Chapitre 0

Calcul Algébrique

Révision Terminale

Exercice 1: *Calcul*

$\frac{2}{9}-\frac{1}{15}+\frac{5}{6}$ $\qquad$ $\frac{1}{6}+\frac{6}{8}+\frac{5}{9}$ $\qquad$ $\dfrac{\frac{4}{25}-\frac{6}{35}}{\frac{3}{10}+\frac{1}{15}}$ $\qquad$ $(\frac{3}{2}-\frac{5}{4})\times(\frac{9}{4}+\frac{21}{6})$ $\qquad$ $\dfrac{\frac{26}{18}\times\frac{-45}{7}}{\frac{39}{14}}$

$\dfrac{(-18)^7\times 2^4\times(-50)^3}{(-25)^4\times(-4)^5\times(-27)^2}$ $\qquad$ $\ln(4\sqrt{2})$ (en fonction de $\ln 2$) $\qquad$ $\frac{2}{\sqrt{2}}$(en fonction de $\sqrt{2}$)

$\dfrac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2}+\dfrac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}$ $\qquad$ $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\times\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ $\qquad$ $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}-\sqrt{(3-\sqrt{5})^2}$.

Exercice 2:

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$(E_1) : 3x^4+5x^2-2=0$ $\qquad$ $(E_2) : (\ln x)^2+3\ln x+2=0$ $\qquad$ $(E_3) : e^x+e^{-x}=2$

$(E_4) : \ln(3x)+\ln(x-1)=\ln(2)+2\ln(3)$ $\qquad$ $(E_5) : |x^2+x+1|=|x|$ $\qquad$ $(E_6) : |2x+1|=x-4$

$(E_7) : x=\sqrt{x}+2$ $\qquad$ $(E_8) : \sqrt{x^2-9}=4-x$ $\qquad$ $(E_9) : \sqrt{|x^2-1|}=x-5.$

$(E_{10}) : 3^{2x}-3^{x+1}+2=0$

Exercice 3:

1. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[-\pi,\pi[$ l'équation $\sin(x)=\frac{1}{2}$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0,2\pi[$ puis l'équation $\sin(6x)=1$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations trigonométriques suivantes :
   a) $2\cos(3x+\frac{\pi}{6})=1$, $\qquad$ b) $\sin x+\sin(2x)=0$, $\qquad$ c) $2\cos^2(x)+3\cos(x)+1=0$.
3. a) Résoudre dans $]0,\pi[$, l'équation $\cos(5x)=0$. On précisera le nombre de solutions.
   b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Résoudre alors dans $]0,\pi[$, l'équation $\cos(nx)=0$. On précisera le nombre de solutions.
4. ** Résoudre dans $[0,2\pi]$ les inéquations trigonométriques suivantes :
   a) $\cos(2x)\leq 0$, $\qquad$ b) $\sin(x)\geq -\frac{1}{2}$.

Exercice 4:

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$(I_1) : x^3+5x\leq 6x$ $\qquad$ $(I_2) : \dfrac{x}{x+1}+\dfrac{1}{x(x+1)}\leq 1$ $\qquad$ $(I_3) : 3\times 2^{3x-4}\geq 7^8$

$(I_4) : |x^2-2|\geq 2$ $\qquad$ $(I_5) : |x+4|\leq 5-3x$ $\qquad$ $(I_6) : |x-3|+|x^2-3x+2|\leq 2$

$(I_7) : x-4\sqrt{x-2}\geq 0$

Exercice 5: *Avec un paramètre*

Discuter et résoudre selon m les (in)équations suivantes :

1. $mx^2+x-m=0$
2. $mx^2+x\,(2m-1)-2=0$
3. $x^2-mx+(m+1)=0$
4. $(m^2-1)x<m+1$
5. $(m+1)2^x=1-m$

Exercice 6: *Pot pourri*

1. Montrer que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}_+^*$ distincts, $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}>2$.
2. Montrer que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^+$, $\sqrt{x+y}\leq\sqrt{x}+\sqrt{y}$.
3. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tels que $|x-y|\leq 1$ et $4\leq|y|\leq 6$. Montrer que $3\leq|x|\leq 7$.

Exercice 7:
Déterminer la monotonie des fonctions suivantes (on proposera plusieurs méthodes) :
$f(x)=e^{\frac{1}{1-x}}$ sur $]1,+\infty[$ $\quad g(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ $\quad h(x)=\sqrt{x}\times\ln(x^2+1)$

Exercice 8:

1. Montrer que $\forall x\geq 1$, $\ln(x)\leq\sqrt{x}$.
2. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^-$, $1-x+\frac{x^2}{2}\leq e^{-x}$

Exercice 9:

1. Montrer que la fonction $g(x)=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$ est paire.
2. Montrer que la fonction $f(x)=\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$ est impaire.
3. ** Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x+\sqrt{1+x^2}>0$.
   En déduire que la fonction $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ est impaire sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10: **A propos de la partie entière*

1. Soit d la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $d(x)=x-\lfloor x\rfloor$.
   a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $0\leq d(x)\leq 1$. Résoudre alors l'équation $d(x)=0$ sur $\mathbb{R}$.
   b) Montrer que d est 1-périodique et la représenter graphiquement.
2. Soit la fonction $f(x)=\lfloor 2x\rfloor-2\lfloor x\rfloor$ définie pour tout $x\in\mathbb{R}$.
   a) Montrer que f est positive, puis que f est bornée (essayer de trouver le meilleur majorant).
   b) Montrer que f est périodique puis préciser $f(\mathbb{R})$.
3. Soit la fonction $h(x)=\dfrac{\lfloor x\rfloor}{x}$. Montrer que h est majorée sur $]0,+\infty[$. Est-ce encore vrai sur $\mathbb{R}^*$?

