\ g \ \textit{surjective} \\ Imf = \ker g \end{array}$$

D'après le résultat d'algèbre linéaire connu sous le nom du *théorème du rang* on a :

$$\begin{aligned} \dim B = & \ \dim\ker g + \dim \mathrm{Im} g & \\ = & \ \dim \mathrm{Im} f + \dim C & (g \text{ surjective}) \\ = & \ \dim A + \dim C & (f \text{ injective}) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Pour le prochain résultat, commençons par cet exemple introductif.

Soit $(\Lambda V \otimes \Lambda y, d)$ un modèle minimal, avec $|y|$ impair, considérons la suite exacte courte suivante :

$$0 \longrightarrow (\Lambda V, d) \xrightarrow{\phi} (\Lambda V \otimes \Lambda y, d) \xrightarrow{\psi} (\Lambda V, d) \longrightarrow 0$$

où $\phi(a) = a \otimes 1$ et $\psi(a \otimes y + b \otimes 1) = a$. Elle induit en cohomolgie la suite exacte longue suivante :

$$\begin{array}{ccccc} \cdots \longrightarrow H^*(\Lambda V, d) \xrightarrow{H^*(\phi)} H^*(\Lambda V \otimes \Lambda y, d) \xrightarrow{H^*(\psi)} H^*(\Lambda V, d) & \xrightarrow{\delta} & H^*(\Lambda V, d) \longrightarrow \cdots \\ \beta & \longmapsto & \beta[dy] \end{array}$$

où δ s'appelle le *connectant* de la suite exacte. Puis on condense cette suite exacte longue en la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \text{coker } \delta^{8} \longrightarrow H^*(\Lambda V \otimes \Lambda y, d) \longrightarrow \ker\ \delta \longrightarrow 0$$

On s'est inspiré de cet exemple pour énoncer le résultat suivant :

[8] Si $f : E \longrightarrow E$ est une application linéaire, on pose coker $f = E/\mathrm{Im} f$

Théorème 3.9.3 *Soit $(\Lambda V, d)$ est un modèle 1-connexe et elliptique, concentré en degrés impair, (i.e. $V = V^{impair}$) engendré par une famille $\{y_1, \ldots, y_p\}$. Notons*

$$\begin{array}{rrcl} \delta_i : & H^*(\Lambda\{y_1, \ldots, y_{i-1}\}, d) & \longrightarrow & H^*(\Lambda\{y_1, \ldots, y_{i-1}\}, d) \\ & \beta & \longmapsto & \beta[dy_i] \end{array}$$

Si

$$\dim(\ker \delta_i) > \dim(\mathrm{Im}\delta_i) \textit{ pour tout } i \in \{2, \ldots, p\}$$

alors

$$\dim H^*(\Lambda V, d) \geq \dim V.$$

Preuve. On va raisonner par récurrence sur $p \geq 1$. Pour $p = 1$ le résultat est trivial. Supposons que $\dim H^*(\Lambda V, d) \geq \dim V$ pour $\dim V = p \geq 1$, et montrons que $\dim H^*(\Lambda W, d) \geq \dim W$ pour $\dim W = p \geq 2$, pour cela écrivons

$$\Lambda W = \Lambda\{y_1, \ldots, y_{p+1}\} = \Lambda V \otimes \Lambda y_{p+1}$$

$$\begin{array}{lll} \text{Donc} & \dim H^*(\Lambda W, d) & = \dim\ker\ \delta_{p+1} + \dim\ \mathrm{coker}\ \delta_{p+1} \\ & & = 2\dim\ker\ \delta_{p+1} \\ & & > \dim\ker\ \delta_{p+1} + \dim\mathrm{Im}\ \delta_{p+1} \\ & & = \dim H^*(\Lambda V, d) \\ & & \geq \dim V = p. \end{array}$$

□

Corollaire 3.9.4 *Si $(\Lambda V, d)$ est un modèle elliptique et 1-connexe, engendré par des éléments de degrés impairs, $y_1, \ldots, y_p$ satisfaisant les conditions suivantes : Pour tout $i \in \{3, \ldots, n\}$, il exist $\gamma_{1,i}, \gamma_{2,i} \in H^*(\Lambda\{y_1, \ldots, y_{i-1}\}, d)$ tel que $[dy_i] = \gamma_{1,i}\gamma_{2,i}$ et $\gamma_{1,i}^2 = 0$. Alors*

$$\dim H^*(\Lambda V, d) \geq \dim V.$$

Preuve. On a d'abord $\mathrm{Im}\delta_i \subset \ker \delta_i$ puisque $\delta_i^2 = 0$, mais aussi $\gamma_{1i} \in \ker \delta_i \neq 0$ car $\delta_i(\gamma_{1,i}) = \gamma_{1,i}[dy_i] = \gamma_{1i}^2\gamma_{2,i} = 0$. On va distinguer deux cas :

1) $[dy_i] = 0$, dans ce cas $\dim(\mathrm{Im}\delta_i) = 0 < \dim(\ker \delta_i)$.

2) $[dy_i] \neq 0$. Supposons alors que $\mathrm{Im}(\delta_i) = \ker(\delta_i)$, donc $\gamma_{1,i} \in \mathrm{Im}\delta_i$. C'est une contradiction entre le fait que $|\gamma_{1,i}| < |[dy_i]|$ et celui que pour tout élément non null γ de $\mathrm{Im}\delta_i$ on doit avoir $|\gamma| \geq |[dy_i]|$. Donc $\dim(\ker \delta_i) > \dim(\mathrm{Im}\delta_i)$ pour tout $i \in \{2, \ldots, p\}$, et on conclut enfin à l'aide du théorème 3.9.3. □

3.10 Sous condition sur le rang torique

Notre résultat principal en relation avec la notion du rang torique est le suivant :

Théorème 3.10.1 *Soit X est un espace hyperelliptique. Si*

$$rk_0(X) = -\chi_\pi - i \text{ avec } i \in \{0, 1, 2\},$$

alors

$$\dim H^*(X, \mathbb{Q}) \geq \dim(\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}).$$

Remarque 3.10.2 *D'abord pour le cas $rk_0(X) = -\chi_\pi$, l'espace est pur (cf. théorème 2.2.12-page 34), donc vérifie la conjecture H, d'après le théorème 2.2.5-page 32. La preuve du cas restant étant trés longue, on a jugé utile de la diviser en deux parties.*

Théorème 3.10.3 *Si X est un espace hyperelliptique tel que*

$$rk_0(X) = -\chi_\pi - 1,$$

alors

$$\dim H^*(X, \mathbb{Q}) \geq \dim(\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}).$$

Preuve. Soit $(\Lambda V, d)$ modèle minimal de X. On conclut d'après le théorème 2.2.15-page 35, que

$$\dim H^*(\Lambda V, d) \geq 2^{p-1},$$

où $p = -\chi_\pi$. Ainsi

$$2^{p-1} \geq 2n + p$$

est une condition suffisante pour avoir $\dim H^*(\Lambda V, d) \geq \dim V$. On écrit autrement cette condition suffisante en une autre équivalente

$$n \leq \frac{1}{2}(2^{p-1} - p).$$

Combinant cette dernière avec le théorème 2.2.15-page 35, on obtient une autre condition suffisante pour avoir $\dim H^*(\Lambda V, d) \geq \dim V$, qui est :

$$n \leq \frac{1}{2}(2^{p-1} - p) \text{ or } n \geq \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{12p - 15}\right). \tag{3.3}$$

Condition qu'on transforme en une autre, toujours suffisante qui est

$$\frac{1}{2}(2^{p-1} - p) \geq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{12p - 15})$$

mais qui est équivalente à

$$A_p = 2^p(2^{p-2} - p - 1) + p^2 - 10p + 16 \geq 0.$$

Pour $p \geq 8$, on a $p^2 - 10p + 16 \geq 0$ et $2^{p-2} - p - 1 > 0$, donc $A_p \geq 0$.
Pour $p \in \{5, 6, 7\}$, on vérifie facilement que $A_p \geq 0$.
Le cas où $p \in \{0, 1, 2\}$ a été déjà résolu dans la remarque 3.8.1, page 44.
Nous allons discuter maintenant le cas $p \in \{3, 4\}$.

1èr cas. $p = 3$, on déduit d'après (3.3) que $\dim H^*(\Lambda V, d) \geq \dim V$ si $n = 0$ ou bien $n \geq 3$.

1) Si $n = 1$, sans perte de généralité, on peut supposer que

$$\begin{aligned}
&dx_1 = 0 \\
&dy_1 = x_1^q + \omega_1 \\
&dy_2 = ax_1^r + \omega_2 \\
&dy_3 = bx_1^s + \omega_3 \text{ avec } 2 \leq q \leq r \leq s \\
&dy_4 = P_4(x_1) + \omega_4
\end{aligned}$$

1.1) Si $(a, b) = (0, 0)$, alors les éléments suivants : $[y_2], [xy_2], [y_3], [xy_3]$ sont linéairement indépendants dans $H^{\text{impair}}(\Lambda V, d)$. Donc $\dim H^*(\Lambda V, d) = 2 \dim H^{\text{impair}}(\Lambda V, d) \geq 8 > 5 = \dim V$.

1.2) Si $(a, b) \neq (0, 0)$ ($a \neq 0$ par exemple), dans ce cas les élèments suivants $[ax^{r-q}y_1 - y_2], [bx^{s-q}y_1 - y_3]$ et $[ax^{r-q+1}y_1 - xy_2]$ sont linéairement indépendants dans $H^{\text{impair}}(\Lambda V, d)$, donc $\dim H^*(\Lambda V, d) = 2 \dim H^{\text{impair}}(\Lambda V, d) \geq 6 > \dim V = 5$.

2) Si $n = 2$. rappelons d'abord les notations W_0, W_1 et W_2 utilisées dans la preuve du théorème 3.7.2, et le fait que $W_0 \oplus W_1 \oplus W_2$ est une somme directe dans $H^{\text{pair}}(\Lambda V, d)$ avec $\dim W_0 = 1$ et $\dim W_1 = n$.

2.1) Si $\dim W_2 \geq 1$, alors $\dim H^*(\Lambda V, d) = 2 \dim H^{\text{pair}}(\Lambda V, d) \geq 8 > \dim V = 7$.

2.2) Si $W_2 = \{0\}$, alors

$$\begin{aligned}
&dx_1 = dx_2 = 0, \\
&dy_1 = x_1^2, \\
&dy_2 = x_1x_2, dy_3 = x_2^2, \\
&dy_i = P_i(x_1, x_2) + \omega_i, \text{ pour } i \in \{4, 5\}
\end{aligned}$$

avec $\omega_4 \neq 0$ par exemple. Écrivons

$$\omega_4 = P(x_1, x_2)y_1y_2 + Q(x_1, x_2)y_1y_3 + R(x_1, x_2)y_2y_3$$

donc

$$d\omega_4 = -(x_2^2Q + x_1x_2P)y_1 + (x_1^2P - x_2^2R)y_2 + (x_1^2Q + x_1x_2R)y_3.$$

D'autre part $d\omega_4 = d^2y_4 - dP_4(x_1, x_2) = 0$, ce qui nous mène au système suivant :

$$\begin{cases}
x_2^2Q + x_1x_2P &= 0 \\
x_1^2P - x_2^2R &= 0 \\
x_1^2Q + x_1x_2R &= 0
\end{cases}$$

Comme les polynômes x_1^2 et x_2^2 sont premiers entre eux, alors il existe $Z \in \mathbb{Q}[x_1, x_2]$ tel que

$$P = x_2^2Z, Q = -x_1x_2Z, R = x_1^2Z.$$

D'où $\omega_4 = d(Zy_1y_2y_3)$. D'autre part $[P] \in W_2 = \{0\}$, écrivons donc $P = dx$, on a alors $y_4 - x - Zy_1y_2y_3$ est un cocycle. Enfin,les éléments suivants $\omega_1' = [y_4 - x - Zy_1y_2y_3]$, $x_1\omega_1'$, $[x_2y_1 - x_1y_2]$

et $[x_1y_3 - x_2y_2]$ sont linéairement indépendants dans $H^{\text{impair}}(\Lambda V, d)$, d'où $\dim H^*(\Lambda V, d) = 2 \dim H^{\text{impair}}(\Lambda V, d) \geq 8 > \dim V = 7$.

2ème cas : $p = 4$, on sait d'après (3.3), page 48 que $\dim H^*(\Lambda V, d) \geq \dim V$ si $n \leq 2$ ou bien $n \geq 4$. Supposons donc $n = 3$.

1) Si $\dim W_2 \geq 1$, alors $\dim H^*(\Lambda V, d) = 2 \dim H^{\text{pair}}(\Lambda V, d) \geq 10 = \dim V$.

2) Si $W_2 = \{0\}$, écrivons que

$$\begin{aligned}
&dx_i = 0 \text{ for } i \in \{1, 2, 3\},\\
&dy_1 = x_1^2, dy_2 = x_2^2,\\
&dy_3 = x_3^2, dy_4 = x_1x_2,\\
&dy_5 = x_1x_3, dy_6 = x_2x_3,\\
&dy_7 = P_7 + \omega_7.
\end{aligned}$$

On vérifie que $[x_2y_1 - x_1y_4]$, $[x_3y_1 - x_1y_5]$, $[x_1y_2 - x_2y_4]$, $[x_3y_2 - x_2y_6]$,$[x_1y_3 - x_3y_5]$,et $[x_2y_3 - x_3y_6]$ sont linéairement indépendants dans $H^{\text{impair}}(\Lambda V, d)$. Donc $\dim H^*(\Lambda V, d) = 2 \dim H^{\text{impair}}(\Lambda V, d) \geq 12 > \dim V = 10$. □

Théorème 3.10.4 *Si X est un espace hyperelliptique tel que*

$$rk_0(X) = -\chi_\pi - 2,$$

alors

$$\dim H^*(X, \mathbb{Q}) \geq \dim(\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}).$$

Preuve. Soit $(\Lambda V, d)$ un modèle minimal de X. Avec le même raisonnement que celui utilisé dans la preuve du théorème 3.10.3-page 48, on montre que

$$n \leq \frac{1}{2}(2^{p-2} - p) \text{ ou } n \geq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{12p - 15}) \tag{3.4}$$

est une condition suivante pour avoir $\dim H^*(\Lambda V, d) \geq \dim V$, qui donne l'autre condition suffisante

$$A_p = 2^{p-1}(2^{p-3} - p - 1) + p^2 - 10p + 16 \geq 0$$

On vérifie facilement que $A_p \geq 0$ pour $p \geq 6$.
Le cas $p \leq 4$ étant déjà étudié, supposons alors $p = 5$. D'après (3.4)-page 50, on a $\dim H^*(\Lambda V, d) \geq \dim V$ si $n \geq 4$ ou bien $n \leq 1$. Deux cas restent à étudier : $n = 2$ et $n = 3$.

Notons par W_3 le sous-espace vectoriel de $H^{\text{pair}}(\Lambda V, d)$ engendré par $\{[x_1^i x_2^j] \mid i + j = 3\}$. La minimalité du modèle assure que $W_0 \oplus W_1 \oplus (W_2 + W_3)$ est une somme directe dans $H^{\text{pair}}(\Lambda V, d)$.

1 èr cas : $n = 2$.

1) Si $\dim(W_2 + W_3) \geq 2$, alors $\dim H^*(\Lambda V, d) = 2 \dim H^{\text{pair}}(\Lambda V, d) \geq 10 > \dim V$.

2) Si $\dim(W_2 + W_3) = 1$, on distingue alors deux cas :

2.1) $W_3 = 0$. On peut prendre

$$dy_i = P_i(x_1, x_2) \text{ pour } i \in \{1, 2\}$$

où P_i sont linéairement indépendants dans $\mathbb{Q}[x_1^2, x_2^2, x_1x_2]$ et

$$dy_i = P_3(x_1, x_2) + \omega_i \text{ pour } i \in \{3, 4\}, \text{ avec } \omega_3 = Q_3(x_1, x_2)y_1y_2.$$

Mais $d\omega_3 = 0$, donc $Q_3 = 0$. Comme $W_3 = 0$, on peut choisir

$$dy_3 = P_3 \in \{x_1^3, x_2^3, x_1^2x_2, x_1x_2^2\}.$$

Écrivons $\omega_4 = Q_4(x_1, x_2)y_1y_2 + R_4(x_1, x_2)y_2y_3 + T_4(x_1, x_2)y_3y_1$. D'autre part $0 = d^2y_4 = (T_4P_3 - Q_4P_2)y_1 + (Q_4P_1 - R_4P_3)y_2 + (R_4P_2 - T_4P_1)y_3$, donc $T_4P_3 = Q_4P_2$, $Q_4P_1 = R_4P_3$, $R_4P_2 = T_4P_1$. Les polynômes P_1 et P_2 étant premiers entre eux, donc il existe $Q \in \mathbb{Q}[x_1, x_2]$ tel que

$$R_4 = QP_1, T_4 = QP_2, Q_4 = QP_3.$$

Par suite

$$dy_4 = P_4(x_1, x_2) + d(Qy_1y_2y_3).$$

On en déduit que $[P_4] = 0$, écrivons ensuite $P_4 = d(P_1'y_1 + P_2'y_2 + P_3'y_3)$. Donc $y = y_4 - P_1'y_1 + P_2'y_2 + P_3'y_3 - Qy_1y_2y_3$ est un cocycle. Soit $[P]$ un générateur de W_2 et μ un générateur de $H^{fd(X)}(\Lambda V, d)$. On vérifie que $[y], [x_1y], [x_2y], [Py], \mu$ sont linéairement indépendants dans $H^{\text{impair}}(\Lambda V, d)$, puis on conclut que $\dim H^*(\Lambda V, d) = 2\dim H^{\text{impair}}(\Lambda V, d) \geq 10 > 9 = \dim V$.