Exercice 11: *Pour s'entrainer*

1. Dériver les fonctions suivantes après avoir déterminé leur ensemble de définition :
   $f:x\mapsto x\ln(\frac{x+2}{3x-1})$ $\quad g:x\mapsto\sqrt{x^2+1}-\dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}$ $\quad h:x\mapsto(\ln x+1)^2e^{\frac{1}{x}+2x}$
   $u:x\mapsto\cos(\sqrt{1-x^2})$ $\quad v:x\mapsto\sqrt{\dfrac{x}{x^2+5}}$
2. Etudier les fonctions suivantes :
   $f:x\mapsto\sqrt{2-\ln x}$ $\quad g:x\mapsto x^{1+\frac{1}{x}}$ $\quad h:x\mapsto\ln(e^x-e^{-x})$
   $u:x\mapsto\sqrt{x-\sqrt{x}}$ $\quad v:x\mapsto\dfrac{x}{x-\ln x}$
3. Etudier la fonction $g:x\mapsto 1-(x+1)e^{-2x}$. En déduire les variations de $f:x\mapsto\frac{x^2}{1-e^{-2x}}$.
4. Etude complète de $f(x)=x+2-2\ln(e^x+1)$: parité, TV, limites, asymptote en $+\infty$ et position relative, allure de la courbe.

Exercice 12: *Pour aller plus loin*

1. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Montrer que $\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor\leq\lfloor x+y\rfloor\leq\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+1$
2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, croissante et périodique de période $T>0$.
   Montrer qu'alors, f est constante sur $\mathbb{R}$.

Dérivation et intégration

On rappelle que si u est dérivable en x_0 et f en $u(x_0)$, alors, $x \mapsto f(u(x))$ est dérivable en x_0, de dérivée $u'(x_0)f'(u(x_0))$.

Exercice 1. Calculer les dérivées des fonctions suivantes, là où elles sont dérivables.

a. $x \mapsto \tan x$	**d.** $x \mapsto \ln \frac{x^2+1}{x^2-1}$	**g.** $x \mapsto \ln(x^2+1)$	**j.** $x \mapsto \sqrt{x^2}$
b. $x \mapsto \ln(x+1)$	**e.** $x \mapsto \sqrt{e^x - x - 1}$	**h.** $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-6x+3}}$	**k.** $x \mapsto \ln(\ln x)$
c. $x \mapsto e^{x^2}$	**f.** $x \mapsto \sin(e^x)$	**i.** $x \mapsto \int_1^x e^{-t^2}\, dt$	**l.** $x \mapsto \frac{x^{\ln x}}{x^2+1}$

Exercice 2. Étudier les fonctions suivantes : dresser leur tableau de variations, calculer les limites éventuelles et tracer l'allure des courbes représentatives.

a. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^4 - x^3 + 1$. **b.** $g :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}, x \mapsto \tan x$.
c. $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. **d.** $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

Exercice 3. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 1}$.

a. Déterminer le domaine de définition de f et étudier les variations de f.

b. Déterminer la limite de $f(x) - x$ quand x tend vers $+\infty$. De même, déterminer la limite de $f(x) + x$ quand x tend vers $-\infty$.

c. Comment qualifier les droites $y = x + \frac{1}{2}$ et $y = -x - \frac{1}{2}$? Étudier le signe de $f(x) - (x + \frac{1}{2})$ pour $x \geqslant 1$ et celui de $f(x) + x + \frac{1}{2}$ pour $x \leqslant -2$.

d. Tracer l'allure de la courbe représentative de f et les droites de la question précédente, en prenant soin de leurs positions relatives.

Exercice 4. Soit f la fonction définie par $f(0) = 0$ et $f(t) = e^{-\frac{1}{t^2}}$ pour $t \neq 0$

a.* Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.

b. Déterminer f' sur $\mathbb{R}$ et montrer qu'elle est continue.

c. Étudier les variations de f et tracer l'allure de sa courbe représentative.

Exercice 5. Calculer des primitives des fonctions définies par les expressions :

a. $x + e^{-nx}$ **b.** $\frac{x}{1+x^2}$ **c.** $\tan x$ **d.** $\frac{x}{1-x^2}$ **e.** xe^{-x^2} **f.** $\sqrt{1 - \frac{1}{1+x^2}}$ **g.** $\sqrt{\cos x}\tan x$
h. $e^x \cos(e^x)$ **i.** xe^x **j.** x^3 **k.** x^{-3} **l.** $x\sqrt{x}$ **m.** $\frac{1}{x\sqrt{x}}$ **n.** $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ **n.** $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

Exercice 6. On considère la suite $I_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t}\, dt$.

a. Calculer I_0 puis I_1 (*on pourra dériver* $(1-t)^{\frac{5}{2}}$).

b. Montrer que (I_n) est positive décroissante. En déduire qu'elle converge.

c. Montrer, en majorant la racine, que $I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$ puis déterminer la limite de (I_n).

Exercice 7. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\varphi(x) = \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$.

a. Montrer que φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

b. Montrer que pour tout réel $x \geqslant 1$, $\int_1^x e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \leqslant \int_1^x e^{-\frac{u}{2}}\, du \leqslant 2e^{-\frac{1}{2}}$.

c. En déduire que pour $x \in \mathbb{R}^+$, $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi(1) + 2e^{-\frac{1}{2}}$.

d. Montrer que φ admet une limite finie en $+\infty$, que l'on note l. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\varphi(x) \leqslant l$.