2.2) $W_2 = 0$. On écrit :

$$\begin{aligned} dx_1 &= dx_2 = 0, \\ dy_1 &= x_1^2, \\ dy_2 &= x_1x_2, \\ dy_3 &= x_2^2, \\ dy_4 &= P_4 + d(Qy_1y_2y_3), \end{aligned}$$

puis on conclut comme précédemment.

2 ème cas : $n = 3$

1) Si $\dim(W_2 + W_3) \geq 2$, alors

$$\dim H^*(\Lambda V, d) = 2\dim H^{\text{pair}}(\Lambda V, d) \geq 12 > 11 = \dim V.$$

2) Si $\dim(W_2 + W_3) = 1$, alors $\dim W_2 = 1$ et $W_3 = 0$. Écrivons alors

$$\begin{aligned} dx_i &= 0 \text{ pour } i \in \{1, \dots, 3\}, \\ dy_i &= P_i \text{ pour } i \in \{1, \dots, 5\}, \end{aligned}$$

où P_i sont linéairement indépendants dans $\mathbb{Q}[x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3]$ et

$$dy_6 = P_6 \in \{x_1^i x_2^j x_3^l / i + j + l = 3\}.$$

Soit $[x_ix_j]$ un générateur de W_2.

2.1) Si $i = j$ ($i = j = 1$ par exemple), écrivons

$$\begin{array}{rclcrcl} P_1 &=& a_1x_1^2 + x_2^2 &,& P_2 &=& a_2x_1^2 + x_3^2, \\ P_3 &=& a_3x_1^2 + x_1x_2 &,& P_4 &=& a_4x_1^2 + x_1x_3, \\ P_5 &=& a_5x_1^2 + x_2x_3 &,& P_6 &=& x_1^3. \end{array}$$

On vérifie facilement que les éléments suivants sont des cocycles.

$$\begin{array}{rcl}
\alpha_1 &=& x_2y_2 + a_2x_1y_3 + a_5x_1y_4 - x_3y_5 + (a_2a_3 - a_4a_5)y_6,\\
\alpha_2 &=& x_3y_3 - a_3x_1y_4 - x_1y_5 - (a_3a_4 + a_5)y_6,\\
\alpha_3 &=& x_3y_1 + a_5x_1y_3 - a_1x_1y_4 - x_2y_5 + (a_1a_4 - a_3a_5)y_6,\\
\alpha_4 &=& x_2y_1 + (a_3x_1 - x_2)y_3 - (a_1 + a_3^2)y_6,\\
\alpha_5 &=& a_4x_1y_3 - x_2y_4 + x_1y_5 - (a_3a_4 + a_5)y_6,\\
\alpha_6 &=& x_1y_2 + (a_4x_1 - x_3)y_4 - (a_2 + a_4^2)y_6.
\end{array}$$

Leur matrice relativement à la base

$$\{x_1y_1, x_2y_1, x_3y_1, x_1y_2, x_2y_2, x_3y_2, x_1y_3, x_2y_3, x_3y_3, x_1y_4, x_2y_4, x_3y_4, x_1y_5, x_2y_5, x_3y_5, y_6\}$$

est

$$M = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
a_2 & 0 & a_5 & a_3 & a_4 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
a_5 & -a_3 & -a_1 & 0 & 0 & a_4\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\
0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
(a_2a_3 - a_4a_5) & -(a_3a_4 + a_5) & (a_1a_4 - a_3a_5) & -(a_1 + a_3^2) & -(a_3a_4 + a_5) & -(a_2 + a_4^2)
\end{pmatrix}$$

Elle est de rang 6, donc

$$[\alpha_1], [\alpha_2], [\alpha_3], [\alpha_4], [\alpha_5], [\alpha_6]$$

sont linéairement indépendants dans $H^{\text{impair}}(\Lambda V, d)$, et par suite

$$\dim H^*(\Lambda V, d) = 2 \dim H^{\text{impair}}(\Lambda V, d) \geq 12 > 11 = \dim V.$$

2.2) Si $i \neq j$ ($(i, j) = (1, 2)$ par exemple). Avec un raisonnement similaire que précédemment on peut prendre

$$\begin{array}{rclrcl}
P_1 &=& a_1x_1x_2 + x_1^2 & P_2 &=& a_2x_1x_2 + x_2^2\\
P_3 &=& a_3x_1x_2 + x_3^2 & P_4 &=& a_4x_1x_2 + x_1x_3\\
P_5 &=& a_5x_1x_2 + x_2x_3 & P_6 &=& x_1^2x_2.
\end{array}$$

puis on montre que les éléments suivants sont linéairement indépendants dans $H^{\text{impair}}(\Lambda V, d)$,

$$\begin{array}{l}
[x_2y_1 - a_1x_1y_2 + (a_1a_2 - 1)y_6]\\
[x_3y_1 - x_1y_4 - a_1x_1y_5 + (a_1a_5 + a_4)y_6]\\
[x_2y_4 - a_4x_1y_2 - x_1y_5 + (a_2a_4 + a_5)y_6]\\
[x_3y_4 - x_1y_3 - a_4x_1y_5 + (a_4a_5 + a_3)y_6]\\
[(a_5x_1 + x_3)y_2 - (a_2x_1 + x_2)y_5 - 2a_2a_5y_6]\\
[a_3x_1y_2 - x_2y_3 + (x_3 - a_5x_1)y_5 - (a_2a_3 - a_5^2)y_6]
\end{array}$$

$\square$

Théorème 3.10.5 *Si X est un espace 1-connexe, tel que*

$$fd(X) - rk_0(X) \leq 6,$$

alors

$$\dim H^*(X, \mathbb{Q}) \geq \dim(\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}).$$

Preuve. Posons $fd(X) = N$, et soient x_i, y_i des générateurs du modèle $(\Lambda V, d)$ vérifiant les conditions du théorème 2.2.9-page 33. Donc

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq N \text{ et } \sum_{i=1}^{n+p} |y_i| \leq 2N - 1.$$

D'autre parts $|x_i| \geq 2$, et $|y_i| \geq 3$, donc

$$n \leq \frac{N}{2} \text{ et } n + p \leq \frac{2N-1}{3}.$$

Et par suite

$$\dim V = 2n + p \leq \frac{7N-2}{6}.$$

D'après le théorème 2.2.15-page 35, on conclut que

$$\dim H^*(\Lambda V, d) \geq 2^{N-6}.$$

Ainsi l'inégalité $2^{N-6} \geq \dfrac{7N-2}{6}$ (qui est équivalente à $3.2^N - 224N + 64 \geq 0$) est une condition suffisante pour avoir $\dim H^*(\Lambda V, d) \geq \dim V$.
L'étude de la fonction $f(N) = 3.2^N - 224N + 64$ montre qu'elle est croissante sur l'intervalle $\left[\frac{224}{\ln 8 . \ln 2}, +\infty\right[$. Or $N \geq 10 \geq \frac{224}{\ln 8 . \ln 2}$, donc $f(N) \geq f(10) = 896$. Le théorème 3.8.2-page 44 termine la preuve pour $N \leq 10$. $\square$

3.11 Sous condition sur la longueur de la différentielle

On dit que la différentielle d sur ΛV est homogène de longueur l si et seulement si

$$dV \subset \Lambda^l V.$$

On a étudié la conjecture H pour de tels modèles, et ci-dessous nos résultats :

Théorème 3.11.1 *Si $(\Lambda V, d)$ est un modèle elliptique, dont la différentielle est homogène de longueur de l, et dont le morphisme rationnel d'Hurewicz est non nul sur V^{impair}, alors*

$$\dim H^*(\Lambda V, d) \geq \dim V.$$

Preuve. On sait d'après [Lu02] que sous les hypothèses ci-dessus, on a :

$$\dim H^*(\Lambda V, d) \geq 2\mathrm{cat}_0(\Lambda V)$$

mais aussi que d'après la remarque 2.2.4-page 32 et le théorème 2.2.17-page 36 on a : $\dim V^{\mathrm{pair}} \leq \dim V^{\mathrm{impair}} \leq \mathrm{cat}_0(\Lambda V)$, d'où $\dim V \leq 2\mathrm{cat}_0(\Lambda V) \leq \dim H^*(\Lambda V, d)$. □

Théorème 3.11.2 *Si $(\Lambda V, d)$ est un modèle elliptique, dont la différentielle est homogène de longueur $l \geq 3$, alors*

$$\dim H^*(\Lambda V, d) \geq \dim V.$$

Preuve. La cohomologie de tels espaces admet une seconde graduation $H^*(\Lambda V, d) = \bigoplus_{k\geq 1} H_k^*(\Lambda V, d)$, donné par la longueur de mot des cocycle, représentants des classes de cohomologie. On sait d'après ([Lu02]-Théorème 2.2) que $H_k^*(\Lambda V, d) \neq 0$ pour tout $k \in \{0, \ldots, e\}$ où $e = \dim V^{\mathrm{impair}} + (l-2)\dim V^{\mathrm{pair}}$ (rappelons que $e = cat(\Lambda V, d)$, cf.[LM02]-Théorème 1). On a $\geq \dim V$ car $l \geq 3$, donc $\dim H^*(\Lambda V, d) \geq e \geq \dim V$. □

Théorème 3.11.3 *Si $(\Lambda V, d)$ est un modèle elliptique, dont la différentielle est homogène de longueur 2 (i.e : coformel) concentré en degrés impairs, (i.e., $V^{pair} = 0$), alors*

$$\dim H^*(\Lambda V, d) \geq \dim V.$$

Preuve. Pareille que celle du théorème 3.11.2. □

Annexes

Annexe A

Intéraction de l'homotopie rationnelle.

Dans cette section, on va donner un apreçu sur l'interaction de l'homotopie rationnelle avec d'autres domaines mathématiques, et sa contribution à résoudre des problèmes de géométrie ou d'algèbre. On a choisit d'étudier cet échange avec trois disciplines particulières : l'algèbre locale, la géométrie et enfin la théorie de complexité.

Avec l'algèbre locale

Le début de l'histoire fût en 1974, lorsque Jan-Erik Roos de l'université de Stokholm, en lisant la thèse de Lemaire [Lem74] fût frappé de la ressemblance entre ces travaux et ceux de Kaplasnky sur deux problèmes de Serre. Plus précisément Lemaire étudiait la série de Poincaré $\sum_{n\geq 0} \dim_{\mathbb{Q}} H_n(\Omega X, \mathbb{Q}) z^n$ où X est un CW-complexe fini, 1-connexe, alors que Kaplansky étudiait la série $\sum_{n\geq 0} \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ext}^n_R(\mathbb{K}, \mathbb{K}) z^n$ où R est un corps local, commutatif, Notherien de résidu $\mathbb{K}$. Le but commun est de déterminer sous quelles conditions la somme est une fonction rationnelle. Roos metta en place un programme pour étudier les propriétés homologiques des anneaux locaux, surtout ceux possédant un idéal maximal m tel que $m^3 = 0$, vu que c'est le plus simple cas non trivial dans le calcul de la série de Poincaré. En 1976, il montra que le problème de Serre en dimension 4 est équivalent à celui de Kaplansky quand $m^3 = 0$.

En 1977, Luchezar Avramov de l'université de Sofia-Bulgarie montra un résultat analogue à celui que va prouver un an après Halperin sans que l'un ait connaissance des travaux de l'autre.

Théorème A.1 *Si $f : R \longrightarrow S$ est un morphisme d'anneaux locaux Notherien et commutatifs, de résidu commun K tel que S soit un R-drapeau, alors il existe une suite exacte de groupes*

$$\ldots \pi^n(S \otimes_R K) \longrightarrow \pi^n(S) \longrightarrow \pi^n(R) \longrightarrow \pi^{n+1}(S \otimes_R K) \longrightarrow \ldots$$

En 1980, David Anick du MIT-USA construisa un CW-complexe fini et simplement connexe de dimension ≤ 4, dont la série de Poincaré n'est pas rationnel.

En 1981, Felix et Thomas influencés par les travaux de Roos, s'intéressaient au rayon de convergence de la série de Poincaré et montraient que

Théorème A.2 *Le rayon de convergence de la série de Poincaré d'un espace rationnel simplement connexe est égal à 1 si et seulement si cet espace est elliptique ; mais quand l'espace est hyperbolique alors ce rayon est inférieur strictement à 1.*

Ce fût le début d'une longue série de contacts directs entre les homotopes rationnels et leurs collègues algébristes locaux. Ainsi Avramov se déplaça à Lille voir Félix et Thomas. Halperin fera la connaissance de Roos à Bonn dans une conférence organisée par Baues, puis se déplacera jusqu'à Sofia avec Felix et Thomas faire celle de Avramov.

En 1982, Avramov écriva le premier dictionnaire entre l'homotopie rationnelle et l'algèbre locale, décrivant en détail comment traduire un problème d'un champs vers l'autre. 4 ans prépara, il rédigea un dictionnaire plus complet en collaboration avec Halperin. Dans son article, Avramov mettait en valeur le rôle que peuvent jouer les modèles de Sullivan dans la résolution de problèmes d'algèbre locale. Il démontra le résultat suivant :

Théorème A.3 *Tout complexe de Koszul K^R, d'un anneau local commutatif, R de résidu K, et dont l'algèbre de Yoneda $Ext^*_R(\mathbb{K},\mathbb{K})$ est Notherienne est $\mathbb{K}$-quasi-isomorphe à une cochaîne d'algèbres minimal $(\Lambda V, d)$, appelé modèle minimal de K^R.*

Puis conjectura avec Felix, le résultat suivant non résolu jusqu'à nos jours :

Conjecture A.4 *L'algèbre d'homotopie de Lie d'un espace hyperbolique rationnel contient une algèbre de Lie libre avec au moins deux générateurs.*

En 1983, Roos organise à Stokholm une école d'été intitulée "*Algebra, algebraic Topology and their interactions*". Parmi les participants on peut citer Anick, Avramov, Halperin et Lemaire entre autres. Un étudiant de Roos jusqu'à la méconnu, Rikard Bogvad y faisait connaissance de Halperin et montrèrent peu de temps après deux conjectures équivalents dues à Roos.

Conjecture A.5 *Tout anneau local commutatif dont l'algèbre de Yoneda associée est nothérienne, est une intersection complète.*

Conjecture A.6 *Si X est un CW-complexe rationnel fini, simplement connexe dont l'algèbre de Pontryagin $H_*(\Omega X, \mathbb{Q})$ est nothérien, alors X est elliptique.*

La collaboration atteint son haut niveau en 1988 avec le fameux article *Five Author*[FHJLT88] ou plusieurs résultats de l'homotopie rationnelle furent démontrées de façon assez simple par des outils de l'algèbre locale.

Avec la géométrie

Dans cette partie on s'intéressera à l'apport de l'homotopie rationnelle pour résoudre des problèmes en géométrie différentielle. Cet apport était riche pour résoudre le problème d'existence de géodésiques invariantes par isomérie dans une variété différentielle. Plus précisément, le théorème 2.2.3, page 32 admet une version équivalente en géométrie différentielle :

Conjecture A.7 *(Chern-Hopf) Si M^n admet une métrique d'une courbure sectionnelle positive, alors*

$$\chi_c \geq 0$$

Bott[1] énonça une conjecture plus général :

Conjecture A.8 *Toute variété différentielle qui admet une métrique d'une courbure sectionnelle positive est elliptique*

Dans [GH82], un géomètre *Karsten Grove* et un homotope *Stephen Halperin*, dans une fructueuse collaboration se sont posé le problème suivant :

Problème A.9 *Si g est une métrique riemannienne sur une variété différentielle M, exprimer ρ_M en fonction d'invariants de g.*

Où ρ_M désigne le rayon de convergence de la série de Poincaré $\sum_{n\geq 0} \dim H^k(\Omega M, \mathbb{Q}) z^k$. Plus de détails au sujet de cet invariant peuvent être trouvés dans [FxTh82]. Les deux auteurs de [GH82], établirent des résultats intéressants :

[1]Raoul Bott (1923-2005) est un mathématicien hongrois connu pour ses contributions en géométrie. Son travail portait initialement sur la physique avant de se tourner vers les mathématiques pures. Il reçut le Prix Wolf en 2000. Parmi ses étudiants, on compte Daniel Quillen.

Théorème A.10 *Dans une variété riemannienne hyperbolique, toute isométrie admet une infinité de géodésiques géométriquement invariantes.*

Théorème A.11 *Dans une variété riemannienne 1-connexe et fermée de dimension impaire, toute isométrie admet au moins une géodésique gémétriquement invariante.*

La transition de la géométrie vers l'homotopie rationnelle pour ces deux résultats était possible grâce à l'extension optimal de *Tanaka* (cf. [GHV78], [GT78], [Ta82]). Plus précisément, si M désigne une variété riemannienne, fermée et 1-connexe, et A désigne une isométrie sur M, on note par M_A^I l'ensemble des chemins de M invariants par A, i.e., les chemins $\gamma : I = [0,1] \longrightarrow M$ vérifiant $\gamma(1) = A(\gamma(0))$. Le problème d'existence de géodésiques A-invariantes ne dépond que du type d'homotopie de M_A^I, qui lui ne dépond que de la classe d'homotopie de A. (cf. [Gr73], [Gr74], [Ta82]) ; D'autre part, l'ensemble des isométries de M est un groupe de Lie compact (cf. [MS39]), donc A est homotope à un élément d'ordre fini. Dans ce cas, on a d'après [Gr74], A induit sur le modèle minimal $(\Lambda V, d)$ de M un automorphisme du même rang, noté encore A, qui préserve V, et pour lequel les relations

$$\begin{array}{rcl} H^*(X,\mathbb{Q}) & \cong & H^*(\Lambda V, d) \\ V^n & \cong & \pi_n(X) \otimes \mathbb{Q} \end{array}$$

sont A-équivariantes. Or, dans [Ta82] Tanaka montre que A admet une infinité de géodésiques invariantes si $\dim H^*(M_A^I, \mathbb{Q}) = \infty$. Les trois auteurs de [GHV78], montrèrent que c'est toujours le cas sauf si $\dim V_A^{\text{pair}} \leq \dim V_A^{\text{impair}} \leq 1$, où V_A désigne le sous-espace vectoriel formé par les points fixes de V. Ainsi toute variété hyperbollique, i.e., $\dim V = \infty$, admet une infinité de géodésiques A-invariantes. Pour le cas elliptique, les auteurs de [GH82] établissent que toute variété riemannienne, M rationnelle et elliptique de dimension impaire admet au moins une géodésique A-invariante, alors que celui de [Gr73], montre que c'est le cas si M_A^I est contractile.

Avec la théorie de complexité

La théorie de la *complexité de Kolmogorov* définit la complexité d'un objet fini par la taille du plus petit programme informatique (au sens théorique) qui permet de produire cet objet. Ainsi, un texte compressible a une faible complexité et contient peu d'information. On présentera d'abord les définitions de base de cette théorie, avant de donner un aperçu sur les travaux de quelques homotopes, notamment ceux de Luis Lechuga et Aniceto Murillo de l'université de Malaga, Espagne. En théorie de complexité, un *problème* est la donnée d'une famille $\Pi = (I_\alpha)_\alpha$ d'ensembles finis $I_\alpha \subset \mathbb{N}$ (appelés *objets*), et d'une application $f : \Pi \longrightarrow \mathbb{N}$ dont l'ensemble image s'appelle la *solution* du problème. Le problème Π est dit *décidable* si $f(\Pi) \subset \{0,1\}$.

Un problème est dit *polynômial* ou *P-problème*, s'il existe un algorithme $\mathcal{A}$ qui permet le calcul des $f(I)$ en un temps polynômial, i.e., il existe un polynôme P tel que le nombre d'opérations élémentaires (+ et x) nécessaire pour le calcul de $f(I)$ pour tout objet I de longueur n est de l'ordre de $O(P(n))$.

Un problème est dit *indéterminisme polynômial* ou *NP-problème*, s'il existe un algorithme $\mathcal{A}$ et un polynôme P tel que le coût total pour déterminer si $f(I) = c$ est de l'ordre de $O(P(n))$, pour tout entier $c \in \mathbb{N}$ et tout objet I de longueur n. Comme exemple de NP-problèmes, on peut citer :

- Tous les P-problèmes sont des NP-problème. Une conjecture affirme que l'inclusion est stricte.
- Le problème de décomposition d'un entier naturel en produit de facteurs premiers.
- Le problème des graphes isomorphes, qui consiste à étudier si deux graphes peuvent être dessinés de façons identiques.

En gros les P-problèmes sont ceux faciles à résoudre, et les NP-problèmes sont ceux pour lesquels il est facile de vérifier qu'une valeur donnée est une solution.

Une catégorie de problèmes plus "difficile" à résoudre est celle des *NP-complets problèmes*, ce sont les NP-problèmes auxquels peut être ramenée la solution de tout NP-problème ; plus précisément, si un algorithme résoud un NP-complet problème, alors il résoud tout NP-problème avec le même ordre de coût d'opérations. Ci dessous une lise de NP-complets problèmes classiques :

- *Le problème du n-puzzle* : Ranger les chiffres de 1 à $n^2 - 1$, initialement éparpillé dans une matrice de type (n, n).
- *Le problème du sac à dos* : étant donné des objets chacun ayant un poids donné, comment peut-on en choisir pour mettre le maximum dans un sac à dos, sans dépasser un poids total autorisé ?
- *Le problème du voyageur de commerce* : étant donné un ensemble de villes séparées par des distances données, trouver le plus court chemin qui relie toutes les villes.
- *Le problème des sous-graphes isomorphes* : Étant donné deux problèmes G_1 et G_2, a-t-on G_1 isomorphe à un sous-graphe de G_2.
- *Le problème de la somme de sous-ensembles* : étant donné un ensemble, y existe-il des éléments donc la somme est nulle.
- *Le problème de la coloration de graphe* : Il s'agit de déterminer combien de couleurs différentes suffisent pour colorer entièrement un graphe de telle façon qu'aucun noeud du graphe n'ait la même couleur que les noeuds voisins. Historiquement, ce problème s'est posé lorsqu'il s'agissait de colorer une carte des pays de façon qu'aucun pays n'ait la même couleur que ses voisins. Il s'agit du fameux *Théorème des quatre couleurs*, conjecturé en 1852 par *Francis Guthrie*, intéressé par la coloration de la carte des régions Angleterre. Des démonstrations furent publiées en 1880, mais 10 ans après des erreurs ont été relevées. Ironiquement la fausse preuve contient le schéma général de la vraie preuve pour 5 couleurs. Une autre preuve pour le cas de 4 couleurs a été donné en 1980, mais jusqu'à aujourd'hui elle n'a été ni accepté ni refusé, car elle utilisait des machines pour résoudre 1478 cas critiques (plus de 1200 heures de calcul).

FIG. A.1 – Carte administrative de la Russie colorée avec quatre couleurs.

Et le niveau de difficulté est encore plus grand pour la catégorie des problèmes, appelés *NP-hard* ; ce sont les problèmes auxquels peut être ramenée la solution de tout NP-problème, sans qu'ils soient eux même des NP-problème. Le schéma ci-dessous résume un peu la situation.

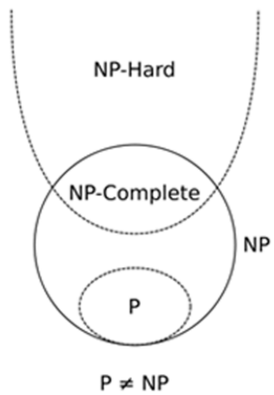


FIG. A.2 – Diagramme de Venn.

Parmi les NP-hard problèmes qui sont NP-complets, on peut citer celui du voyageur de commerce et celui de la somme de sous-ensembles. Parmi ceux qui ne le sont pas, on peut citer le *problème de l'arrêt* qui consiste à répondre si un programme informatique quelconque finira par s'arrêter ou non.

Ci dessous, on citera quelques résultats dans ce sens de A. Murillo et L. Lechuga (cf. [LM00], [LM01], [Mur93]).

– Déterminer si un espace 1-connexe est elliptique est un NP-hard problème.
– Le calcul de la classe fondamentale d'un espace elliptique est un NP-hard problème.
– Les calculs des nombres de Betti et la LS-catégorie pour d'un CW-complexe fini et formel est un NP-hard. problème.

Les mêmes auteurs s'attaquèrent à un autre problème, celui de la k-coloration d'un graphe G fini, connexe, simple et non orienté pour $k \geq 2$. Pour cela ils associèrent à G un espace rationel $S_{G,k}$, dont le modèle de Sullivan noté $(\Lambda V_{G,k}, d)$ (minimal quand $k \geq 3$) est défini par les relations :

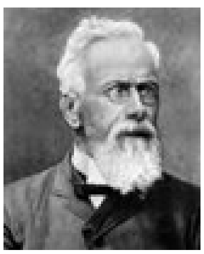
$$\begin{array}{lll} V_{G,k}^{\text{pair}} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle & |x_i| = 2 & dx_i = 0 \\ V_{G,k}^{\text{impair}} = \langle y_{j,p} \rangle & |y_{j,p}| = 2k-3 & dy_{j,p} = \displaystyle\sum_{q=1}^{k} x_j^{k-1} x_p^{q-1} \end{array}$$

Leur résultat était le suivant : G est k-coloriable si et seulement si $S_{G,k}$ est non elliptique.

Annexe B

Photos de topologues

A la fin de cette thèse, et à la memoire de tout ce qui ont contribué de près ou de loin au développement de l'homotopie rationnelle, dont plusieurs sont encore en vie, on ordonne ces portraits dans un ordre chronologique de date de naissance croissant, comme on ne dispose pas de toutes les dates de naissance, quelques unes peuvent être fausse car basées sur la date de soutenance de la thèse (en général à 26, sauf exception, comme c'est mon cas à l'âge de 39 ans). Tout oubli est juste une erreur inattentive sans aucune arrière pensée derrière. La plus part des photos sont télechargés des sites personnels de ces mathématiciens, ou bien du site http ://owpdb.mfo.de/.



Enrico Betti
1823-1892

Henri Poincaré
1854-1912

Elie Joseph Cartan
1869-1951

Emmy Noether
1882-1935

Solomon Lefschetz
1884-1972

Heinz Hopf
1894-1974

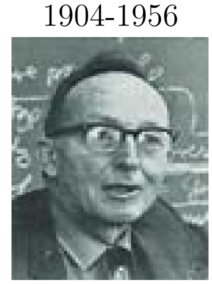
Georges de Rham
1903-1990

Witold Hurewicz
1904-1956

J. H. C. Whitehead
1904-1960

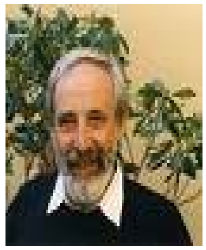
Henri Cartan
1904-2008

Erich Kähler
1906 - 2000

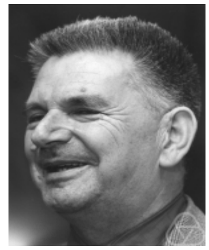


Saunders MacLane
1909-2005

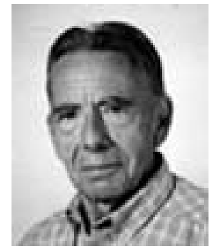
Samuel Eilenberg
1913-1998



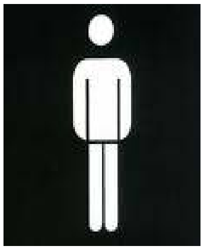
Raoul Bott
1923-2005



René Thom
1923-2002

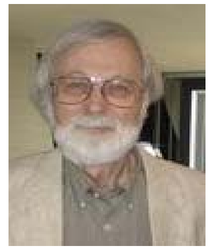


Jean Louis Koszul
1920-



John C. Moore
1926-

Jean Pierre Serre
1926-



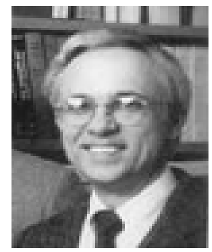
John Milnor
1931-

Jim Stasheff
1936-

Daniel H. Gottlieb
1937-

Daniel Lehmann
1937-

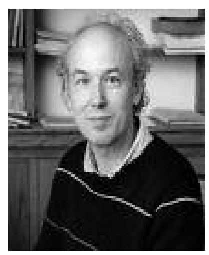
Volker Puppe
1938-



Daniel Quillen
1940-

Denis Sullivan
1941-

Hans-Joachim Baues
1943-



Pierre Deligne
1944-

John Friedlander
1944-

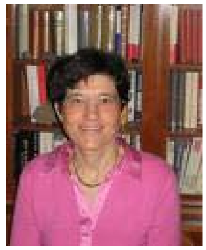
Stephen Halperin
1944-

Christopher John Allday
1943-

Jean-Michel Lemaire
1945-

Joe Neisendorfer
1945-


Jean Claude Thomas
1946-


Micheline Vigué
1947-

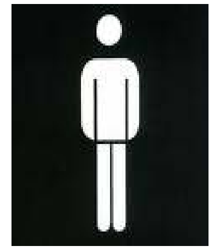

Daniel Tanré
1949-


Luchezar Avramov
1952-

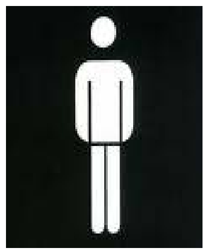

Yves Felix
1952-


Paul Selick
1951-


Gunnar Carlsson
1952-


Lionel Schwartz
1953-

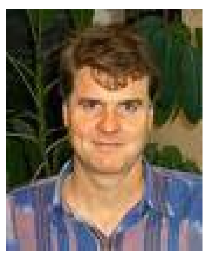

John Francis Oprea
1953-


Marc Aubry
1953 -

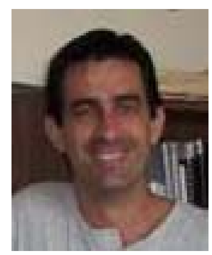

David Jay Anick
1954-

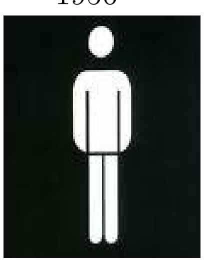

Mohamed Rachid Hilali
1956-


Mohamed El Houari
1956 -


Barry Jessup
1956-


Gregory Lupton
1960-


Aniceto Murillo
1963-


Nicolas Dupont
1962 -


Pascal Lambrechts
1965-


Octavian Cornea
1966-


Kathryn Hess
1967-


Geoffrey Powell
1968-


Muriel Livernet
1971-

Annexe C

Mes articles et communications.

Mes trois années de recherches se sont soldès par les deux articles suivants :

1. Mohamed Rachid Hilali et My Ismail Mamouni, *A conjectured lower bound for the cohomological dimension of elliptic spaces*, Journal of Homotopy and Related Structures, Vol. **3**, No. 1 (2008), 379-384.
2. Mohamed Rachid Hilali et My Ismail Mamouni, *A lower bound of cohomologic dimension for an elliptic space*, Topology and its Applications, Vol. **156**, Issue 2 (2008), 274-283.

J'ai aussi donné des exposés dans les événements suivants :

1. *La 3ème conférence maghrebine de Géométrie, Topologie et Systèmes dynamiques.*
28 Mai-02 Juin 2007, Marrakech, Maroc.
http ://www.fstg-marrakech.ac.ma/colloque/ggtm.html
2. *La 3ème rencontre annuelle du GDR "Topologie Algebrique et Applications".*
29-31 Octobre 2007, Angers, France.
http ://math.univ-lille1.fr/ gdrtop05/Colloque2007/homepage.html.
3. *The Third Arolla Conference on Algebraic Topology.*
18-24 Août 2008, Suisse.
http ://sma.epfl.ch/ hessbell/arolla/
4. *La Rencontre Mathématique Hispano-Marocaine.*
12-15 Novembre 2008, Casablanca, Maroc.
http ://titanium.univh2m.ac.ma/sedy/accueil.html

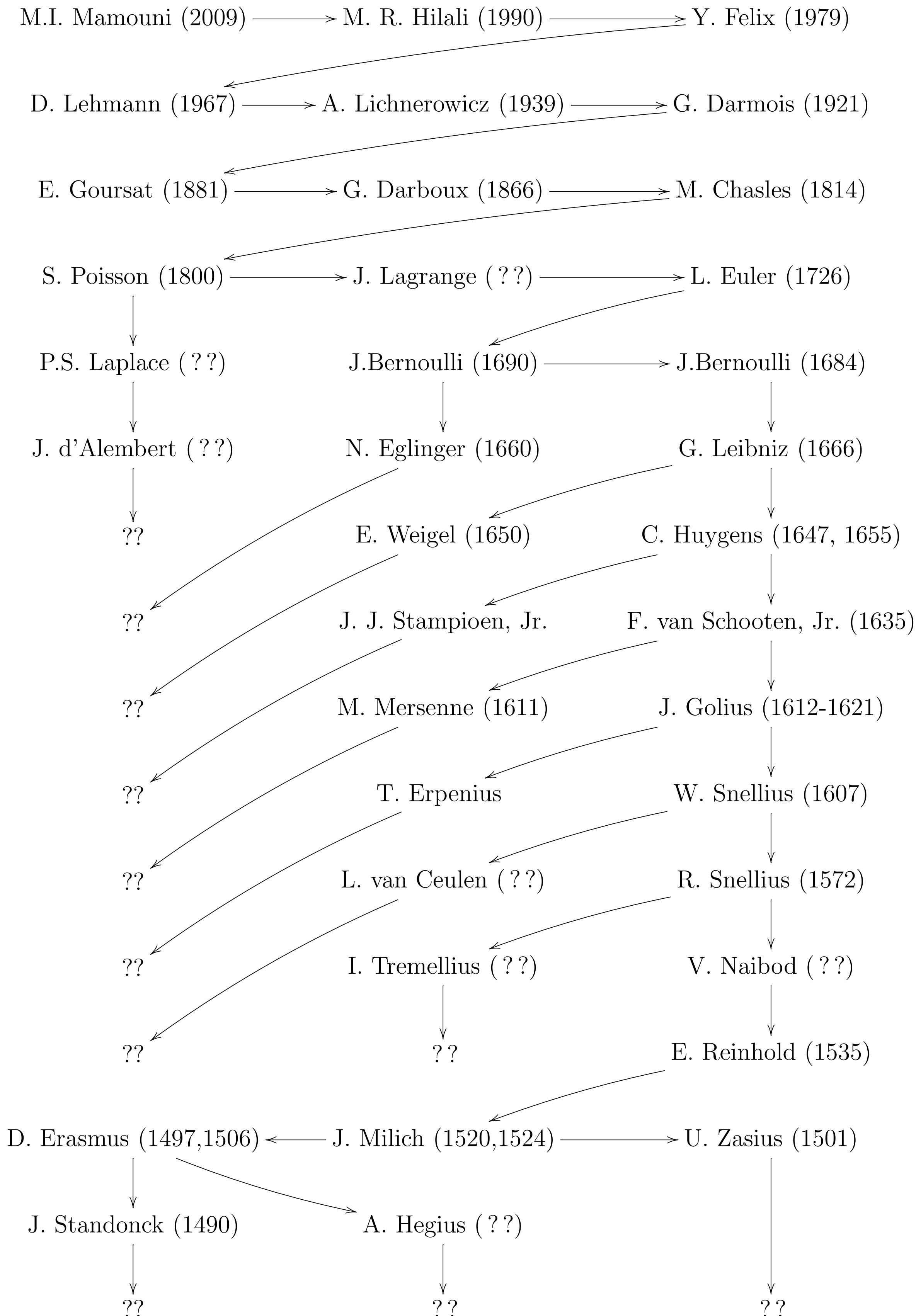
J'ai aussi été invité à donner d'autres exposés dans les événement ci-dessous, mais malheureusement je n'ai pas pu à cause du manque d'aide financière.

1. *The Graduate Student Homotopy Conference in Cambridge.*
4-7 Décembre 2007, Cambridge, Angleterre.
http ://www.srcf.ucam.org/cugms/homotopy2007.
2. *The third workshop Discrete Groups and Geometric Structures, with Applications.*
26 - 30 Mai 2008, Kortrijk, Belgique.
http ://www.kuleuven-kortrijk.be/workshop/.
3. *The Conference on Algebraic and Geometric Topology.*
9-13 Juin 2008, Gdansk, Pologne.
http ://math.univ.gda.pl/cagt/

Annexe D

Mon arbre généalogique

J'ai reconstituéé cette arbre à partir du site http ://www.genealogy.math.ndsu.nodak.edu/. C'est un projet du department de mathématiques du *North Dakota State University*, en association avec l'*American Mathematical Society*, supporté financièrement par *The Clay Mathematics Institute*, et géré par des étudiants bénévoles. Le sens des flèches est du docteur vers son directeur de thèse ; et entre les parenthèse la date de soutenance. Comme signalé auparavant dans l'introduction, sur le site il manque le nom de l'encadrant de D. Lehman. Ce dernier aprés une correspondance m'a confirmé que c'était A. Lichnerowicz en 1939, c'était la pièce qui me manquait pour remonter cet arbre 5 siècles auparavant, jusqu'à l'année 1490.


M.I. Mamouni (2009)
M. R. Hilali (1990)
Y. Felix (1979)
D. Lehmann (1967)
A. Lichnerowicz (1939)
G. Darmois (1921)
E. Goursat (1881)
G. Darboux (1866)
M. Chasles (1814)
S. Poisson (1800)
J. Lagrange (??)
L. Euler (1726)
P.S. Laplace (??)
J.Bernoulli (1690)
J.Bernoulli (1684)
J. d'Alembert (??)
N. Eglinger (1660)
G. Leibniz (1666)
??
E. Weigel (1650)
C. Huygens (1647, 1655)
??
J. J. Stampioen, Jr.
F. van Schooten, Jr. (1635)
??
M. Mersenne (1611)
J. Golius (1612-1621)
??
T. Erpenius
W. Snellius (1607)
??
L. van Ceulen (??)
R. Snellius (1572)
??
I. Tremellius (??)
V. Naibod (??)
??
??
E. Reinhold (1535)
D. Erasmus (1497,1506)
J. Milich (1520,1524)
U. Zasius (1501)
J. Standonck (1490)
A. Hegius (??)
??
??
??

Annexe E

10 problèmes ouverts de l'homotopie rationnelle

Dans ce chapitre, (pour le chercheur interessé) on va présenter une liste de problèmes encore ouverts en homotopie rationnelle. Il y en a certes beaucoup, on a limité notre liste à 10 problèmes ouverts liés en général aux espaces elliptique ou parfois à une notion de l'homotopie rationnelle qu'on a déjà abordé dans cette thèse. Nos références prinicipales sont [FHT01]-page 516, [Dup94] et [Thm94]. Ces problèmes ouverts sont classés par ordre chronologique (des dates dont je ne suis pas sûr sont approximatives.)

1. R. Bott (1962).

   Problème 1 *Toute variété Riemannienne compacte 1-connexe sans bord dont la courbure sectionnelle est toujours positive est un CW-complexe elliptique.*

2. J. Moore (1970).

   Problème 2 *Si X est un CW-complexe, a-t-on X est elliptique si et seulement si le groupe abélien gradué $\pi_*(X)$ possède un p-exposant ?*

3. S. Halperin (1976).

   Problème 3 *Soit F un espace elliptique rationnel, qui admet une charactéristique d'Euler-Poincare $\chi \neq 0$, et soit $F \longrightarrow E \longrightarrow B$ une fibration de Serre entre espaces simplement connexe. Est-ce que la suite spectrale rationnelle de Serre associée collapse toujours au terme E_2 ?*

4. Y. Félix, S. Halperin et J.-C. Thomas (1979).

Problème 4 *Soit H une $\mathbb{Q}$-algèbre graduée commutative de type fini et 1-connexe. Construire un espace rationnel simplement connexe tel que $H^*(X;\mathbb{Q}) = H$.*

5. J.-E. Roos (1980).

Problème 5 *Est-il vrai que X est un espace elliptique si et seulement si la série de Poincaré $\sum_k \dim H_k(X^{\mathbb{S}^1};\mathbb{Q})t^k$ est rationnelle.*

6. D. Anick (1980).

Problème 6 *Soit X est un CW-complexe fini et simplement connexe tel que $\dim X < n$. Existe-t-il un CW-complexe rationnel et elliptique tel que*

$$X \simeq Y^n?$$

où Y^n désigne le n-squellette de Y.

7. Y. Félix (1981), conjecture de l'omnibus.

Problème 7 *Soit X un espace topologique simplement connexe, dont la cohomologie rationnelle est de type fini. Si $H^{pair}(X;\mathbb{Q})$ ainsi que l'image du morphisme d'Hurewicz sont de dimensions finies. A-t-on aussi*

$$\dim H^*(X;\mathbb{Q}) < \infty?$$

8. S. Halperin (1986), conjecture du rang torique.

Problème 8 *Si le tore $\mathbb{T}^n$, de rang n, opère presque librement sur un espace topologique simplement connexe, X. A-t-on*

$$\dim H^*(X;\mathbb{Q}) \geq 2^n?$$

9. R. Kane (1988).

Problème 9 *Tout espace de lacets fini est de même type d'homotopie rationnelle qu'un groupe de Lie compact.*

On rappelle qu'un espace topologique X, est dit fini, s'il existe une équivalence d'homotopie faible $f : X \longrightarrow Y$, où Y est un CW-complexe fini.

10. M.R. Hilali (1990), la conjecture H.

Problème 10 *Si X est un espace elliptique simplement connexe, alors*

$$\dim H^*(X;\mathbb{Q}) \geq \dim(\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}).$$

Bibliographie

[Ad60] F. Adams, *On the non existence of elements of Hopf invariant one*, Ann. of Math. **72** (1960), 20-104.

[AH78] C. Allday et S. Halperin, *Lie group actions on spaces of finite rank*, Quar. J. Math. Oxford **28** (1978), 69-76.

[AP86] C. Allday et V. Puppe, *Bounds on the torus rank*, Transformation groups, Poznan 85, Proc. Springer lect. notes in Math. **1217** (1986) 1-10.

[Bau77] H.J Baues , *Rationale homotopie typen*, Manuscripta Math. **20** (1977), 119-131.

[BauLem77] H.J Baues et J.-M. Lemaire, *Minimal models in homotopy theory*, Math. Ann. **225** (1977), 219-242.

[BG67] D.E. Blair et S.I. Goldberg, *Topology of almost contact manifolds*, Journal of Differential Geometry Vol **1** (1967), 347-354.

[Ca28] E. Cartan *Sur les nombres de Betti des espaces de groupes clos*, C.R. Acad. Sci. Paris **178**(1928), 196-197.

[CLM93] D. Chinea, M. de Léon et J.C. Marrero, *Topology of cosymplectic manifolds*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées Sér. 72 No.**6** (1993), 567-591.

[Dix55] J. Dixmier, *Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes*, Acta Sci. Math, Szeged **16** (1955), 246-250.

[EM08] G.J. Ellis et R. Mikhailov, *A colimit of classifying spaces*, arXiv :0804.3581v1.

[dRh31] G. de Rham, *Sur l'analysis situs des variétés à n dimensions*, J. Math. Pures Appl. **10** (1931), 115-200.

[Dup94] N. Dupont, *Problems and Conjectures in rational homotopy theory : A survey*, Expo. Math. **12** (1994) 323-352.

[FHT01] Y. Félix, S. Halperin et J-C Thomas, *Rational homotopy theory*, Graduate Texts in Math. Vol. **205** (2001), Springer-Verlag, New York.

[FrHa79] J. Friedlander et S. Halperin, *An arithmetic characterization of the rational homotopy groups of certain spaces* Invent. Math, **53** (1979), 117-133.

[FxHa82] Y. Felix et S. Halperin, *Rational LS category and its applications*, Trans. Amer. Math. Soc. **273** (1982), no. 1, 1-38.

[FxTh81] Y. Félix et J.C. Thomas, *Homotopie rationnelle : dualité et complémentarité des modèles*, Bulletin de la Société Mathématique de Belgique, **33** (1981), 7-19.

[FxH82] Y. Félix et S. Halperin, *Formal spaces with finite dimensional rational homotopy*, Transactions of the American Mathematical Society **270** (1982), 575-588.

[FHJLT88] Y. Félix, S. Halperin, C. Jacobsson, C. Löfwall et J-C Thomas, *The radical of the homotopy Lie algebra*, Amer. Jour. Math. **110** (1988), 301-322.

[FxTh82] Y. Félix et J-C Thomas, *The radius of convergence of Poincaré series of loop spaces*, Invent. math. **68** (1982), 257-274.

[Gr73] K. Grove, *Condition (C) for the energy integral of certain path-spaces and applications to the theory of geodisics*, J. Differential Geometry **8** (1973), 171-177.

[Gr74] K. Grove, *Isometry-nvariant geodisics*, Topology, **13** (1974), 281-291.

[GH82] K. Grove, S. Halperin, *Contributions of rational homotopy theory to global problems in geometry* Pub. Math. IHES, tome **56** (1982), 207-223.

[GHV76] W. Greub, S. Halperin, R. Vanstone, *Connections, Curvature and Chomology*, Academic Press, New York (1976).

[GHV78] K. Grove, S. Halperin, M. Vigué, *The rational homotopy theory of certain path-spaces with applications to geodesics*, Acta math. **140** (1978), 277-303.

[GM81] P.A. Griffiths and J.W. Morgan, *Rational Homotopy Theory and Differential Forms*, Progress in Math. Vol. **16**, Birkäuser, Basel (1981).

[GM69] D. Gromoll and W. Meyer, *Periodic geodesies on a compact riemannian manifold*, J. Differentia] Geometry **3** (1969), 493-510.

[GT78] K. Grove, M. Tanaka, *On the number of invariant closed geodesics*, Acta math., **140** (1978), 33-48.

[Ha77] S. Halperin, *Finitness in the minimal models of Sullivan*, Trans. Amer. Math. Soc. **230** (1977), 173-199.

[Ha83] S. Halperin, *Lectures on minimal models*, Mémoire de la Soc. Math. de France (N.S) Vol. **9-10** (1983).

[Ha85] S. Halperin, *Rational homotopy and torus rank*, Aspects of topology, Mem. of Dowker, H. London Math Soc. Lect. Notes Series **93** (1985), 293-305.

[HaSt79] S. Halperin and J. Stasheff, *Obstructions to homotopy equivalences*, Adv. in Math. **32** (1979), 233-279.

[Hat02] Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2002), 281-283

[Hi00] M.R. Hilali, *Sur la conjecture de Halperin relative au rang torique*, Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin. Volume 7, Number **2** (2000), 221-227.

[Hi90] M.R. Hilali, *Action du tore $\mathbb{T}^n$ sur les espaces simplement connexes*, Thèse d'État (1990), Université catholique de Louvain, Belgique.

[Hs99] K. Hess, *A history of rational homotopy theory*, History of topology, chapt. **27** (1999), 757-796, Elsevier Science.

[HS79] S. Halperin et J. Stasheff, *Obstructions to homotopy equivalences*, Advances in Mathematics **32** (1979), 233-279.

[La98] L. Laeng, *Introduction à la géometrie symplectique*, Le journal des maths des élèves Vol. **1** (1998), No. 4, 169-174.

[Leh77] D. Lehmann, *Théorie homotopique des formes différentielles*, Astérisque **45** (1977).

[Lem74] J.-M. Lemaire, *Algèbres Connexes et Homologie des Espaces Lacets*, Lect. Notes in Math. Vol. **422**, Springer (1974).

[LM00] L. Lechuga, A. Murillo *Compelxity in rational homotopy theory*, Topology **39** (2000), 89-94.

[LM01] , L. Lechuga, A. Murillo *The fundamental class of a rational space, the graph coloring problem and other classical decision problem*, Bull. Belg. Math. Soc. **8** (2001), 451-467.

[LM02] , L. Lechuga, A. Murillo *A formula for the rational LS-category of certain spaces*, Ann. Inst. Fourrier. **52(2)** (2002), 1585-2002.

[LP82] L. Lambe et S. Priddy, *Cohomology of nilmanifolds and torsion-free, nilpotent groups*, Trans. Amer. Soc. **273** (1982) 39-55.

[Lu02] G. Lupton, *The Rational Toomer Invariant and Certain Elliptic Spaces*, Contemporary Mathematics Vol. **316** (2002), 135-146, arXiv :math/0309392v1.

[Maj96] M. Majewski, *A cellular Lie algebra model for space and its equivalence with the models of Quillen and Sullivan*, Thesis, Free Univ. of Berlin (1996).

[MS39] S.B. Meyers et N. Steenrod, *The group of isometries of a Riemannian manifold*, Ann. of Math. **40**(1939), 400-416.

[Mur93] A. Murillo *The top cohomology class of certain spaces*, Journal of Pure and Applied Algebra **84** (1993) 209-214.

[Nes78] J. Neisendorfer *Lie algebras, coalgebras, and rational homotopy theory of nilpotent spaces*, Pacific Jour. Math. **74** (1978) 429-460.

[Op92] J. Oprea, *The category of nilmanifolds*, Enseign. Math. **38** (1992), 27-40.

[Poi53] H. Poincaré, *Oeuvres complètes*, Graduate Texts in Math. Vol. **6** (1953), Gauthier-Villars, Paris.

[Poi1895] H. Poincaré, *Analysis situs*, Jour. de l'école polyt. **1** (1895), 1-121.

[Poi1899] H. Poincaré, *Complément à l'Analysis Situs*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 13 (1899), 285-343.

[Poi1900] H. Poincaré, *Second complément à l'Analysis Situs*, Proceedings of the London Mathematical Society, **32** (1900), 277-308.

[Qu67] D. Quillen, *Homotopical Algebra*, Lect. Notes in Math. Vol **43** (1967), 1-121.

[Qu69] D. Quillen, *Rational homotopy theory*, Ann. of Math. **90** (1969), 205-295.

[Su73] D. Sullivan, *Differential forms and the topology of manifolds*, Proceedings of the International Conference on Manifolds and Related Topics in Topology, Tokyo, Univ. of Tokyo Press (1973).

[Su76] D. Sullivan, *Cartan-de Rham homotopy theory*, Astérisque **32-33** (1967), 227-254.

[Su77] D. Sullivan, *Infinitesimal computations in topology*, Publ. I.H.E.S **47** (1977), 269-331.

[Su05] D. Sullivan, *Geometric Topology : Localization, Periodicity and Galois Symmetry : The 1970 MIT Notes*, K-Monographs in Mathematics, Dordrecht, Springer.

[Ta82] M. Tanaka, *On the existence of infinitely of many isometry-invariant geodisics*, J. Differential Geometry **17**(1982), 171-184.

[Thm94] J.C. Thomas, *Homologie de l'espace des lacets, problemes et questions*, Journal of Pure and Applied Algebra **91** (1994), 355-379.

[VS76] M. Vigue-Poirrier et D. Sullivan, *The homology theory of the closed geodesic problem*, Journal of Differential Geometry **11** (1976), 633-644.